ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ
МАТЕМАТИКА 2024. Т. 34. Вып. 2. С. 267–285.

УДК 519.8

© *А. Г. Ченцов, А. А. Ченцов, П. А. Ченцов*

**ЗАДАЧА МАРШРУТИЗАЦИИ «НА УЗКИЕ МЕСТА»
(ОПТИМИЗАЦИЯ В ПРЕДЕЛАХ ЗОН)**

Рассматривается минимаксная задача маршрутизации с элементами декомпозиции. В простейшем случае предполагается, что все множество заданий разбито в сумму двух подмножеств (кластеров), причем выполнение заданий из второго подмножества может быть начато только после завершения всех заданий из первого. Для упомянутой двухкластерной задачи построен алгоритм для нахождения оптимального композиционного решения, включающего маршрут (перестановку индексов заданий) и точку старта, базирующийся на использовании широко понимаемого динамического программирования. На основе данного подхода построен также алгоритм для решения задачи маршрутизации в случае произвольного упорядоченного конечного набора кластеров; алгоритм реализован на ПЭВМ, проведен вычислительный эксперимент. Возможные применения могут быть связаны с некоторыми логистическими задачами в малой авиации, когда требуется обеспечить посещение многих пунктов одним транспортным средством (самолет, вертолет) с ограниченной дальностью беспосадочного полета.

Ключевые слова: динамическое программирование, маршрут, условия предшествования.

DOI: 10.35634/vm240206

Введение

Задачи, содержащие элементы маршрутизации, возникают во многих инженерных приложениях. Особо отметим постановки, связанные с демонтажом радиационно опасных объектов, а также задачи, связанные с листовой резкой деталей на машинах с ЧПУ. В этих постановках естественным является аддитивный вариант агрегирования затрат (результатов вредных воздействий). В то же время в некоторых инженерных задачах, связанных с многоэтапными перемещениями при ресурсных ограничениях на каждом этапе (цикле), полезно рассматривать постановки, в которых следует оптимизировать стоимость наиболее затратного этапа; так возникает задача на минимакс. В настоящем исследовании мы сосредоточимся на постановках последнего типа.

Разумеется, исследуемые ниже задачи маршрутизации имеют своим прототипом известную труднорешаемую задачу коммивояжера (ЗК), которая обычно рассматривается в аддитивном варианте; в связи с исследованием ЗК и задач типа ЗК см., в частности, [1–8]. Отметим [9] в связи с минимаксной ЗК. Вместе с тем, задачи маршрутизации, ориентированные на инженерные приложения, содержат ряд особенностей качественного характера в сравнении с ЗК. В первую очередь это касается ограничений: в «инженерных» вариантах задач маршрутизации эти ограничения возникают из технологических требований; их соблюдение имеет принципиальное значение. В ряде случаев существенно усложняются функции стоимости; так, например, в задаче о минимизации дозовой нагрузки исполнителей при демонтаже радиационно опасных объектов приходится использовать функции стоимости с зависимостью от списка заданий (в каждый момент «светят» те и только те источники, которые на этот момент не были демонтированы). Среди прочих ограничений особо отметим условия предшествования (см. [7]), которые, как оказалось [10, § 4.9], можно использовать в положительном направлении в части снижения сложности вычислений.

Также имеет смысл отметить, что в ряде случаев (имеются в виду инженерные задачи) технологические ограничения делают целесообразной декомпозицию полной задачи (так, в случае листовой резки с использованием ЧПУ широко используется резка зонами; см. [11, § 1.3]). Это последнее направление было развито в [12–15] для задачи с аддитивным критерием и в [16, 17] — для минимаксной задачи. Мы продолжаем исследования [16, 17], имея в виду минимаксные задачи маршрутизации с применением декомпозиций. Отметим сейчас одно важное приложение минимаксной постановки для простейшего варианта метрической задачи на плоскости, ориентированной на проблемы авиационной логистики. Речь идет о ситуации, когда объект управления (ОУ), являющийся самолетом или вертолетом, должен посетить конечный набор пунктов при наличии директивного плана грузоперевозок между некоторыми из них; предполагается при этом, что дальность беспосадочного полета нашего ОУ ограничена значением $\mathbf{d}$, $0 \leqslant \mathbf{d}$. Данное ограничение связано с дефицитом топлива, а план грузоперевозок порождает условия предшествования (условия «одно после другого»). Первый вопрос в связи с данной проблемой состоит в следующем: выполнима ли для нашего ОУ упомянутая система перелетов с соблюдением всех отмеченных условий?

Для получения ответа на данный вопрос следует рассмотреть задачу на минимакс без $\mathbf{d}$-ограничения; имеется в виду минимакс расстояний, складывающихся при реализации той или иной очередности посещений, допустимой по предшествованию, то есть соответствующей плану директивных грузоперевозок. Если при этом окажется, что упомянутый минимакс не превосходит $\mathbf{d}$, то тогда (и только тогда) исходная транспортная задача (с $\mathbf{d}$-ограничением) разрешима. Определяя в данном «хорошем» случае саму минимаксную очередность посещений, мы найдем и требуемое решение упомянутой исходной задачи. Имея в виду данную возможность проверки условий разрешимости, мы рассматриваем в настоящей работе минимаксную задачу маршрутизации с условиями предшествования, именуемую иногда [7] задачей курьера. Следуем при этом подходу [16, 17], ориентированному на применение декомпозиций в интересах решения задач ощутимой размерности за приемлемое время. Построенный на этой основе алгоритм оптимизации композиционных решений реализован на ПЭВМ; проведен обстоятельный вычислительный эксперимент. В связи с [16, 17] отметим, что там рассматривалась и более общая постановка минимаксной задачи, связанная уже с последовательным посещением мегаполисов (непустых конечных множеств).

§ 1. Общие сведения и обозначения

Ниже используется стандартная теоретико-множественная символика (кванторы, пропозициональные связки и др.); через $\varnothing$ обозначаем пустое множество, $\stackrel{\triangle}{=}$ — равенство по определению. Семейством называем множество, все элементы которого сами являются множествами. В связи с использованием понятий теории множеств отметим [18, 19]; см. также вводные разделы работ [16, 17]. Итак, любым двум объектам x и y сопоставляем их неупорядоченную пару $\{x; y\}$, то есть непустое множество, содержащее в качестве своих элементов x, y и не содержащее никаких других элементов. Каждому объекту z сопоставляется тогда синглетон $\{z\} \stackrel{\triangle}{=} \{z; z\}$, для которого $z \in \{z\}$. Множества суть объекты. Тогда для любых объектов u и v имеем непустые множества $\{u\}$ и $\{u; v\}$, а потому определена [18, с. 67] упорядоченная пара (УП) $(u, v) \stackrel{\triangle}{=} \{\{u\}; \{u; v\}\}$ с первым элементом u и вторым элементом v. Каждой УП h сопоставляем ее первый элемент $\mathrm{pr}_1(h)$ и второй элемент $\mathrm{pr}_2(h)$, однозначно определяемые [18, гл. II, § 3] равенством $h = (\mathrm{pr}_1(h), \mathrm{pr}_2(h))$. Если же a, b и c — три объекта, то [19, с. 17] $(a, b, c) \stackrel{\triangle}{=} ((a, b), c)$ есть (упорядоченный) триплет с первым элементом a, вторым элементом b и третьим элементом c. В этой связи напомним, что [19, с. 17] $A \times B \times C \triangleq (A \times B) \times C$ для любых трех множеств A, B и C; тогда при $x \in A \times B$ и $y \in C$ имеем

$$(x, y) = ((\mathrm{pr}_1(x), \mathrm{pr}_2(x)), y) = (\mathrm{pr}_1(x), \mathrm{pr}_2(x), y) \in A \times B \times C \tag{1.1}$$

(учитываем, что x есть УП). Множеству H сопоставляем семейство $\mathcal{P}(H)$ всех подмножеств (п/м) H и семейство $\mathcal{P}'(H) \triangleq \mathcal{P}(H) \setminus \{\varnothing\}$ всех непустых п/м H; через $\mathrm{Fin}(H)$ обозначаем семейство всех конечных множеств из $\mathcal{P}'(H)$ (если H конечно, то $\mathrm{Fin}(H) = \mathcal{P}'(H)$). Для любых непустых множеств A и B через B^A обозначаем (см. [18, гл. II]) множество всех функций из A в B (как обычно, при $f \in B^A$ и $a \in A$ в виде $f(a) \in B$ имеем значение f в точке a); при $h \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}(A)$ в виде $h^1(C) \triangleq \{h(x) \colon x \in C\} \in \mathcal{P}(B)$ имеем образ множества C при действии h (заметим, что при $C = \varnothing$ непременно $h^1(C) = \varnothing$; при $C \neq \varnothing$ имеем $h^1(C) \neq \varnothing$). Для непустых множеств X, Y и Z, функции $h \in Z^{X \times Y}$, $x \in X$ и $y \in Y$, как обычно $h(x, y) \triangleq h((x, y)) \in Z$. Если же A, B, C и D — непустые множества, $g \in D^{A \times B \times C}$, $u \in A \times B$ и $v \in C$, то (см. (1.1)) $g(u, v) \in D$ есть значение функции g в точке $(u, v) \in A \times B \times C$, для которого используем также естественное обозначение $g(u_1, u_2, v)$, где $u_1 \triangleq \mathrm{pr}_1(u)$ и $u_2 \triangleq \mathrm{pr}_2(u)$.

Как обычно, $\mathbb{R}_+ \triangleq \{\xi \in \mathbb{R} \colon 0 \leqslant \xi\}$ ($\mathbb{R}$ — вещественная прямая), $\mathbb{N} \triangleq \{1; 2; \ldots\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}_+)$, $\mathbb{N}_0 \triangleq \{0\} \cup \mathbb{N} = \{0; 1; 2; \ldots\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}_+)$ и

$$\overline{p, q} \triangleq \{k \in \mathbb{N}_0 \colon (p \leqslant k) \& (k \leqslant q)\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N}_0) \quad \forall p \in \mathbb{N}_0 \quad \forall q \in \mathbb{N}_0$$

($\overline{1, 0} = \varnothing$ и $\overline{1, m} = \{k \in \mathbb{N} \colon k \leqslant m\}$ при $m \in \mathbb{N}$). При $S \in \mathcal{P}'(\mathbb{N})$ и $n \in \mathbb{N}$ в виде

$$S \oplus n \triangleq \{s + n \colon s \in S\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{N})$$

имеем сдвиг S на n. Непустому конечному множеству K сопоставляем его мощность $|K| \in \mathbb{N}$ и непустое множество $(\mathrm{bi})[K]$ всех биекций [20, с. 87] дискретного интервала $\overline{1, |K|}$ на K; полагаем, что $|\varnothing| \triangleq 0$. Перестановка непустого множества A есть [20, с. 87] биекция A на себя; каждой перестановке α множества A сопоставляется перестановка α^{-1} данного множества, обратная к α: $\alpha^{-1}(\alpha(x)) = \alpha(\alpha^{-1}(x)) = x$ при $x \in A$.

