ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ
МАТЕМАТИКА 2024. Т. 34. Вып. 2. С. 182–203.

УДК 517.982.22, 517.518.12

© *В. Н. Баранов, В. И. Родионов, А. Г. Родионова*

О БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ПРАВИЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ. АНАЛОГ ИНТЕГРАЛА РИМАНА–СТИЛТЬЕСА

В предыдущей работе авторов введено понятие правильной функции многих переменных $f\colon X \to \mathbb{R}$, где $X \subseteq \mathbb{R}^n$. В основе определения лежит понятие специального разбиения множества X и понятие колебания функции f на элементах разбиения. Пространство $\mathrm{G}(X)$ таких функций банахово по $\sup$-норме и является замыканием пространства ступенчатых функций. В настоящей работе определено и исследовано пространство $\mathrm{G}^F(X)$, отличающееся от $\mathrm{G}(X)$ тем, что здесь в определении правильных функций многих переменных вместо специальных разбиений фигурируют F-разбиения: их элементами являются измеримые по обобщенной мере Жордана (по мере m_F) непустые открытые множества. (Через F обозначена функция, порождающая меру m_F.) Во второй части работы определено понятие F-интегрируемости функций многих переменных. Доказано, что если X — это измеримое по мере m_F замыкание непустого открытого ограниченного множества $X_0 \subseteq \mathbb{R}^n$, а функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ интегрируема в смысле Римана–Стилтьеса относительно меры m_F, то она F-интегрируема. При этом значения кратных интегралов совпадают. Все функции из пространства $\mathrm{G}^F(X)$ являются F-интегрируемыми. Доказаны основные свойства F-интеграла Римана–Стилтьеса.

Ключевые слова: ступенчатая функция, правильная функция, обобщенная мера Жордана, интеграл Римана–Стилтьеса.

DOI: 10.35634/vm240202

Введение

Работа продолжает исследования [1]. Через $\mathrm{G}([a,b],\mathbb{B})$ обозначим пространство функций $f\colon [a,b] \to \mathbb{B}$, действующих из отрезка $[a,b]$ в банахово пространство $\mathbb{B}$ и таких, что существуют все односторонние пределы $f(x-0)$, $x \in (a,b]$, $f(x+0)$, $x \in [a,b)$. В англоязычной литературе подобные функции называются regulated functions, в русскоязычной их называют правильными [2, с. 197] (или простыми, или прерывистыми). В случае $\mathbb{B} = \mathbb{R}$ пишем $\mathrm{G}([a,b])$. Согласно [3, с. 16] справедливо

Утверждение 1. *Для функции* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *включение* $f \in \mathrm{G}([a,b])$ *имеет место тогда и только тогда, когда для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется разбиение* $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_r = b$ *такое, что* $\max\limits_{i=1,\ldots,r} \sup\limits_{x,y\in(x_{i-1},x_i)} |f(x)-f(y)| < \varepsilon$.

Замечание 1. Последнее условие означает, что колебание функции f на каждом интервале разбиения отрезка $[a,b]$ не превосходит ε.

Отметим основные направления, в рамках которых определены и используются обобщения правильных функций одной переменной. В работах [4, 5] фигурируют ограниченные правильные функции, определенные на неограниченных интервалах. В [6] определено и исследовано полное метрическое нелинейное пространство, состоящее из правильных функций, действующих из отрезка $[a,b]$ в расширенную числовую ось $\overline{\mathbb{R}}$. Оператор Немыцкого (оператор суперпозиции $F\colon x(\cdot) \to f(\cdot, x(\cdot))$), порожденный фиксированной функцией f и определенный в пространстве правильных функций, изучается в работах [7–10]. В них получены новые результаты о решениях обыкновенных дифференциальных и функционально-дифференциальных уравнений (уравнения ассоциированы с интегральными уравнениями, порожденными операторами вольтеррового типа, заданными через интегралы типа Курцвейля–Стилтьеса, см. [11]). В статьях [12,13] исследованы вопросы существования и выбора правильных функций в качестве решений для достаточно общего типа дифференциальных включений.

В [14] правильные функции многих переменных определены как функции, имеющие в каждой точке области определения пределы по всем направлениям, порожденным точками единичной сферы (так называемые «толстые» пределы). В своей предыдущей публикации [1] авторы настоящей работы предложили иное определение: понятие правильной функции многих переменных $f\colon X \to \mathbb{R}$, где $X \subseteq \mathbb{R}^n$, вводится на базе утверждения 1 и замечания 1. В основе определения лежит понятие специального разбиения множества X и понятие колебания функции f на элементах разбиения. Показано, что всякая функция, заданная и непрерывная на замыкании X непустого открытого ограниченного множества $X_0 \subseteq \mathbb{R}^n$, является правильной (принадлежит пространству $\langle \mathrm{G}(X), \|\cdot\|\rangle$). Доказана полнота пространства $\mathrm{G}(X)$ по sup-норме $\|\cdot\|$. Оно является замыканием пространства ступенчатых функций.

