ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА 2008. Вып. 2

УДК 517.934

© *Ж. О. Аслонов*

ОБ ОДНОЙ НЕГРУБОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ НА ТОРЕ T^n

На двумерном торе построена негрубая динамическая система.

Ключевые слова: динамическая система, векторное поле, тор.

Пусть M — гладкое (класса C^{r+1}) связное компактное многообразие размерности n, $V^r(M)$ — множество C^r-векторных полей, снабженное C^r-топологией.

Определение 1 (см. [1]). Векторные поля $X, Y \in V^r(M)$ называются (C^r-эквивалентными) топологически эквивалентными, если существует (C^r-диффеоморфизм) гомеоморфизм $h : M \to M$, который переводит траектории поля X в траектории поля Y, сохраняя их ориентации: последнее условие означает, что если $p \in M$ и $\delta > 0$, то существует такое $\varepsilon > 0$, что если $0 < t < \delta$, то $h(X_t(p)) = Y_{t'}(h(p))$ для некоторого $t' \in (0, \varepsilon)$.

В дальнейшем h будем называть топологической эквивалентностью между X и Y.

Определение 2. Векторное поле $X \in V^r(M)$ называется грубым, если существует такая окрестность V поля X в $V^r(M)$, что любое $Y \in V$ топологически эквивалентно полю X.

Пусть $X = \{a, b\}$ — постоянное векторное поле на $R^2(u, v)$. Векторное поле X можно рассмотреть на торе T^2, так как его координаты являются периодическими. Тогда интегральные кривые векторного поля на T^2 являются образами интегральных кривых векторного поля в $R^2(u, v)$ при факторизации.

Определение 3. Числа a и b называются рационально независимыми, если из $ka + mb = 0$ с целыми k и m следует $k = m = 0$.

Если числа a и b рационально независимы, то каждая интегральная кривая поля X является всюду плотной на торе T^2. В этом случае поле X называется иррациональной обмоткой.

Известно, что иррациональная обмотка на двумерном торе не является грубой [1].

В работе [2] доказано, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует динамическая система, имеющая конечное число замкнутых траекторий, порожденная гладким векторным полем X_ε, которое достаточно близко к X в C^r-компактно-открытой топологии, то есть $\|X - X_\varepsilon\|_r < \varepsilon$. Более того, векторное поле X_ε построено явным образом:

$$X_\varepsilon = \left\{a' + \frac{\varepsilon(2\pi)^{-r}}{\sqrt{5}\cdot|k|^r\cdot|m|^r}\cdot\sin^2(n\pi(ku - mv)),\, b'\right\}, \quad a', b' \in Q,\ n \in N.$$

Доказано, что это векторное поле является динамической системой на торе T^2.

Если рассмотреть прямую, проходящую через начало координат параллельно вектору $\{a', b'\}$, то она имеет уравнение

$$ku - mv = 0 \tag{1}$$

В точках этой прямой поле X_ε имеет вид $X_\varepsilon = \{a', b'\}$, причем прямая (1) является интегральный кривой поля X_ε.

Если рассмотрим прямые

$$ku - mv = \frac{l}{|k|n}, \quad \text{где} \quad l = 1, 2, 3, \ldots, |k|n, \tag{2}$$

то в точках этих прямых векторное поле имеет вид $X_\varepsilon = \{a', b'\}$.

Прямые (2) при факторизации переходят в замкнутые кривые. Причем прямые $ku - mv = 0$ и $ku - mv = \frac{l}{|k|n}$, $(l = |k|n)$ переходят в одну замкнутую кривую.

Таким образом, показано, что прямые

$$ku - mv = \frac{l}{|k|n}, \quad \text{где} \quad l = 0, 2, 3, \ldots, |k|n$$

задают $|k|n$ замкнутых траекторий поля X_ε на T^2.

Далее доказано, что векторное поле X_ε не имеет других замкнутых траекторий.

В работе [2] также проверяется, что норма разности векторных полей и их частных производных до порядка r меньше чем ε. Следовательно, $\|X - X_\varepsilon\|_r < \varepsilon$. Таким образом, в работе [2] построена аналитическая динамическая система на двумерном торе, которая имеет конечное число замкнутых траекторий и сколь угодно близка к иррациональной обмотке в гладкой компактно-открытой топологии векторных полей.

В настоящей работе построена динамическая система на n-мерном торе T^n, которая сколь угодно близка к иррациональной обмотке тора и имеет конечное число замкнутых траекторий. То есть имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть X — иррациональная обмотка на торе T^n. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует векторное поле X_ε такое, что поле X_ε имеет конечное число замкнутых траекторий и $\|X - X_\varepsilon\|_r < \varepsilon$, где $\|\cdot\|_r$ — расстояние в пространстве $V^r(T^n)$* [1].

МАТЕМАТИКА 2008. Вып. 2

* * *

1. Палис Ж., Ди Мелу В. Геометрическая теория динамических систем. М.: Мир, 1986.

2. Нарманов А. Я., Аслонов Ж. О. Об одной динамической системе на двумерном торе // Вестн. Нац. ун-та Узбекистана. Ташкент, 2006. №2. С. 38–41.

Поступила в редакцию 15.02.08

G. O. Aslonov
About one sensitive dynamical system on torus T^n

A sensitive dynamical system is built on the two-dimensional torus.

Аслонов Жасурбек Орзиевич
Национальный университет Узбекистана,
100174, Узбекистан, Ташкент
Вузгородок
E-mail: jasurbek05@mail.ru