Каждому непустому множеству H сопоставляем множество $\mathcal{R}_+[H]$ всех неотрицательных вещественнозначных (в/з) функций на H. Кортежами называем далее функции, определенные на непустых п/м $\mathbb{N}_0$.

§ 2. Минимаксная задача курьера

В настоящем параграфе совсем кратко рассмотрим основные элементы постановки минимаксной задачи курьера (см. [7] в связи с терминологией), фиксируя в дальнейшем непустое множество X, число $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$, для которого $4 \leqslant \mathbf{n}$, а также точки

$$m_1 \in X, \quad \ldots, \quad m_{\mathbf{n}} \in X, \tag{2.1}$$

играющие роль пунктов посещения. Полагаем при этом, что $m_p \neq m_q$ при $p \in \overline{1, \mathbf{n}}$, $q \in \overline{1, \mathbf{n}}$ и $p \neq q$. Фиксируем, кроме того, $X^0 \in \mathrm{Fin}(X)$ в качестве множества возможных точек старта. Полагаем, что $m_1 \notin X^0, \ldots, m_{\mathbf{n}} \notin X^0$. Все множество пунктов (2.1) разбито (в основной части) в сумму двух п/м: фиксируем $N \in \overline{2, \mathbf{n} - 2}$ и рассматриваем

$$(\mathcal{M}_1 \triangleq \{m_i \colon i \in \overline{1, N}\} \in \mathrm{Fin}(X)) \& (\mathcal{M}_2 \triangleq \{m_i \colon i \in \overline{N + 1, \mathbf{n}}\} \in \mathrm{Fin}(X)). \tag{2.2}$$

Возникают предваряющая $\mathcal{M}_1$-задача и финальная $\mathcal{M}_2$-задача; при этом посещение пунктов из $\mathcal{M}_2$ допускается только после посещения всех пунктов из $\mathcal{M}_1$; в дальнейшем будем именовать пункты (2.1) городами, следуя традиции ЗК (в связи с рассматриваемой постановкой см. [17, § 8]). Учитывая (2.2), введем условия предшествования, для чего фиксируем множества

$$\mathbf{K}_1 \in \mathcal{P}(\overline{1,N} \times \overline{1,N}), \quad \mathbf{K}_2 \in \mathcal{P}(\overline{1,\mathbf{n}-N} \times \overline{1,\mathbf{n}-N}),$$

элементами которых являются УП, именуемые адресными; у каждой адресной УП первый элемент именуем отправителем, а второй — получателем. Полагаем, что

$$\begin{gathered}(\forall \mathbf{K}^0 \in \mathcal{P}'(\mathbf{K}_1)\ \exists z^0 \in \mathbf{K}^0\colon\ \mathrm{pr}_1(z^0) \neq \mathrm{pr}_2(z)\ \forall z \in \mathbf{K}^0) \\ \&(\forall \mathbf{K}_0 \in \mathcal{P}'(\mathbf{K}_2)\ \exists z_0 \in \mathbf{K}_0\colon\ \mathrm{pr}_1(z_0) \neq \mathrm{pr}_2(z)\ \forall z \in \mathbf{K}_0);\end{gathered} \tag{2.3}$$

условия (2.3) (см. конкретные варианты в [10, часть 2]) исключают зацикливание допустимых по предшествованию маршрутов (а это — перестановки индексов заданий). Данные маршруты составляют непустые (при условии (2.3)) множества: действительно при $\mathbb{P}_1 \triangleq (\mathrm{bi})[\overline{1,N}]$ и $\mathbb{P}_2 \triangleq (\mathrm{bi})[\overline{1,\mathbf{n}-N}]$ имеем

$$\mathcal{A}_1 \triangleq \{\alpha \in \mathbb{P}_1\colon \alpha^{-1}(\mathrm{pr}_1(z)) < \alpha^{-1}(\mathrm{pr}_2(z))\ \forall z \in \mathbf{K}_1\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{P}_1), \tag{2.4}$$

$$\mathcal{A}_2 \triangleq \{\alpha \in \mathbb{P}_2\colon \alpha^{-1}(\mathrm{pr}_1(z)) < \alpha^{-1}(\mathrm{pr}_2(z))\ \forall z \in \mathbf{K}_2\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{P}_2); \tag{2.5}$$

в (2.4), (2.5) определена допустимость маршрутов по предшествованию в предваряющей и финальной задачах (имеются в виду маршруты обслуживания городов из $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ соответственно). Далее, пусть $\mathbb{P} \triangleq (\mathrm{bi})[\overline{1,\mathbf{n}}]$. При $\alpha \in \mathbb{P}_1$ и $\beta \in \mathbb{P}_2$ определяем маршрут $\alpha\Diamond\beta \in \mathbb{P}$ в основной задаче (с городами (2.1)) посредством условия

$$((\alpha\Diamond\beta)(k) \triangleq \alpha(k)\ \forall k \in \overline{1,N})\&((\alpha\Diamond\beta)(l) \triangleq \beta(l-N)+N\ \forall l \in \overline{N+1,\mathbf{n}}). \tag{2.6}$$

Склеивание (2.6) широко использовалось в [12–17]. В виде

$$\mathbf{P} \triangleq \{\mathrm{pr}_1(z)\Diamond\,\mathrm{pr}_2(z)\colon z \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2\} = \{\alpha\Diamond\beta\colon \alpha \in \mathcal{A}_1,\ \beta \in \mathcal{A}_2\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{P}) \tag{2.7}$$

имеем (непустое) множество всех композиционных маршрутов основной задачи с городами (2.1); рассматриваем маршруты из (2.7) как допустимые в этой задаче (в [17, замечание 8.2] указана полезная интерпретация условий предшествования; мы допускаем, однако, и тот случай, когда $\mathbf{K}_1 = \varnothing$ и $\mathbf{K}_2 = \varnothing$, то есть случай, когда упомянутые условия предшествования отсутствуют).

Если $x \in X^0$ и $\gamma \in \mathbf{P}$, то полагаем, что $\mathbf{y}[x;\gamma]\colon \overline{0,\mathbf{n}} \longrightarrow X$ определяется условиями

$$(\mathbf{y}[x;\gamma](0) \triangleq x)\&(\mathbf{y}[x;\gamma](t) \triangleq m_{\gamma(t)}\ \forall t \in \overline{1,\mathbf{n}}); \tag{2.8}$$

рассматриваем $\mathbf{y}[x;\gamma]$ как траекторию, соответствующую маршруту γ и старту в $x \in X^0$. Далее, пусть $\mathbb{X} \triangleq \{m_i\colon i \in \overline{1,\mathbf{n}}\}$ и $\mathbf{X} \triangleq \mathbb{X} \cup X^0$. Фиксируем

$$\mathbf{c} \in \mathcal{R}_+[\mathbf{X} \times \mathbb{X} \times \mathfrak{N}], \tag{2.9}$$

где $\mathfrak{N} \triangleq \mathcal{P}'(\overline{1,\mathbf{n}})$, в качестве функции стоимости перемещений, а также

$$f \in \mathcal{R}_+[\bar{\mathbf{M}}], \tag{2.10}$$

где $\bar{\mathbf{M}} \triangleq \{m_{N+i}\colon i \in \overline{1, \mathbf{n} - N}\} = \{m_j\colon j \in \overline{N+1, \mathbf{n}}\}$, в качестве функции, оценивающей терминальное состояние. Если $x \in X^0$ и $\gamma \in \mathbf{P}$, то

$$\pi[x;\gamma] \triangleq \sup(\{\max_{t\in\overline{1,\mathbf{n}}} \mathbf{c}(\mathbf{y}[x;\gamma](t-1), \mathbf{y}[x;\gamma](t), \gamma^1(\overline{t,\mathbf{n}})); f(\mathbf{y}[x;\gamma](\mathbf{n}))\}) \in \mathbb{R}_+. \tag{2.11}$$

Посредством (2.11) определяем критерий следующей экстремальной задачи:

$$\pi[x;\gamma] \longrightarrow \min, \quad (x,\gamma) \in X^0 \times \mathbf{P}; \tag{2.12}$$

задаче (2.12) сопоставляем экстремум $\mathbf{v}$ и непустое множество $\mathbf{sol}$ всех оптимальных композиционных допустимых решений (ДР):

$$\mathbf{v} \triangleq \min_{(x,\gamma)\in X^0\times\mathbf{P}} \pi[x;\gamma] = \min_{x\in X^0}\min_{\gamma\in\mathbf{P}} \pi[x;\gamma] \in \mathbb{R}_+, \tag{2.13}$$

$$\mathbf{sol} \triangleq \{(x,\gamma) \in X^0 \times \mathbf{P}\colon \pi[x;\gamma] = \mathbf{v}\} \in \mathcal{P}'(X^0 \times \mathbf{P}). \tag{2.14}$$

Мы используем ниже построения [17, § 8] (упомянутые построения [17], в свою очередь, извлекаются из конструкций решения более общей минимаксной задачи о посещении мегаполисов; см. [17, §§ 2–7]). Наряду с основной задачей (2.12) рассматриваем задачи с фиксированным стартом: при $x \in X^0$ имеем задачу курьера (в смысле [7])

$$\pi[x;\gamma] \longrightarrow \min, \quad \gamma \in \mathbf{P}, \tag{2.15}$$

которой (см. [17, (8.11), (8.12)]) сопоставляется экстремум $\tilde{V}[x]$ и (непустое) множество $\mathbf{P}_{\mathrm{opt}}[x]$ всех оптимальных (в задаче (2.15)) маршрутов:

$$\tilde{V}[x] \triangleq \min_{\gamma\in\mathbf{P}} \pi[x;\gamma] \in \mathbb{R}_+, \tag{2.16}$$

$$\mathbf{P}_{\mathrm{opt}}[x] \triangleq \{\gamma \in \mathbf{P}\colon \pi[x;\gamma] = \tilde{V}[x]\} \in \mathcal{P}'(\mathbf{P}). \tag{2.17}$$

С учетом (2.13) и (2.16) имеем, конечно, равенство [17, (8.13)]:

$$\mathbf{v} = \min_{x\in X^0} \tilde{V}[x];$$

$$X^0_{\mathrm{opt}} \triangleq \{x \in X^0\colon \tilde{V}[x] = \mathbf{v}\} \in \mathcal{P}'(X^0) \tag{2.18}$$

есть множество всех оптимальных точек старта. В силу (2.14), (2.17) и (2.18) получаем, что

$$(x,\gamma) \in \mathbf{sol} \quad \forall x \in X^0_{\mathrm{opt}} \quad \forall \gamma \in \mathbf{P}_{\mathrm{opt}}[x]. \tag{2.19}$$

Для решения основной задачи используем раздельное решение предваряющей, связанной с посещением городов из $\mathcal{M}_1$, и финальной, касающейся посещения городов из $\mathcal{M}_2$, задач. В качестве основного метода используется динамическое программирование (ДП).