В настоящей работе определено и исследовано пространство $\mathrm{G}^F(X)$, отличающееся от пространства $\mathrm{G}(X)$ тем, что здесь вместо разбиений используются F-разбиения, элементами которых являются измеримые по обобщенной мере Жордана (по мере $m_{_F}$) непустые открытые множества. (Через F обозначена функция, называемая допустимой на множестве определения, порождающая меру $m_{_F}$.) Перечисленные выше свойства пространства $\mathrm{G}(X)$ переносятся на пространство $\mathrm{G}^F(X)$. Во второй части работы определено понятие F-интегрируемости функций многих переменных. Доказано, что если X — это измеримое по мере $m_{_F}$ замыкание непустого открытого ограниченного множества $X_0 \subseteq \mathbb{R}^n$, а функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ интегрируема в смысле Римана–Стилтьеса относительно меры $m_{_F}$, то она F-интегрируема. При этом значения кратных интегралов совпадают. Все функции из пространства $\mathrm{G}^F(X)$ являются F-интегрируемыми. В заключительной части работы доказаны основные свойства F-интеграла Римана–Стилтьеса, аналогичные свойствам интеграла Римана–Стилтьеса.

§ 1. Основные определения и вспомогательные утверждения

Через $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ обозначим совокупность всех непустых открытых множеств, определенных в пространстве $\mathbb{R}^n$. Замыкание множества $X \subseteq \mathbb{R}^n$ будем обозначать через $\overline{X}$, а совокупность всех его внутренних точек — через $\operatorname{int} X$.

Определение 1. Пусть $X_0 \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$, а множество X таково, что $X_0 \subseteq X \subseteq \overline{X}_0$. Система $\{X_1, \ldots, X_r\}$ множеств из $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ называется *$\mathcal{O}$-разбиением* множества X, если

(1) $X_i \cap X_j = \varnothing$ для всех $i, j = 1, \ldots, r$ таких, что $i \neq j$;

(2) $\bigcup\limits_{i=1}^{r} \overline{X}_i = \overline{X}$.

Замечание 2. $\mathcal{O}$-разбиения $\{X_1, \ldots, X_r\}$ и $\{Y_1, \ldots, Y_l\}$ множества X порождают множества $Z_{ij} \doteq X_i \cap Y_j$, $i \in I \doteq \{1, \ldots, r\}$, $j \in J \doteq \{1, \ldots, l\}$. Через $\mathcal{S}$ обозначим совокупность всех пар (i, j) таких, что $Z_{ij} \neq \varnothing$. Покажем, что система $\{\, Z_{ij}\}_{(i,j)\in\mathcal{S}}$ также является $\mathcal{O}$-разбиением множества X. Равенства $Z_{ij} \cap Z_{i'j'} = \varnothing$ при $(i, j) \neq (i', j')$ очевидны.

Обозначим $V \doteq \bigcup\limits_{j\in J} Y_j$ и $W \doteq \bigcup\limits_{(i,j)\in\mathcal{S}} Z_{ij}$. Легко убедиться, что $\overline{W} \subseteq \overline{X}$.

Обратно. Зафиксируем индекс $i \in I$ и точку $x \in X_i$. Так как X_i — открытое множество, то существует $\varepsilon > 0$ такое, что открытый шар $B_\varepsilon(x)$ радиуса ε с центром в точке x содержится в X_i. Пусть, далее, $\varepsilon_k \doteq \varepsilon/k$ при $k \in \mathbb{N}$. Очевидно, $B_{\varepsilon_k}(x) \subset X_i$ для всех k.

Зафиксируем $k \in \mathbb{N}$ и допустим, что $B_{\varepsilon_k}(x) \cap Y_j = \varnothing$ для всех $j \in J$. Тогда

$$B_{\varepsilon_k}(x) \cap V = B_{\varepsilon_k}(x) \cap \Big(\bigcup_{j \in J} Y_j \Big) = \bigcup_{j \in J} \big(B_{\varepsilon_k}(x) \cap Y_j \big) = \varnothing,$$

поэтому открытые множества $B_{\varepsilon_k}(x)$ и V не пересекаются, что приводит к противоречию: $x \notin \overline{V} = \bigcup\limits_{j \in J} \overline{Y}_j = \overline{X}$. Таким образом, для любого $k \in \mathbb{N}$ существует $j_k \in J$ такое, что $A_k \doteq B_{\varepsilon_k}(x) \cap Y_{j_k} \neq \varnothing$. Так как $B_{\varepsilon_k}(x) \subset X_i$, то $\varnothing \neq A_k \subset X_i \cap Y_{j_k} = Z_{i,j_k} \subset W$.

