ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА 2008. Вып. 2

УДК 517.929.2

© ***А. А. Айзикович***

О НЕОСЦИЛЛЯЦИИ РЕШЕНИЙ РАЗНОСТНОЙ СИСТЕМЫ

На примере системы второго порядка показан вариант обобщения понятия неосцилляции решений скалярных разностных уравнений. Приведен критерий неосцилляции, основанный на пробных функциях.

Ключевые слова: линейные разностные уравнения и системы, квазинуль, неосцилляция решений, критерии неосцилляции.

Действительная матрица $A(t) = (a_{ij}(t))_1^2$ называется *допустимой* на множестве $g_{M-1} = [0, M-1] \cap \mathbb{N}_0$, если при $t \in g_{M-1}$ выполнены условия $a_{12}(t) > 0$, $\det A(t) > 0$. Пусть, далее, $A(t)$ — допустимая матрица. Тогда любое решение $x(t) = \mathrm{col}(x^1(t), x^2(t))$ системы

$$x(t+1) = A(t)x(t) \tag{1}$$

определяется своей первой компонентой $x^1(t)$.

Систему (1) назовем *неосцилляционной* (*по первой компоненте*) на множестве g_M, если не существует нетривиального решения системы (1), первая компонента которого имеет более одного квазинуля [1] на g_M. Наконец, векторная функция $u = \mathrm{col}(u^1, u^2)$ — *пробная* для (1) на g_M, если

1) $u^1(t) > 0$, $t \in g_M$; 2) u удовлетворяет первому уравнению (1);

3) $u^2(t+1) - a_{21}(t)u^1(t) - a_{22}(t)u^2(t) \leqslant 0$ на g_M.

Теорема 1. *Пусть для системы* (1) *существует пробная функция. Тогда система* (1) *неосцилляционна на множестве* g_M.

Доказательство распадается на доказательство ряда утверждений.

1. Пусть u_1 — пробная функция для системы (1), которая преобразована в

$$y(t+1) = B(t)y(t) \tag{2}$$

заменой переменных $y = T(t)x$, $T = \begin{pmatrix} 1/u_1^1 & 0 \\ u_1^2/u_1^1 & -1 \end{pmatrix}$. Тогда $b_{ii} > 0, b_{ij} \leqslant 0$ для $i \neq j$, $i, j = 1, 2$.

2. Пусть $V(t) = \mathrm{diag}\left(\prod_{s=0}^{t-1}(-b_{11}(s)), \prod_{s=0}^{t-1}(-b_{22}(s))\right)$ — диагональная матрица, и пусть (2) преобразовано к системе $z(t+1) = C(t)z(t)$ с помощью замены переменных $z = Vy$. Тогда существует решение этой системы со свойством $z_0^k(t)(-1)^t > 0$, $k = 1, 2$ на g_M.

3. Пусть u_1 — пробная функция для (1) на g_M. Тогда (1) имеет решение $u_0(t)$ $\big(z_0 = VTu_0\big)$ на g_M со свойством $u_0^1 > 0$, $u_0^1 u_1^2 - u_1^1 u_0^2 > 0$.

4. Пусть $x = u_0(t)$ — решение системы (1) такое, что $u_0^1(t) > 0$ на g_M, $x = U(t)v$, где $v = \mathrm{col}(v^0, v^1)$, $U = \begin{pmatrix} u_0^1 & 0 \\ u_0^2 & 1 \end{pmatrix}$. В результирующей системе для v второе (неосцилляционное) уравнение не содержит v^0 :

$$\Delta v^0(t) = (a_{12}(t)/u_0^1(t+1))v^1(t), \quad v^1(t+1) = \frac{u_0^1(t)}{u_0^1(t+1)} \det A(t)\, v^1(t).$$

5. Если $v^0(t) = x^1(t)/u_0^1(t)$ имеет два квазинуля на g_M, то по теореме Ролля [1] $v^1(t)$ также имеет квазинуль на g_M. Противоречие.

З а м е ч а н и е. Записывая скалярное уравнение

$$y(t+2) - p_1(t)y(t+1) - p_0(t)y(t) = 0, \quad t \in g_{M-2} \tag{3}$$

как систему (1) с $x(t) = \mathrm{col}(y(t), y(t+1))$ и $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p_0(t) & p_1(t) \end{pmatrix}$, получаем частный случай критерия неосцилляционности для уравнения (3), приведенный в [2].

* * *

1. Тептин А. Л. Теоремы о разностных неравенствах для n-точечных разностных краевых задач // Матем. сб. 1962. Т. 62(104), №3. С. 345–370.
2. Айзикович А. А. Критерий неосцилляции решений разностного уравнения // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17, № 12. С. 2201–2211.

Поступила в редакцию 01.02.08

A. A. Aizikovich
About disconjugate solutions of the difference system

The variant of generalizing the concept of disconjugate solutions of scalar difference equations is shown by the example of the system of the second order . The disconjugacy criterion based on test functions is given.

Айзикович Александр Аркадьевич
Ижевский государственный
технический университет
426069, Россия, г. Ижевск,
ул. Студенческая, 7 (корп. 6)
E-mail: pmi@istu.ru