§ 3. Предваряющая и финальная задачи

Свои построения начинаем с финальной задачи. При $\hat{\mathbf{K}}_1 \triangleq \{\mathrm{pr}_1(z)\colon z \in \mathbf{K}_1\}$ имеем (см. [10, (4.9.9), предложение 4.9.3]), что $\overline{1,N} \setminus \hat{\mathbf{K}}_1 \in \mathcal{P}'(\overline{1,N})$ и

$$X^{00} \triangleq \{m_j\colon j \in \overline{1,N} \setminus \hat{\mathbf{K}}_1\} \in \mathrm{Fin}(\mathbf{X}); \tag{3.1}$$

X^{00} (3.1) рассматриваем в качестве множества возможных точек старта финальной задачи. Полагаем, что $\mathbb{X}^* \triangleq \{m_{N+j}\colon j \in \overline{1, \mathbf{n} - N}\} = \bar{\mathbf{M}}$ и $\mathbf{X}^* \triangleq \mathbb{X}^* \cup \mathbb{X}^{00}$. В этих терминах определяем функцию $\mathbf{c}^* \in \mathcal{R}_+[\mathbf{X}^* \times \mathbb{X}^* \times \mathfrak{N}^*]$, где $\mathfrak{N}^* \triangleq \mathcal{P}'(\overline{1, \mathbf{n} - N})$. Учитываем следующее очевидное свойство: $K \oplus N \in \mathfrak{N}\ \forall K \in \mathfrak{N}^*$. Итак, полагаем, что

$$\mathbf{c}^*(x, y, K) \triangleq \mathbf{c}(x, y, K \oplus N) \quad \forall x \in \mathbf{X}^* \quad \forall y \in \mathbb{X}^* \quad \forall K \in \mathfrak{N}^*.$$

В качестве терминальной компоненты финальной $\mathcal{M}_2$-задачи используем функцию f. Нам потребуются траектории $\mathcal{M}_2$-задачи, стартующие из точек X^{00} и согласованные с маршрутами из $\mathcal{A}_2$. Итак, при $x \in X^{00}$ и $\beta \in \mathcal{A}_2$ полагаем, что

$$\mathbf{y}^*[x; \beta] \colon \overline{0, \mathbf{n} - N} \longrightarrow X$$

определяется следующими условиями:

$$(\mathbf{y}^*[x; \beta](0) \triangleq x) \& (\mathbf{y}^*[x; \beta](t) \triangleq m_{N+\beta(t)}\ \forall t \in \overline{1, \mathbf{n} - N}). \tag{3.2}$$

Тогда при $x \in X^{00}$ и $\beta \in \mathcal{A}_2$ определено значение

$$\hat{\mathfrak{C}}^*_\beta[x] \triangleq \sup(\{\max_{t \in \overline{1, \mathbf{n} - N}} \mathbf{c}^*(\mathbf{y}^*[x; \beta](t-1), \mathbf{y}^*[x; \beta](t), \beta^1(\overline{t, \mathbf{n} - N})); f(\mathbf{y}^*[x; \beta](\mathbf{n} - N))\}) \in \mathbb{R}_+ \tag{3.3}$$

(в (3.3) имеем частный случай [17, (3.6)]). С (3.3) мы связываем критерий $\mathcal{M}_2$-задачи. Итак, при $x \in X^{00}$ рассматриваем в ее качестве следующую $(\mathcal{M}_2, x)$-задачу:

$$\hat{\mathfrak{C}}^*_\beta[x] \longrightarrow \min, \quad \beta \in \mathcal{A}_2; \tag{3.4}$$

задаче (3.4) сопоставляем экстремум $\tilde{V}^*[x]$ и непустое множество $\mathcal{A}_2^*[x]$ всех оптимальных маршрутов:

$$\tilde{V}^*[x] \triangleq \min_{\beta \in \mathcal{A}_2} \hat{\mathfrak{C}}^*_\beta[x] \in \mathbb{R}_+, \tag{3.5}$$

$$\mathcal{A}_2^*[x] \triangleq \{\beta \in \mathcal{A}_2 \colon \hat{\mathfrak{C}}^*_\beta[x] = \tilde{V}^*[x]\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{A}_2).$$

Посредством (3.5) определяем функцию экстремума $\tilde{V}^*[\cdot] \triangleq (\tilde{V}^*[x])_{x \in X^{00}} \in \mathcal{R}_+[X^{00}]$. С помощью данной функции формируем терминальную компоненту критерия предваряющей задачи. Мы полагаем, что $\mathbb{X}^\natural \triangleq \{m_i \colon i \in \overline{1, N}\}$ и $\mathbf{X}^\natural \triangleq \mathbb{X}^\natural \cup X^0$, получая непустые конечные множества; тогда полагаем, что $\mathbf{f} \in \mathcal{R}_+[\mathbb{X}^\natural]$ имеет вид

$$(\mathbf{f}(x) \triangleq \tilde{V}^*[x]\ \forall x \in X^{00}) \& (\mathbf{f}(x) \triangleq 0\ \forall x \in \mathbb{X}^\natural \setminus X^{00}). \tag{3.6}$$

Кроме того, полагаем, что $\mathbf{c}^\natural \in \mathcal{R}_+[\mathbf{X}^\natural \times \mathbb{X}^\natural \times \mathfrak{N}^\natural]$, где $\mathfrak{N}^\natural \triangleq \mathcal{P}'(\overline{1, N})$, имеет вид

$$\mathbf{c}^\natural(z, K) \triangleq \mathbf{c}(z, K \cup \overline{N+1, \mathbf{n}}) \quad \forall z \in \mathbf{X}^\natural \times \mathbb{X}^\natural \quad \forall K \in \mathfrak{N}^\natural.$$

Введем в рассмотрение траектории в $\mathcal{M}_1$-задаче, стартующие из точек множества X^0 и согласованные с маршрутами из $\mathcal{A}_1$. Итак, при $x \in X^0$ и $\alpha \in \mathcal{A}_1$ полагаем, что

$$\mathbf{y}^\natural[x; \alpha] \colon \overline{0, N} \longrightarrow X$$

определяется следующими правилами:

$$(\mathbf{y}^\natural[x; \alpha](0) \triangleq x) \& (\mathbf{y}^\natural[x; \alpha](t) \triangleq m_{\alpha(t)}\ \forall t \in \overline{1, N}); \tag{3.7}$$

тогда определено (учитываем, что $m_{\alpha(N)} \in X^{00}$) следующее значение

$$\hat{\mathfrak{C}}_\alpha^\natural[x] \triangleq \sup(\{\max_{t\in\overline{1,N}} \mathbf{c}^\natural(\mathbf{y}^\natural[x;\alpha](t-1), \mathbf{y}^\natural[x;\alpha](t), \alpha^1(\overline{t,N})); \tilde{V}^*[\mathbf{y}^\natural[x;\alpha](N)]\}) \in \mathbb{R}_+. \quad (3.8)$$

При $x \in X^0$ рассматриваем следующую задачу курьера:

$$\hat{\mathfrak{C}}_\alpha^\natural[x] \longrightarrow \min, \quad \alpha \in \mathcal{A}_1, \quad (3.9)$$

которой сопоставляется экстремум $\tilde{V}^\natural[x]$ и непустое экстремальное множество $\mathcal{A}_1^\natural[x]$:

$$\tilde{V}^\natural[x] \triangleq \min_{\alpha\in\mathcal{A}_1} \hat{\mathfrak{C}}_\alpha^\natural[x] \in \mathbb{R}_+, \quad (3.10)$$

$$\mathcal{A}_1^\natural[x] \triangleq \{\alpha \in \mathcal{A}_1 \mid \hat{\mathfrak{C}}_\alpha^\natural[x] = \tilde{V}^\natural[x]\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{A}_1). \quad (3.11)$$

Посредством (3.10) определена функция экстремума $\mathcal{M}_1$-задачи

$$\tilde{V}^\natural[\cdot] \triangleq (\tilde{V}^\natural[x])_{x\in X^0} \in \mathcal{R}_+[X^0].$$

Наряду с $(\mathcal{M}_1, x)$-задачей рассматриваем постановку с оптимизацией точки старта:

$$\hat{\mathfrak{C}}_\alpha^\natural[x] \longrightarrow \min, \quad (x,\alpha) \in X^0 \times \mathcal{A}_1, \quad (3.12)$$

называем (3.12) предваряющей $\mathcal{M}_1$-задачей; ей сопоставляется экстремум $\mathbf{v}^\natural$ и (непустое) множество $\mathbf{S}^\natural$ оптимальных ДР:

$$\mathbf{v}^\natural \triangleq \min_{(x,\alpha)\in X^0\times\mathcal{A}_1} \hat{\mathfrak{C}}_\alpha^\natural[x] \in \mathbb{R}_+, \quad (3.13)$$

$$\mathbf{S}^\natural \triangleq \{(x,\alpha) \in X^0 \times \mathcal{A}_1 | \ \hat{\mathfrak{C}}_\alpha^\natural[x] = \mathbf{v}^\natural\} \in \mathcal{P}'(X^0 \times \mathcal{A}_1).$$

Полезно отметить проблему оптимизации старта в предваряющей задаче

$$\tilde{V}^\natural[x] \longrightarrow \min, \quad x \in X^0,$$

которой сопоставляется экстремум $\mathbf{v}^\natural$ (см. (3.10), (3.13)) и непустое множество $X_{\mathrm{opt}}^\natural$ всех оптимальных (в предваряющей $\mathcal{M}_1$-задаче) точек старта:

$$\mathbf{v}^\natural = \min_{x\in X^0} \tilde{V}^\natural[x] \in \mathbb{R}_+, \quad (3.14)$$

$$X_{\mathrm{opt}}^\natural \triangleq \{x \in X^0 | \ \tilde{V}^\natural[x] = \mathbf{v}^\natural\} \in \mathcal{P}'(X^0). \quad (3.15)$$