В каждом множестве A_k зафиксируем какую-нибудь точку x_k. Очевидно $x_k \in W$, а так как $x_k \in A_k \subseteq B_{\varepsilon_k}(x)$, то $x_k \to x$, $k \to \infty$. Следовательно, $x \in \overline{W}$. Это включение справедливо для всех $x \in X_i$, поэтому $X_i \subset \overline{W}$, $\overline{X}_i \subseteq \overline{W}$ и $\overline{X} = \bigcup\limits_{i \in I} \overline{X}_i \subseteq \overline{W}$.

Таким образом, $\overline{X} = \overline{W}$, поэтому $\overline{X} = \bigcup\limits_{(i,j) \in \mathcal{S}} \overline{Z}_{ij}$, что и требовалось установить.

Определение 2. Пусть $X_0 \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$, а множество X таково, что $X_0 \subseteq X \subseteq \overline{X}_0$. Ограниченная функция $h\colon X \to \mathbb{R}$ называется *кусочно-постоянной* (*ступенчатой*), если существует $\mathcal{O}$-разбиение $\{X_1, \ldots, X_r\}$ множества X такое, что при всех $i = 1, \ldots, r$ сужение функции h на множество X_i является функцией-константой на X_i.

Определение 3. Пусть $X_0 \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$, а множество X таково, что $X_0 \subseteq X \subseteq \overline{X}_0$. Ограниченная функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ называется *правильной*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\mathcal{O}$-разбиение $\{X_1, \ldots, X_r\}$ множества X такое, что $\max\limits_{i=1,\ldots,r} \omega(f; X_i) < \varepsilon$. Здесь и далее

$$\omega(f; Y) \doteq \sup_{x,y \in Y} |f(x) - f(y)|$$

— это *колебание* функции $f\colon Y \to \mathbb{R}$ на множестве $Y \subseteq \mathbb{R}^n$.

В соответствии с замечанием 2 сумма $f + g$ и произведение fg двух правильных функций $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ также являются правильными. (Аналогичное утверждение справедливо и для ступенчатых функций.) Пространство (алгебру) правильных функций $f\colon X \to \mathbb{R}$ будем обозначать через $\mathrm{G}(X)$. В нем определена норма

$$\|f\| \doteq \sup_{x \in X} |f(x)|. \tag{1}$$

Пусть $f \in \mathrm{G}(X)$ и $f_k \in \mathrm{G}(X)$, $k = 1, 2, \ldots$. Сходимость $f_k \to f$ по норме $\|\cdot\|$ эквивалентна равномерной (на X) сходимости $f_k \rightrightarrows f$, $k \to \infty$.

В работе [1] приведены примеры правильных функций. В частности, справедливо

Утверждение 2 (см. [1, утверждение 2]). *Пусть X_0 и X — ограниченные множества, $X_0 \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ и $X = \overline{X}_0$. Всякая непрерывная функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ является правильной.*

Справедливы следующие топологические свойства пространства правильных функций многих переменных.

Теорема 1 (см. [1, теорема 1]). *Пусть $X_0 \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$, а множество X таково, что $X_0 \subseteq X \subseteq \overline{X}_0$. Функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ является правильной тогда и только тогда, когда она является равномерным пределом некоторой последовательности $\{h_k\}$, состоящей из ступенчатых функций $h_k\colon X \to \mathbb{R}$.*

Следствие 1 (см. [1, следствие 1]). *Пусть $X_0 \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$, а множество X таково, что $X_0 \subseteq X \subseteq \overline{X}_0$. Если существует равномерный предел последовательности $\{f_k\}$, состоящей из правильных функций $f_k\colon X \to \mathbb{R}$, то он является правильной функцией.*

Теорема 2 (см. [1, теорема 2]). *Пусть $X_0 \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$, а множество X таково, что $X_0 \subseteq X \subseteq \overline{X}_0$. Пространство $\langle \mathrm{G}(X), \|\cdot\| \rangle$ является полным по норме (1).*

§ 2. Пространство F-правильных функций

Во вводной части параграфа обсуждаются множества, измеримые по обобщенной жордановой мере $m_{_F}$. Мы определяем эту меру не совсем традиционно, с помощью некоторой функции $F\colon \Pi \to \mathbb{R}$, определенной на n-мерном параллелепипеде Π.