Теперь обсудим связь введенных экстремальных задач и более общих задач [17, §§ 2–6]. Итак, используемая конкретизация постановки [17] состоит в следующем (см. [17, § 8]): мегаполисы в [17] отождествляются с синглетонами $\{m_1\}, \ldots, \{m_\mathbf{n}\}$ (по сути дела с самими городами), а функции стоимости $c_1, \ldots, c_\mathbf{n}$ внутренних работ в смысле [17] полагаются тождественно равными нулю. При данном упрощении каждый пучок траекторий в [17], отвечающий фиксации старта и допустимого маршрута, является синглетоном, порождаемым УП с совпадающими элементами вида (2.8). С учетом того, что $\mathbf{c}$ и f в настоящих построениях соответствуют [17], мы получаем, что критерий основной задачи сводится к (2.11) (см. [17, (8.10)]). В силу вышеупомянутых соображений получаем, что при фиксации $x \in X^0$ экстремум [17, (8.11)] совпадает с (2.16). Итак, функция экстремума основной $\mathcal{M}$-задачи в [17] совпадает здесь с $\tilde{V}[\cdot] \triangleq (\tilde{V}[x])_{x\in X^0} \in \mathcal{R}_+[X^0]$ (см. (2.16)), то есть с функцией экстремума задачи курьера. Далее, из [17, (8.11)] и (2.13) вытекает, что глобальный экстремум $\mathbb{V}$ в [17] совпадает с $\mathbf{v}$ (см. [17, (8.13)]). Как следствие множество [17, (2.24)] совпадает с (2.18). Итак, основная $\mathcal{M}$-задача работы [17] сводится к (2.12) при очевидных переобозначениях. Заметим только, что $\mathbf{v}$ (2.13) «заменяет» $\mathbb{V}$ [17], а **sol** (2.14) «заменяет» [17, (2.22)].

Обсудим связь предваряющей и финальной задач в настоящей работе и в [17]. Начнем с последней задачи. Напомним, что в рассматриваемом случае $\{\{m_{N+j}\}: j \in \overline{1, \mathbf{n} - N}\}$ образует семейство «мегаполисов» финальной задачи. Если $x \in X^{00}$ и $\beta \in \mathcal{A}_2$, то пучок $\mathcal{Z}^*_\beta[x]$ [17, раздел 3] является синглетоном, единственный элемент $(z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}}$ которого порождается траекторией (3.2):

$$(z_0 = (x, x))\&(\ z_t = (m_{N+\beta(t)}, m_{N+\beta(t)})\ \forall t \in \overline{1, \mathbf{n} - N}); \tag{3.16}$$

критерий [17, (3.6)] для данного представления имеет (см. (3.3)) следующий вид:

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}^*_\beta[(z_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}-N}}] = \sup(\{\max_{t\in\overline{1,\mathbf{n}-N}} \mathbf{c}^*(\mathbf{y}^*[x;\beta](t-1), \mathbf{y}^*[x;\beta](t), \beta^1(\overline{t, \mathbf{n} - N}));\\ f(\mathbf{y}^*[x;\beta](\mathbf{n} - N))\}) = \hat{\mathfrak{C}}^*_\beta[x].\end{aligned} \tag{3.17}$$

Задача [17, (3.7)] сводится, стало быть, к (3.4). При этом $\tilde{V}^*[x]$ в [17, (3.8)] совпадает с (3.5). Соответственно и функция экстремума $\tilde{V}^*[\cdot]$ в [17, раздел 3] совпадает с функцией, определяемой в (3.5). Множество $(\mathrm{sol})^*[x]$ в [17, (3.9)] полностью определяется (см. (3.17)) маршрутами из $\mathcal{A}^*_2[x]$ (каждый такой маршрут следует при этом дополнить траекторией вида (3.16)). Итак, задача (3.4) полностью определяет [17, (3.7)].

В связи с конкретизацией предваряющей задачи в [17, раздел 3] заметим, что каждому старту $x \in X^0$ и маршруту $\alpha \in \mathcal{A}_1$ в качестве пучка траекторий $\mathcal{Z}^\natural_\alpha[x]$ [17, раздел 3] сопоставляется синглетон, единственный элемент $(\tilde{z}_t)_{t\in\overline{0,N}}$ которого порождается траекторией (3.7):

$$(\tilde{z}_0 = (x, x))\&(\tilde{z}_t = (m_{\alpha(t)}, m_{\alpha(t)})\ \forall t \in \overline{1, N});$$

соответственно, значение критерия $\mathfrak{C}^\natural_\alpha[(\tilde{z}_t)_{t\in\overline{0,N}}]$ [17, (3.13)] в нашем случае имеет вид (3.8):

$$\mathfrak{C}^\natural_\alpha[(\tilde{z}_t)_{t\in\overline{0,N}}] = \sup(\{\max_{t\in\overline{1,N}}[\mathbf{c}^\natural(\mathbf{y}^\natural[x;\alpha](t-1), \mathbf{y}^\natural[x;\alpha](t), \alpha^1(\overline{t, N}))]; \tilde{V}^*[\mathbf{y}^\natural[x;\alpha](N)]\}) = \hat{\mathfrak{C}}^\natural_\alpha[x], \tag{3.18}$$

где учитывается (3.7). Поэтому при $x \in X^0$ задача [17, (3.14)] сводится к (3.9); при этом значение $V^\natural[x]$ совпадает с $\tilde{V}^\natural[x]$ (3.10). Множество $(\mathrm{sol})^\natural[x]$ [17, раздел 3] полностью определяется маршрутами из $\mathcal{A}^\natural_1[x]$ (3.11). При этом (см. [17, (3.16)]) функция экстремума $V^\natural[\cdot]$ предваряющей задачи в смысле [17, раздел 3] совпадает с $\tilde{V}^\natural[\cdot]$. Следовательно, задача [17, (3.14)] полностью определяется посредством (3.9). Из (3.18) с учетом сказанного выше имеем (см. [17, (3.15), (3.17)]) (с учетом (3.14)) равенство $\mathbb{V}^\natural = \mathbf{v}^\natural$. Учитывая теперь [17, предложение 4.3], получаем цепочку равенств

$$\mathbf{v} = \mathbb{V} = \mathbf{v}^\natural \tag{3.19}$$

(равенство $\mathbf{v} = \mathbb{V}$ уже отмечалось ранее). Итак, конкретизация общих положений [17], приводящая к (3.19), завершена и мы рассмотрим сейчас детализацию общего алгоритма [17, § 4], придерживаясь конструкций [17, § 8]. Напомним основные этапы упомянутого алгоритма.

1) Построить множество X^{00} возможных точек старта $\mathcal{M}_2$-задачи (см. (3.1)).
2) Сформировать $\mathcal{M}_2$-задачу в виде системы $(\mathcal{M}_2, x)$-задач (3.4), $x \in X^{00}$.
3) Найти функцию экстремума $\tilde{V}^*[\cdot]$ $\mathcal{M}_2$-задачи (и слои функции Беллмана).

4) С использованием (3.5) сформировать терминальную компоненту критерия $\mathcal{M}_1$-задачи.

5) Сформировать $\mathcal{M}_1$-задачу в виде системы $(\mathcal{M}_1, x)$-задач (3.9), $x \in X^0$.

6) Найти функцию экстремума $\tilde{V}^\natural[\cdot]$ $\mathcal{M}_1$-задачи (и слои функции Беллмана), ее (полный) экстремум $\mathbf{v}^\natural$ (3.13) и экстремальное множество $X^\natural_{\mathrm{opt}}$ (3.15), либо какую-то его точку $x^0 \in X^\natural_{\mathrm{opt}}$.

7) Для выбранной точки $x^0 \in X^\natural_{\mathrm{opt}}$ построить (используя слои функции Беллмана $\mathcal{M}_1$-задачи) оптимальный маршрут $(\mathcal{M}_1, x^0)$-задачи (см. (3.11) при $x = x^0$), то есть маршрут $\alpha^\natural \in \mathcal{A}^\natural_1[x^0]$.

8) На траектории $\mathbf{y}^\natural[x^0; \alpha^\natural]$ зафиксировать финишную точку $x^{00} \in X^{00}$:

$$x^{00} = \mathbf{y}^\natural[x^0; \alpha^\natural](N).$$

9) Используя x^{00} в качестве точки старта в $\mathcal{M}_2$-задаче (и слои функции Беллмана $\mathcal{M}_2$-задачи), построить оптимальный маршрут α^* в $(\mathcal{M}_2, x^{00})$-задаче, то есть $\alpha^* \in \mathcal{A}^*_2[x^{00}]$.

10) Построить склеенный маршрут $\alpha^0 \overset{\triangle}{=} \alpha^\natural \Diamond \alpha^* \in \mathbf{P}$. Тогда УП (x^0, α^0) есть оптимальное (композиционное) решение в задаче (2.12), то есть $(x^0, \alpha^0) \in \mathbf{sol}$.

Обоснование оптимальности алгоритма 1)–10) извлекается из положений [17, § 4] с учетом конкретизаций, приведенных в [17, § 8]; см. также (3.19). Следует отметить, что наибольшую сложность здесь составляет реализация шагов 3), 6), где активно используется аппарат динамического программирования (ДП); см. [1, § 8]. Сейчас мы ограничимся кратким изложением соответствующей схемы.

§ 4. Динамическое программирование (краткая схема)

Рассмотрим общую логику раздельного применения ДП для решения основной задачи. Опускаем здесь вопросы, связанные с выводом уравнения Беллмана (см. [16]), и ограничиваемся алгоритмическим вариантом, ориентированным на практическое применение.

Динамическое программирование в $\mathcal{M}_2$-задаче. Используем множества $\hat{\mathbf{K}}_1$ и X^{00} (см. (3.1)). Далее, вводим отображение $\mathbf{I}^*$ [17, (5.1)], действующее в $\mathfrak{N}^*$, и семейство $\mathfrak{S}^* \in \mathcal{P}(\mathfrak{N}^*)$ всех существенных списков $\mathcal{M}_2$-задачи, определяемое в [17, § 5]. Существенные списки ранжируем по мощности, получая разбиение $\{\mathfrak{S}^*_1, \ldots, \mathfrak{S}^*_{\mathbf{n}-N}\}$ семейства $\mathfrak{S}^*$; см. также в [17, (5.3)] рекуррентную процедуру

$$\mathfrak{S}^*_{\mathbf{n}-N} \to \mathfrak{S}^*_{\mathbf{n}-N-1} \to \ldots \to \mathfrak{S}^*_1$$

с начальным элементом $\mathfrak{S}^*_{\mathbf{n}-N} = \{\overline{1, \mathbf{n} - N}\}$. Для построения слоев пространства позиций вводим сначала $\mathcal{M}^* \overset{\triangle}{=} \{m_{N+j} \colon j \in \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \mathbf{K}^*_2\}$, где $\mathbf{K}^*_2 \overset{\triangle}{=} \{\mathrm{pr}_1(z) \colon z \in \mathbf{K}_2\}$. Тогда

$$D^*_0 \overset{\triangle}{=} \{(x, \varnothing) \colon x \in \mathcal{M}^*\} = \{(m_{N+j}, \varnothing) : \ j \in \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \mathbf{K}^*_2\}$$

и $D^*_{\mathbf{n}-N} \overset{\triangle}{=} \{(x, \overline{1, \mathbf{n} - N}) \colon x \in X^{00}\}$ (введены крайние слои). Построение слоев $D^*_1, \ldots, \ldots, D^*_{\mathbf{n}-N-1}$ соответствует [17, (5.6), (5.7)]. При этом $D^*_s \neq \varnothing$ $\forall s \in \overline{0, \mathbf{n} - N}$ (см. [10, предложение 4.9.3]); $D^*_0 \subset \mathbf{X}^* \times \{\varnothing\}$, $D^*_j \subset \mathbf{X}^* \times \mathfrak{S}^*_j$ при $j \in \overline{1, \mathbf{n} - N}$. Слои функции Беллмана — суть в/з функции, определенные на непустых множествах D^*_s, $s \in \overline{0, \mathbf{n} - N}$.

Итак, определяем $v^*_0 \in \mathcal{R}_+[D^*_0]$ по правилу $v^*_0(x, \varnothing) \overset{\triangle}{=} f(x)$ $\forall x \in \mathcal{M}^*$. Далее применяются [16, (8.10)] и [17, (8.18)]: если $s \in \overline{1, \mathbf{n} - N}$ и $v^*_{s-1} \in \mathcal{R}_+[D^*_{s-1}]$ уже построено, то $v^*_s \in \mathcal{R}_+[D^*_s]$ задается правилом: при $(x, K) \in D^*_s$

$$v^*_s(x, K) \overset{\triangle}{=} \min_{j \in \mathbf{I}^*(K)} \sup(\{\mathbf{c}^*(x, m_{N+j}, K); v^*_{s-1}(m_{N+j}, K \setminus \{j\})\}).$$

Тогда $\tilde{V}^*[x] = v^*_{\mathbf{n}-N}(x, \overline{1, \mathbf{n}-N})$ при $x \in X^{00}$. Построенная функция экстремума $\tilde{V}^*[\cdot]$ реализует (см. (3.6)) терминальную компоненту критерия $\mathcal{M}_1$-задачи.

Динамическое программирование в $\mathcal{M}_1$-задаче. Полагаем, что отображение $\mathbf{I}^\natural$, действующее в $\mathfrak{N}^\natural$, определяется подобно [17, раздел 5]: при $K \in \mathfrak{N}^\natural$

$$\mathbf{I}^\natural(K) \triangleq K \setminus \{\mathrm{pr}_2(z) \colon z \in \Xi^\natural[K]\},$$

где $\Xi^\natural[K] \triangleq \{z \in \mathbf{K}_1 | \ (\mathrm{pr}_1(z) \in K)\&(\mathrm{pr}_2(z) \in K)\}$. Далее, посредством $\mathfrak{S}^\natural$ [17, (5.12)] определяем семейство всех существенных списков $\mathcal{M}_1$-задачи, а также (см. [17, § 5]) семейства $\mathfrak{S}^\natural_1, \ldots, \mathfrak{S}^\natural_N$, образующие в совокупности разбиение $\mathfrak{S}^\natural$ (см. в этой связи [17, (5.13)]). Далее, создаем слои $D^\natural_0, D^\natural_1, \ldots, D^\natural_N$ пространства позиций (см. [17, раздел 5]), где $D^\natural_0$ и $D^\natural_N$ определяются посредством [17, (5.14)] и при этом используется [17, (5.15)]. Отметим, что $D^\natural_s \neq \varnothing \ \forall s \in \overline{0, N}$. Наконец, создаем слои функции Беллмана. Существенно, что при $x \in X^{00}$

$$v^\natural_0(x, \varnothing) \triangleq \tilde{V}^*[x] = v^*_{\mathbf{n}-N}(x, \overline{1, \mathbf{n}-N}).$$

Дальнейшее построение $v^\natural_1, \ldots, v^\natural_N$ определяется рекуррентной процедурой: если $s \in \overline{1, N}$ и $v^\natural_{s-1} \in \mathcal{R}_+[D^\natural_{s-1}]$ уже построено, то $v^\natural_s \in \mathcal{R}_+[D^\natural_s]$ определяется тем условием, что при $(x, K) \in D^\natural_s$

$$v^\natural_s(x, K) \triangleq \min_{j \in \mathbf{I}^\natural(K)} \sup(\{\mathbf{c}^\natural(x, m_j, K); v^\natural_{s-1}(m_j, K \setminus \{j\})\}). \tag{4.1}$$

Тогда $v^\natural_N(x, \overline{1, N}) = \tilde{V}^\natural[x]$ при $x \in X^0$. Итак, указана процедура

$$(v^*_0 \to v^*_1 \to \ldots \to v^*_{\mathbf{n}-N}) \to (v^\natural_0 \to v^\natural_1 \to \ldots \to v^\natural_N) \tag{4.2}$$

построения слоев функции Беллмана. Заметим в связи с (4.2), что, как частный случай [17, (5.21)], мы имеем свойство

$$v^\natural_N(x, \overline{1, N}) = \tilde{V}^\natural[x] \ \ \forall x \in X^0. \tag{4.3}$$

Как следствие получаем с учетом (3.14) следующую цепочку равенств:

$$\mathbf{v}^\natural = \min_{x \in X^0} v^\natural_N(x, \overline{1, N}) = \mathbb{V}^\natural, \tag{4.4}$$

см. [17, (3.17)]. В силу (3.15), (4.3), (4.4) определяется экстремальное множество точек старта $\mathcal{M}_1$-задачи, то есть

$$X^\natural_{\mathrm{opt}} = \{x \in X^0 | v^\natural_N(x, \overline{1, N}) = \mathbf{v}^\natural\}. \tag{4.5}$$

Напомним теперь о положениях [17, предложения 4.1–4.3], установленных (в [17]) для более общей постановки. Так, в силу [17, предложение 4.3]

$$\mathbf{v}^\natural = \mathbb{V}^\natural = \mathbb{V} = \mathbf{v} \tag{4.6}$$

(мы учитываем, конечно, [17, (2.21), (8.13)]). Далее, из [17, (4.3)] вытекает (в нашем частном случае), что $\tilde{V}[x] = \tilde{V}^\natural[x] \ \forall x \in X^0$ (см. в этой связи (2.16), а также [17, (8.11), (8.20)]). С учетом (2.18), (4.3) и (4.5) имеем теперь, что

$$X^0_{\mathrm{opt}} = X^\natural_{\mathrm{opt}} = \{x \in X^0 | \ v^\natural_N(x, \overline{1, N}) = \mathbf{v}^\natural\}. \tag{4.7}$$

Из (4.6), (4.7) вытекает, что склеенная процедура (4.2) позволяет найти экстремум $\mathbf{v}$ (2.13) и экстремальное множество (2.18). Важно отметить, что в случае, когда нам достаточно найти $\mathbf{v}$ и X^0_{opt} и не требуется находить оптимальное композиционное решение (УП из множества (2.14)), реализацию (4.2) можно осуществить в режиме с перезаписью слоев (см. [16, замечание 2.1]). При этом достигается некоторая экономия ресурсов памяти вычислителя. Обсудим теперь вопрос, связанный с реализацией (2.19). Итак, приступая к построению оптимального композиционного решения, мы прежде всего выберем $x^0 \in X^0_{\text{opt}}$ (учитывается (4.7)). Далее используем конструкцию [17, (8.30)–(8.39)], доставляющую оптимальное композиционное решение (см. УП $(x^0, \xi\Diamond\eta)$ в [17, § 8]); в основе данной конструкции находится процедура (4.2) построения слоев функции Беллмана, которые в этом случае (то есть при построении оптимального композиционного решения) надо сохранять в памяти вычислителя.

§ 5. Пример

Рассмотрим пример минимаксной ЗК с оптимизацией точки старта. Полагаем в настоящем разделе $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (исследуем случай плоской задачи). Пусть $\mathbf{n} = 48$ и $N = 24$. Итак, на плоскости указаны 48 точек (2.1). Задано два кластера по 24 точки каждый:

$$|\mathcal{M}_1| = |\mathcal{M}_2| = 24.$$

Полагаем, что все 48 точек имеют ненулевую первую координату. Множество $\mathcal{M}_1$ образуют точки (2.1) с отрицательными значениями первой координаты, а множество $\mathcal{M}_2$ — точки (2.1) с положительными значениями этой координаты. Предполагаем, что условия предшествования в $\mathcal{M}_1$- и в $\mathcal{M}_2$-задаче отсутствуют, то есть $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_2 = \varnothing$. Итак, рассматривается весьма неудобный для наших конструкций вариант.

Пусть точки старта, образующие множество X^0, могут выбираться из границы прямоугольника, определяемого вершинами $(-65, 0)$ и $(91, 65)$ со сторонами, параллельными осям координат, с шагом 5. Значениями функции $\mathbf{c}$ являются евклидовы расстояния (зависимость от списка заданий отсутствует). Результат счета (экстремум) $\mathbf{v} = 19{,}866$; время счета 2 мин. 47 сек. Траектория оптимального композиционного решения приведена на рис. 1.