2.1. Определения и утверждения (см. [15, с. 379]), связанные с мерой $m_{_F}$. В пространстве $\mathbb{R}^n$ определим отношение частичного порядка: для векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$ полагаем $x \preceq y$ тогда и только тогда, когда $x_i \leqslant y_i$ для всех $i \in N \doteq \{1, \dots, n\}$.

Пусть $B \doteq \{0, 1\}$ — булево множество. В B^n определим отношение частичного порядка: для векторов $\lambda, \kappa \in B^n$ полагаем $\lambda \prec \kappa$ тогда и только тогда, когда $\lambda_i \leqslant \kappa_i$ для всех $i \in N$. Через $|\lambda|$ обозначим количество единиц в кортеже $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in B^n$.

Если $x \preceq y$ и $\lambda \in B^n$, то полагаем $z_i^\lambda \doteq \lambda_i x_i + (1-\lambda_i) y_i$ для всех $i \in N$. Пусть, далее, $z_{xy}^\lambda \doteq (z_1^\lambda, \dots, z_n^\lambda)$. Очевидно, $x \preceq z_{xy}^\lambda \preceq y$ для всех $\lambda \in B^n$. Легко понять, что точки z_{xy}^λ, $\lambda \in B^n$, — это вершины n-мерного параллелепипеда, порожденного точками x и y.

Зафиксируем точки $a, b \in \mathbb{R}^n$ такие, что $a_i < b_i$ для всех $i \in N$. Пусть Π — это n-мерный параллелепипед $[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$, а $F\colon \Pi \to \mathbb{R}$ — некоторая функция. Если $x, y \in \Pi$ и $x \preceq y$, то полагаем

$$\mathbb{F}(x, y) \doteq \sum_{\lambda \in B^n} (-1)^{|\lambda|} F\big(\lambda_1 x_1 + (1-\lambda_1) y_1, \dots, \lambda_n x_n + (1-\lambda_n) y_n\big) = \sum_{\lambda \in B^n} (-1)^{|\lambda|} F(z_{xy}^\lambda). \quad (2)$$

Следующая цепочка равенств завершается ссылкой на формулу бинома:

$$\mathbb{F}(x, x) = F(x_1, \dots, x_n) \sum_{\lambda \in B^n} (-1)^{|\lambda|} = F(x_1, \dots, x_n) \sum_{|\lambda|=0}^{n} \binom{n}{|\lambda|} (-1)^{|\lambda|} = 0.$$

Функции, подобные $\mathbb{F}$, встречаются в исторических работах [16, 17] при определении функций многих переменных с ограниченной вариацией (элементов пространства $\mathrm{BV}(X)$, где $X \subseteq \mathbb{R}^n$), см. также [18, с. 63]. Это пространство встречается в современных работах как теоретического [19], так и прикладного [20] характера.

Определение 4. Будем называть функцию $F\colon \Pi \to \mathbb{R}$ *допустимой*, если

(1) $F(x) \geqslant 0$ для всех $x \in \Pi$;

(2) $F(x)\big|_{x_i = a_i} = 0$ для всех $x \in \Pi$ таких, что $x_i = a_i$ (при каждом $i \in N$);

(3) $F(x) \leqslant F(y)$ для всех $(x, y) \in \Pi^2$ таких, что $x \preceq y$;

(4) $\mathbb{F}(x, y) \geqslant 0$ для всех $(x, y) \in \Pi^2$ таких, что $x \preceq y$.

Через $\mathcal{F}(\Pi)$ обозначим совокупность всех допустимых функций $F\colon \Pi \to \mathbb{R}$.

Если, например, $F(x_1, \dots, x_n) \doteq \varphi_1(x_1) \cdot \ldots \cdot \varphi_n(x_n)$, где $\varphi_i\colon [a_i, b_i] \to \mathbb{R}$, $i \in N$, — неубывающие функции такие, что $\varphi_i(a_i) = 0$, то функция F удовлетворяет условиям (1)–(4). (Легко убедиться, что $\mathbb{F}(x, y) = [\varphi_1(y_1) - \varphi_1(x_1)] \cdot \ldots \cdot [\varphi_n(y_n) - \varphi_n(x_n)] \geqslant 0$.) Если $\Pi = [0, 1]^n$, $F(x_1, \dots, x_n) \doteq x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$, то $\mathbb{F}(x, y) = (y_1 - x_1) \cdot \ldots \cdot (y_n - x_n)$ — это объем n-мерного параллелепипеда, порожденного точками $x, y \in \Pi$ такими, что $x \preceq y$.