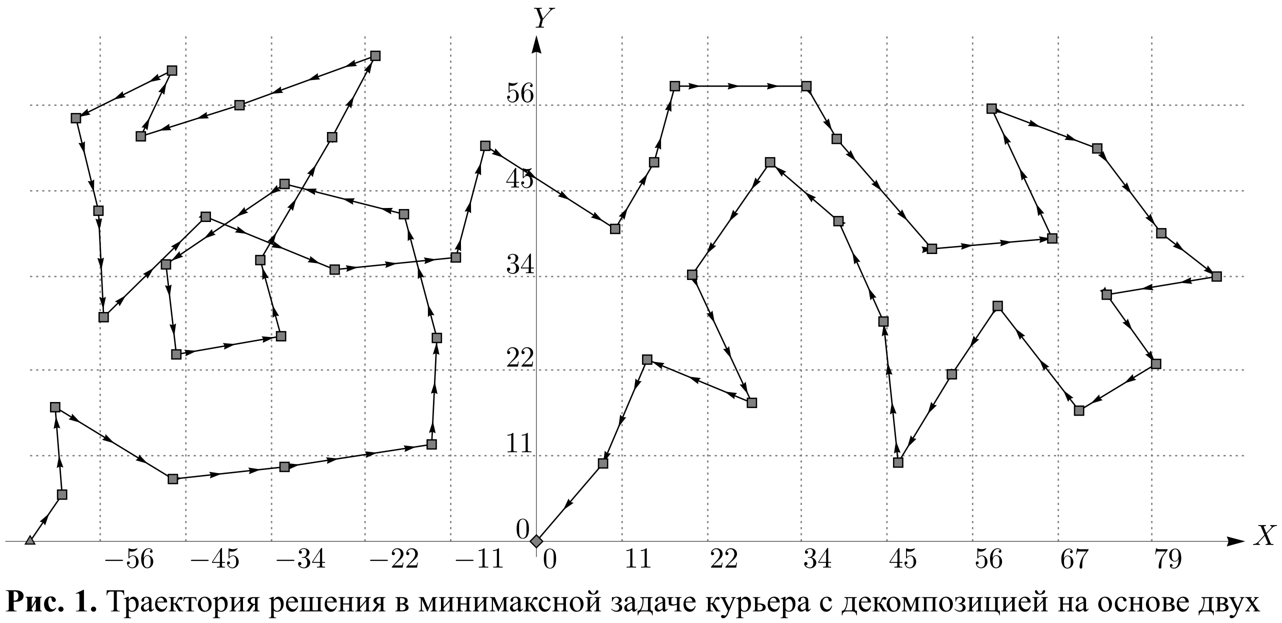

Рис. 1. Траектория решения в минимаксной задаче курьера с декомпозицией на основе двух кластеров заданий

Итак, по смыслу задачи найдено решение, обеспечивающее сначала посещение всех городов с отрицательной первой координатой, а затем — посещение всех городов с положительной первой координатой. Терминальная компонента соответствует перемещению из финишной точки финальной задачи в начало координат и оценивается евклидовой нормой вектора, отвечающего финишной точке. Заметим, что применяемая здесь декомпозиция по сути соответствует созданию «перекрестных» условий предшествования следующего вида: каждый город с отрицательной первой координатой должен посещаться раньше любого города с положительной первой координатой. Однако, применение декомпозиции в варианте [16, 17] представляется более предпочтительным, поскольку при этом реализуется раздельный вариант ДП в задачах умеренной размерности, что, как уже отмечалось, приводит к оптимальному композиционному решению за вполне приемлемое время вычислений.

§ 6. Алгоритм решения многоэтапной минимаксной задачи маршрутизации

В настоящем параграфе на содержательном уровне рассматривается естественное развитие алгоритма параграфа 3 на тот случай, когда кластеров заданий, образующих соответствующие частные задачи, может быть больше двух. Итак, речь пойдет здесь о многоэтапных маршрутных решениях, что в логическом отношении соответствует построениям [13, § 12] для «аддитивной» задачи. Мы сохраняем при этом предположения параграфа 2 в отношении

$$X,\ \mathbb{P},\ \mathbf{n},\ m_1,\ldots,m_{\mathbf{n}},\ N.$$

Пусть при этом $r \in \mathbb{N},\ 3 \leqslant r$ (случай $r = 2$ мы уже исследовали), и заданы числа

$$N_0 \in \overline{0,\mathbf{n}},\ N_1 \in \overline{1,\mathbf{n}},\ldots,N_r \in \overline{1,\mathbf{n}},$$

для которых $N_0 = 0,\ N_r = \mathbf{n}$ и, кроме того,

$$N_s + 2 \leqslant N_{s+1}\ \ \forall s \in \overline{0,r-1}.$$

Пусть при этом $\mathcal{M} \triangleq \{m_i \colon i \in \overline{1,\mathbf{n}}\}$ и, кроме того,

$$\mathcal{M}_j \triangleq \{m_i \colon i \in \overline{N_{j-1}+1,N_j}\}\ \ \forall j \in \overline{1,r}.$$

Тогда в виде $\{\mathcal{M}_j \colon j \in \overline{1,r}\}$ имеем разбиение множества $\mathcal{M}$ на зоны (кластеры). Очередность обслуживания самих кластеров предполагается естественной: сначала $\mathcal{M}_1$, потом $\mathcal{M}_2$ и так далее. Будем полагать, что в каждой зоне могут быть заданы свои условия предшествования. Итак, полагаем, что заданы множества

$$\mathbf{K}_1 \in \mathcal{P}(\overline{1,N_1} \times \overline{1,N_1}),\ \mathbf{K}_2 \in \mathcal{P}(\overline{1,N_2-N_1} \times \overline{1,N_2-N_1}),\ \ldots,$$
$$\mathbf{K}_r \in \mathcal{P}(\overline{1,N_r-N_{r-1}} \times \overline{1,N_r-N_{r-1}}),$$

элементы которых называем адресными парами. Итак,

$$\mathbf{K}_j \in \mathcal{P}(\overline{1,N_j-N_{j-1}} \times \overline{1,N_j-N_{j-1}})\ \forall j \in \overline{1,r}.$$

Полагаем далее, что при $j \in \overline{1,r}$ имеет место свойство

$$\forall \mathbf{K}^0 \in \mathcal{P}'(\mathbf{K}_j)\ \exists z^0 \in \mathbf{K}^0 \colon\ \mathrm{pr}_1(z^0) \neq \mathrm{pr}_2(z)\ \forall z \in \mathbf{K}^0.$$

Тогда, в частности, $\mathrm{pr}_1(z) \neq \mathrm{pr}_2(z)\ \forall j \in \overline{1,r}\ \forall z \in \mathbf{K}_j$. Множества адресных пар $\mathbf{K}_1,\ldots,\mathbf{K}_r$ задают условия предшествования; при этом в каждой из r частных задач возникает свое непустое множество маршрутов, допустимых по предшествованию. Итак, при $j \in \overline{1,r}$ и $\mathbb{P}_j \triangleq (\mathrm{bi})[\overline{1,N_j-N_{j-1}}]$

$$\mathcal{A}_j \triangleq \{\alpha \in \mathbb{P}_j |\ \alpha^{-1}(\mathrm{pr}_1(z)) < \alpha^{-1}(\mathrm{pr}_2(z))\ \forall z \in \mathbf{K}_j\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{P}_j). \tag{6.1}$$

Далее, мы осуществляем склеивание маршрутов, подобное (2.6). Учитываем при этом, что

$$(\overline{1,\mathbf{n}} = \bigcup_{j=1}^{r} \overline{N_{j-1}+1, N_j})\&(\overline{N_{p-1}+1, N_p} \cap \overline{N_{q-1}+1, N_q} = \varnothing \ \forall p \in \overline{1,r} \ \forall q \in \overline{1,r} \setminus \{p\}). \quad (6.2)$$

Следовательно, имеем конечное разбиение множества $\overline{1,\mathbf{n}}$. Введем склеивание частичных маршрутов: если $(\alpha_i)_{i\in\overline{1,r}} \in \prod\limits_{i=1}^{r} \mathcal{A}_i$, то

$$\coprod_{i=1}^{r} \alpha_i \colon \overline{1,\mathbf{n}} \longrightarrow \overline{1,\mathbf{n}}$$

определяем следующим условием (см. (6.2)): при $j \in \overline{1,r}$ и $k \in \overline{N_{j-1}+1, N_j}$

$$(\coprod_{i=1}^{r} \alpha_i)(k) \triangleq \alpha_j(k - N_{j-1}) + N_{j-1}; \quad (6.3)$$

тогда, как легко проверить,

$$\coprod_{i=1}^{r} \alpha_i \in \mathbb{P}. \quad (6.4)$$

Итак, в (6.3), (6.4) определено склеивание допустимых по предшествованию маршрутов. С учетом (6.1), (6.3) и (6.4) получаем, что

$$\mathbf{P} \triangleq \Big\{ \coprod_{i=1}^{r} \alpha_i \colon (\alpha_i)_{i\in\overline{1,r}} \in \prod_{i=1}^{r} \mathcal{A}_i \Big\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{P}). \quad (6.5)$$

В дальнейшем $\mathbf{P}$ понимается только в смысле (6.5). Итак, мы получили непустое множество всевозможных композиционных маршрутов. Следовательно, в нашей основной задаче в качестве ДР могут использоваться УП $(x,\alpha) \in X^0 \times \mathbf{P}$ и только они. При этом (2.8) определяет траектории, порожденные нашими ДР. Мы сохраняем предположения в отношении $\mathbb{X}$, $\mathbf{X}$ и $\mathfrak{N}$ (см. § 2), а также в отношении функции $\mathbf{c}$ (2.9). Далее, мы переопределяем множество $\bar{\mathbf{M}}$ параграфа 2: полагаем в дальнейшем, что

$$\bar{\mathbf{M}} \triangleq \{m_{N_{r-1}+j} \colon j \in \overline{1, \mathbf{n} - N_{r-1}}\} = \{m_k \colon k \in \overline{N_{r-1}+1, \mathbf{n}}\}. \quad (6.6)$$

Используем в дальнейшем f (2.10), где $\bar{\mathbf{M}}$ соответствует (6.6). Всюду в дальнейшем мы сохраняем определение (2.8) при $x \in X^0$ и $\gamma \in \mathbf{P}$, где, однако, $\mathbf{P}$ понимается в смысле (6.5). Итак, при $x \in X^0$ и $\gamma \in \mathbf{P}$, мы определяем траекторию $\mathbf{y}[x;\gamma]$, стартующую из x и согласованную с композиционным маршрутом γ; каждой УП $(x,\gamma) \in X^0 \times \mathbf{P}$ сопоставляется, как и прежде, значение $\pi[x;\gamma] \in \mathbb{R}_+$, определяемое правилом (2.11). Точно также мы приходим к задаче (2.12), где только $\mathbf{P}$ понимается в смысле (6.5). Сейчас мы сформулируем соответствующий алгоритм на функиональном уровне, следуя в идейном отношении построениям [3, § 12].

1') Для каждого $j \in \overline{1, r-1}$ полагаем $\tilde{\mathbf{K}}_j \triangleq \{\mathrm{pr}_1(z) \colon z \in \mathbf{K}_j\}$; с учетом этого формируем множество X_j^{00}, для чего предварительно вводим

$$m_s^{(j)} \triangleq m_{N_{j-1}+s} \quad \forall s \in \overline{1, N_j - N_{j-1}}. \quad (6.7)$$

Далее, при $j \in \overline{1, r-1}$ полагаем с учетом (6.7), что

$$X_j^{00} \triangleq \{m_s^{(j)} \colon s \in \overline{1, N_j - N_{j-1}} \setminus \tilde{\mathbf{K}}_j\}, \quad (6.8)$$

получая (в виде (6.8)) непустое п/м X. Рассматриваем X_j^{00} как множество возможных точек старта $\mathcal{M}_{j+1}$-задачи (задачи о посещении городов из множества $\mathcal{M}_{j+1}$).

2') Для $\mathcal{M}_r$-задачи создаем существенные списки (заданий), слои пространства позиций и слои функции Беллмана в $\mathcal{M}_r$-задаче по аналогии с параграфом 3 (см. также в этой связи [17, (5.6), (5.7)]). При этом X_{r-1}^{00} (см. (6.8)) определяет множество возможных точек старта $\mathcal{M}_r$-задачи. Рекуррентная процедура на основе ДП (см. § 3) доставляет функцию экстремума $\mathcal{M}_r$-задачи, определенную на X_{r-1}^{00} (имеется в виду зависимость, подобная (3.5)); упомянутая задача подобна всякий раз (при любом выборе $x \in X_{r-1}^{00}$) задаче (3.4). Данная функция экстремума порождает терминальную компоненту критерия $\mathcal{M}_{r-1}$-задачи подобно (3.6).

3') Пусть $j \in \overline{2, r-1}$ и функция экстремума $\mathcal{M}_{j+1}$-задачи уже построена. Определяем терминальную компоненту критерия $\mathcal{M}_j$-задачи по аналогии с (3.6) посредством функции экстремума $\mathcal{M}_{j+1}$- задачи. При этом, конечно, существенны значения терминальной компоненты на множестве X_j^{00}. Затем для $\mathcal{M}_j$-задачи последовательно создаем существенные списки заданий, слои пространства позиций и слои функции Беллмана, действуя по аналогии с построениями параграфа 4 (см., в частности, (4.1)). Последний слой упомянутой функции используем для построения терминальной компоненты критерия $\mathcal{M}_{j-1}$-задачи.

4') После выполнения процедуры пункта 3') для всех $\mathcal{M}_j$-задач, $j \in \overline{2, r-1}$, и получив, в частности, функцию экстремума $\mathcal{M}_2$-задачи, формируем подобно построениям параграфа 3 (см. (3.7)–(3.9)) систему $(\mathcal{M}_1, x)$-задач, $x \in X^0$, используя функцию экстремума $\mathcal{M}_2$-задачи для построения терминальной компоненты критерия. Определив функцию экстремума $\mathcal{M}_1$-задачи (и слои функции Беллмана), минимизируем ее значения на X^0 и находим соответствующую минимизирующую точку $x^0 \in X^0$ (x^0 доставляет минимум на X^0 упомянутой функции экстремума).

5') Используя слои функции Беллмана $\mathcal{M}_1$-задачи, посредством стандартной для теории ДП процедуры, подобной применяемой в [16, 17], конструируем оптимальное решение $\mathcal{M}_1$-задачи со стартом в x^0 в виде УП с элементами в виде маршрута и порожденной этим маршрутом траектории.

6') Если $k \in \overline{1, r-1}$ и уже построены последовательно оптимальные решения задач по обслуживанию кластеров $\mathcal{M}_j$, $j \in \overline{1, k}$, то фиксируем финишную точку на получившейся траектории $\mathcal{M}_k$-задачи (точку, отвечающую финальному значению упомянутой траектории). Принимаем данную точку в качестве стартовой в $\mathcal{M}_{k+1}$-задаче (здесь — аналогия с шагом 9) в двухкластерной задаче), после чего по стандартной для теории ДП процедуре конструируем оптимальное решение $\mathcal{M}_{k+1}$-задачи с упомянутым стартом.

7') После построения всех последовательно оптимальных решений $\mathcal{M}_j$-задач, $j \in \overline{1, r}$, реализуем их склеивание (фактически склеивание маршрутов (см. (6.3)), после чего однозначно определяется соответствующая траектория). Дополняя получившийся композиционный маршрут точкой x^0, получаем требуемое (композиционное) решение основной задачи.

Соответствующая детализация шагов 1')–7') реализуется по аналогии с построениями для двухкластерной задачи (см. §§ 2–4). Ограничимся сейчас рассмотрением примера решения задачи в случае $2 < r$.

Итак, рассмотрим плоскую (то есть $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$) задачу курьера при $\mathbf{n} = 100$ и $r = 5$. Полагаем, что в каждом кластере содержится 20 городов, подлежащих посещению, то есть $|\mathcal{M}_j| \equiv 20$; кроме того, пусть $|\mathbf{K}_j| \equiv 8$ (итак, каждая из частных задач включает условия предшествования, характеризуемые 8 адресными парами). Выделен прямоугольник, на границе которого размещаются точки из X^0; вершины прямоугольника суть векторы

$$(0, 0), (0, 180), (560, 180), (560, 0);$$

возможные точки старта выбираются на границе данного прямоугольника с шагом 10 (тем самым формируется X^0). Кластеры нумеруются слева направо и располагаются каждый в своей прямоугольной области. Значения функции $\mathbf{c}$ определяются евклидовыми расстояниями между городами. Значения (терминальной) функции f в произвольной точке из $\bar{\mathbb{M}}$ (6.6) определяются евклидовым расстоянием от данной точки до вектора (500,0).

Результаты счета. Найдены точка старта, композиционный маршрут и реализующаяся траектория вида (3.2), для которых значение критерия $41{,}259$. Выбрана точка старта (0,0). Время счета 7 сек.

На приводимых ниже рис. 2, 3 схематически указано действие условий предшествования в каждой из пяти частных задач и приведена траектория композиционного решения, построенного на основе алгоритма 1')–7').

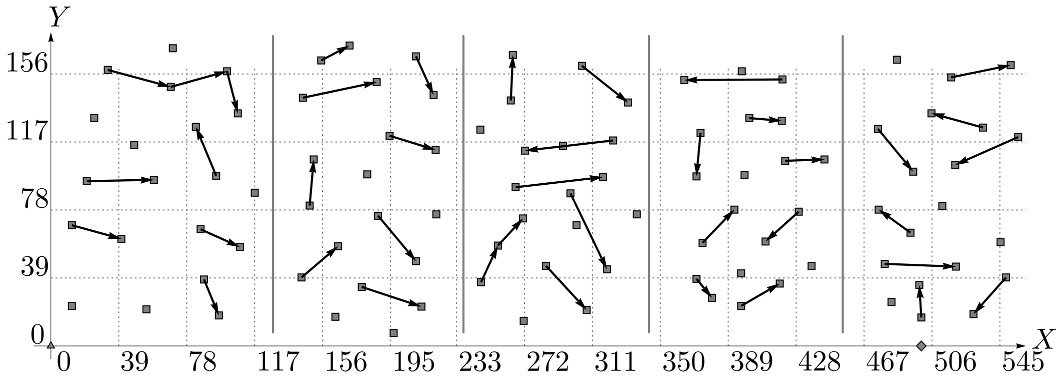

Рис. 2. Схема действия условий предшествования в задачах о посещении городов из множеств $\mathcal{M}_1,\ \mathcal{M}_2,\ \mathcal{M}_3; \mathcal{M}_4$ и $\mathcal{M}_5$

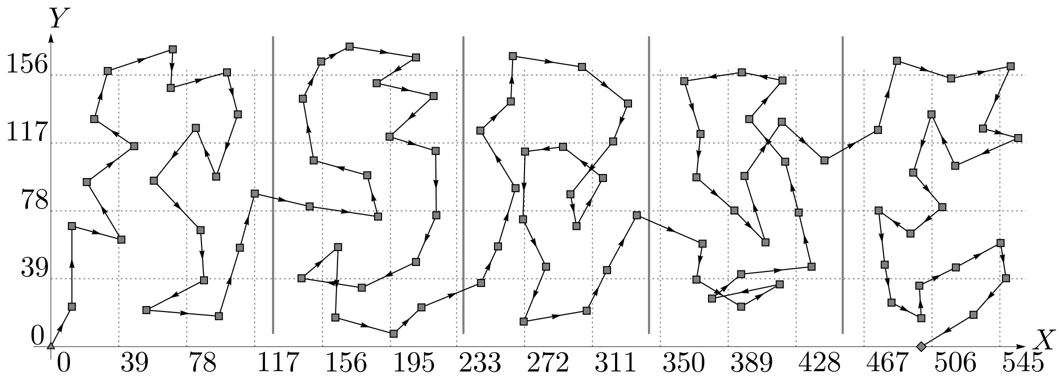

Рис. 3. Траектория композиционного решения в задаче с $\mathbf{n} = 100$ и $r = 5$

Заключение

В настоящей статье рассмотрен вопрос о построении композиционного решения минимаксной задачи курьера (то есть ЗК с условиями предшествования) с применением декомпозиций. Показано, что получаемые при этом решения находятся за вполне приемлемое время, а доставляемые этими решениями значения критерия могут при этом служить верхними оценками глобального экстремума. В наиболее простом случае декомпозиции основной задачи курьера в совокупность двух частичных задач (предваряющей и финальной) предлагаемое решение, определяемое при раздельном использовании ДП, является оптимальным в классе всех композиционных решений, а алгоритм, его доставляющий, обладает хорошим быстродействием.

Финансирование. Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения 075-02-2024-1377).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gutin G., Punnen A. P. The traveling salesman problem and its variations. New York: Springer, 2007. https://doi.org/10.1007/b101971
2. Cook W. J. In pursuit of the traveling salesman. Mathematics at the limits of computation. Princeton: Princeton University Press, 2012. https://zbmath.org/1236.00007
3. Гимади Э. Х., Хачай М. Ю. Экстремальные задачи на множествах перестановок. Екатеринбург: УМЦ УПИ, 2016.
4. Беллман Р. Применение динамического программирования к задаче о коммивояжере // Кибернетический сборник. М.: Мир, 1964. Т. 9. С. 219–228.
5. Хелд М., Карп Р. М. Применение динамического программирования к задачам упорядочения // Кибернетический сборник. М.: Мир, 1964. Т. 9. С. 202–218.
6. Литтл Дж., Мурти К., Суини Д., Кэрел К. Алгоритм для решения задачи о коммивояжере // Экономика и математические методы. 1965. Т. 1. Вып. 1. С. 94–107.
7. Меламед И. И., Сергеев С. И., Сигал И. Х. Задача коммивояжера. Вопросы теории // Автоматика и телемеханика. 1989. Вып. 9. С. 3–33. https://www.mathnet.ru/rus/at6414
8. Сергеев С. И. Гибридные системы управления и динамическая задача коммивояжера // Автоматика и телемеханика. 2008. Вып. 1. С. 45–54. https://www.mathnet.ru/rus/at589
9. Сергеев С. И. Алгоритмы решения минимаксной задачи коммивояжера. I. Подход на основе динамического программирования // Автоматика и телемеханика. 1995. Вып. 7. С. 144–150. https://mi.mathnet.ru/at3684
10. Ченцов А. Г. Экстремальные задачи маршрутизации и распределения заданий: вопросы теории. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008.
11. Петунин А. А., Ченцов А. Г., Ченцов П. А. Оптимальная маршрутизация инструмента машин фигурной листовой резки с числовым программным управлением. Математические модели и алгоритмы. Екатеринбург: УрФУ, 2020.
12. Ченцов А. Г., Ченцов П. А. Динамическое программирование в задаче маршрутизации: декомпозиционный вариант // Вестник российских университетов. Математика. 2022. Т. 27. Вып. 137. С. 95–124. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2022-27-137-95-124
13. Ченцов А. Г., Ченцов П. А. Экстремальная двухэтапная задача маршрутизации и процедуры на основе динамического программирования // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2022. Т. 28. № 2. С. 215–248. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2022-28-2-215-248
14. Ченцов А. Г., Ченцов П. А. Двухэтапное динамическое программирование в задаче маршрутизации с элементами декомпозиции // Автоматика и телемеханика. 2023. Вып. 5. С. 133–164. https://www.mathnet.ru/rus/at16064
15. Chentsov A. G., Chentsov P. A. Additive routing problem for a system of high-priority tasks // Mathematical optimization theory and operations research: Recent trends. Cham: Springer, 2023. P. 218–230. https://doi.org/10.1007/978-3-031-43257-6_17
16. Ченцов А. Г. Задача маршрутизации «на узкие места» с системой первоочередных заданий // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2023. Т. 61. С. 156–186. https://doi.org/10.35634/2226-3594-2023-61-09
17. Ченцов А. Г., Ченцов А. А. Минимаксная задача маршрутизации с системой первоочередных заданий // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2023. Т. 62. С. 96–124. https://doi.org/10.35634/2226-3594-2023-62-08
18. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М.: Мир, 1970.
19. Дьедонне Ж. Основы современного анализа. М.: Мир, 1964.
20. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р. Алгоритмы: построение и анализ. М.: МЦНМО, 2000.

Поступила в редакцию 26.04.2024

Принята к публикации 20.05.2024

Ченцов Александр Георгиевич, д. ф.-м. н., член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, 620108, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16;
профессор, Уральский федеральный университет, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6568-0703
E-mail: chentsov@imm.uran.ru

Ченцов Алексей Александрович, к. ф.-м. н., научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, 620108, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0646-9147
E-mail: chentsov.a@binsys.ru

Ченцов Павел Александрович, к. ф.-м. н., старший научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, 620108, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16;
старший научный сотрудник, Уральский федеральный университет, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3595-0607
E-mail: chentsov.p@mail.ru

Цитирование: А. Г. Ченцов, А. А. Ченцов, П. А. Ченцов. Задача маршрутизации «на узкие места» (оптимизация в пределах зон) // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2024. Т. 34. Вып. 2. С. 267–285.

VESTNIK UDMURTSKOGO UNIVERSITETA. MATEMATIKA. MEKHANIKA. KOMP'UTERNYE NAUKI
MATHEMATICS 2024. Vol. 34. Issue 2. Pp. 267–285.

A. G. Chentsov, A. A. Chentsov, P. A. Chentsov

The routing bottlenecks problem (optimization within zones)

Keywords: dynamic programming, route, precedence conditions.

MSC2020: 49L20, 90C39

DOI: 10.35634/vm240206

A minimax routing problem with decomposition elements is considered. In the simplest case, it is supposed that the whole set of tasks is divided into a sum of two subsets (clusters), and execution of tasks from the second subset can be started only after the completion of all tasks from the first subset. For above-mentioned two-cluster problem, an algorithm has been constructed for finding the optimal compositional solution, including a route (permutation of task indices) and a starting point, which is based on the use of a broadly understood dynamic programming. Based on this approach, an algorithm was also constructed to solve the routing problem in the case of an arbitrary ordered finite set of clusters. The algorithm was implemented on a PC, and a computational experiment was carried out. Possible applications may be associated with some logistics tasks in small aviation, when it is necessary to ensure visits to many points by one vehicle (airplane, helicopter) with a limited non-stop flight range.

Funding. The work was performed as part of research conducted in the Ural Mathematical Center with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Agreement number 075-02-2024-1377).

REFERENCES

1. Gutin G., Punnen A. P. *The traveling salesman problem and its variations*, New York: Springer, 2007. https://doi.org/10.1007/b101971
2. Cook W. J. *In pursuit of the traveling salesman. Mathematics at the limits of computation*, Princeton: Princeton University Press, 2012. https://zbmath.org/1236.00007
3. Gimadi E. Kh., Khachai M. Yu. *Ekstremal'nye zadachi na mnozhestvakh perestanovok* (Extreme problems on sets of permutations), Yekaterinburg: UMC UPI, 2016.
4. Bellman R. Dynamic programming treatment of the travelling salesman problem, *Journal of the ACM*, 1962, vol. 9, issue 1, pp. 61–63. https://doi.org/10.1145/321105.321111
5. Held M., Karp R. M. A dynamic programming approach to sequencing problems, *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 1962, vol. 10, issue 1, pp. 196–210. https://doi.org/10.1137/0110015
6. Little J. D. C., Murty K. G., Sweeney D. W., Karel C. An algorithm for the traveling salesman problem, *Operations Research*, 1963, vol. 11, no. 6, pp. 972–989. https://doi.org/10.1287/opre.11.6.972
7. Melamed I. I., Sergeev S. I., Sigal I. Kh. The traveling salesman problem. I: Theoretical issues, *Automation and Remote Control*, 1989, vol. 50, no. 9, pp. 1147–1173. https://zbmath.org/0705.90070
8. Sergeev S. I. Hybrid control systems and the dynamic traveling salesman problem, *Automation and Remote Control*, 2008, vol. 69, issue 1, pp. 42–51. https://doi.org/10.1134/S0005117908010050
9. Sergeev S. I. Algorithms for the minimax problem of the traveling salesman. I: An approach based on dynamic programming, *Automation and Remote Control*, 1995, vol. 56, no. 7, pt. 2, pp. 1027–1032. https://zbmath.org/0917.90252
10. Chentsov A. G. *Ekstremal'nye zadachi marshrutizatsii i raspredeleniya zadanii: voprosy teorii* (Extreme problems of routing and distribution of tasks: theoretical questions), Moscow–Izhevsk: Regular and Chaotic Dynamics, 2008.
11. Petunin A. A., Chentsov A. G., Chentsov P. A. *Optimal'naya marshrutizatsiya instrumenta mashin figurnoi listovoi rezki s chislovym programmnym upravleniem. Matematicheskie modeli i algoritmy* (Optimal tool routing on CNC sheet cutting machines. Mathematical models and algorithms), Yekateriburg: Ural Federal University, 2020.

12. Chentsov A. G., Chentsov P. A. Dynamic programming in the routing problem: decomposition variant, *Russian Universities Reports. Mathematics*, 2022, vol. 27, issue 137, pp. 95–124. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2022-27-137-95-124
13. Chentsov A. G., Chentsov P. A. An extremal two-stage routing problem and procedures based on dynamic programming, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 2, pp. 215–248 (in Russian). https://doi.org/10.21538/0134-4889-2022-28-2-215-248
14. Chentsov A. G., Chentsov P. A. Two-stage dynamic programming in the routing problem with decomposition, *Automation and Remote Control*, 2023, vol. 84, issue 5, pp. 609–632. https://doi.org/10.25728/arcRAS.2023.10.71.001
15. Chentsov A. G., Chentsov P. A. Additive routing problem for a system of high-priority tasks, *Mathematical optimization theory and operations research: Recent trends*, Cham: Springer, 2023, pp. 218–230. https://doi.org/10.1007/978-3-031-43257-6_17
16. Chentsov A. G. A bottleneck routing problem with a system of priority tasks, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2023, vol. 61, pp. 156–186. https://doi.org/10.35634/2226-3594-2023-61-09
17. Chentsov A. G., Chentsov A. A. Minimax routing problem with a system of priority tasks, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2023, vol. 62, pp. 96–124. https://doi.org/10.35634/2226-3594-2023-62-08
18. Kuratowski K., Mostowski A. *Set theory*, Amsterdam: North-Holland, 1967.
19. Dieudonné J. A. *Foundations of modern analysis*, New York: Academic Press, 1960. https://zbmath.org/0100.04201
20. Cormen T. H., Leiserson C. E., Rivest R. L. *Algoritmy: postroenie i analiz* (Introduction to algorithms), Moscow: Moscow Center for Continuous Mathematical Education, 2000.

Received 26.04.2024

Accepted 20.05.2024

Aleksandr Georgievich Chentsov, Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding Member, Russian Academy of Science, Chief Researcher, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620108, Russia;
Professor, Ural Federal University, ul. Mira, 19, Yekaterinburg, 620002, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6568-0703
E-mail: chentsov@imm.uran.ru

Alexei Aleksandrovich Chentsov, Candidate of Physics and Mathematics, Researcher, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620108, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0646-9147
E-mail: chentsov.a@binsys.ru

Pavel Aleksandrovich Chentsov, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620108, Russia;
Senior Researcher, Ural Federal University, ul. Mira, 19, Yekaterinburg, 620002, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3595-0607
E-mail: chentsov.p@mail.ru

Citation: A. G. Chentsov, A. A. Chentsov, P. A. Chentsov. The routing bottlenecks problem (optimization within zones), *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2024, vol. 34, issue 2, pp. 267–285.