Для всех $(x, y) \in \Pi^2$ таких, что $x \preceq y$, полагаем

$$\Delta_{xy} = \Delta(x, y) \doteq [x_1, y_1) \times \ldots \times [x_n, y_n) = \big\{\xi \in \Pi\colon \xi_i \in [x_i, y_i)\ \forall i \in N\big\}. \quad (3)$$

Совокупность всех параллелепипедов Δ_{xy}, $(x, y) \in \Pi^2$, $x \preceq y$, обозначим через $D_{_\Pi}$.

Пусть $\mathcal{A}(D_{\Pi})$ — множество всех неотрицательных аддитивных функций $\alpha\colon D_{\Pi} \to \mathbb{R}$, определенных на множестве D_{Π} (о свойствах таких функций см. в [15, с. 379], в частности, считается, что $\alpha(\varnothing) = 0$ и $\alpha(\Delta_{xy}) \leqslant \alpha(\Delta_{x'y'})$ при $\Delta_{xy} \subseteq \Delta_{x'y'}$).

Функция $\alpha \in \mathcal{A}(D_{\Pi})$ порождает функцию $F(x) \doteq \alpha(\Delta_{ax})$, $x \in \Pi$. Покажем, что F — допустимая функция (то есть $F \in \mathcal{F}(\Pi)$). Действительно.

(1) Для любого $x \in \Pi$ справедливо $F(x) = \alpha(\Delta_{ax}) \geqslant 0$.

(2) Зафиксируем $x \in \Pi$ и $i \in N$. Без ограничения общности считаем, что $i = 1$. Обозначим $\theta \doteq [a_2, x_2) \times \ldots \times [a_n, x_n)$. При $y_1 \in [a_1, x_1]$ справедливо дизъюнктное объединение $[a_1, x_1) \times \theta = [a_1, y_1) \times \theta \cup [y_1, x_1) \times \theta$. В частности, $[a_1, x_1) \times \theta = [a_1, a_1) \times \theta \cup [a_1, x_1) \times \times\, \theta$. Сравнивая левую и правую части формулы, получаем, что $[a_1, a_1) \times \theta = \varnothing$, поэтому $\alpha([a_1, a_1) \times \theta) = 0$ или, что равносильно, $\alpha(\Delta_{ax}\big|_{x_1=a_1}) = 0$. Значит, $F(x)\big|_{x_1=a_1} = 0$.

(3) Поскольку $\Delta_{ax} = [a_1, x_1) \times \ldots \times [a_n, x_n) \subseteq [a_1, y_1) \times \ldots \times [a_n, y_n) = \Delta_{ay}$ для всех $(x, y) \in \Pi^2$ таких, что $x \preceq y$, то $\alpha(\Delta_{ax}) \leqslant \alpha(\Delta_{ay})$, поэтому $F(x) \leqslant F(y)$.

(4) Зафиксируем точки $x, y \in \Pi$ такие, что $x \preceq y$, кортеж $\lambda \in B^n$, и пусть

$$P^{\lambda}_{xy} \doteq \left\{ \xi \in \Pi \;\middle|\; \begin{matrix} \xi_i \in [a_i, x_i) \text{ при } \lambda_i = 1, \\ \xi_i \in [a_i, y_i) \text{ при } \lambda_i = 0 \end{matrix} \right\}, \qquad Q^{\lambda}_{xy} \doteq \left\{ \xi \in \Pi \;\middle|\; \begin{matrix} \xi_i \in [a_i, x_i) \text{ при } \lambda_i = 1, \\ \xi_i \in [x_i, y_i) \text{ при } \lambda_i = 0 \end{matrix} \right\}.$$

Покажем, что $P^{\lambda}_{xy} = R^{\lambda}_{xy}$, где $R^{\lambda}_{xy} \doteq \bigcup\limits_{\kappa \in B^n\colon \lambda \prec \kappa} Q^{\kappa}_{xy}$ — дизъюнктное объединение параллелепипедов Q^{κ}_{xy} (дизъюнктность очевидна). Пусть $\xi \in R^{\lambda}_{xy}$, тогда $\xi \in Q^{\kappa}_{xy}$ для некоторого $\kappa \in B^n$ такого, что $\lambda \prec \kappa$. Зафиксируем $i \in N$. В случае $\lambda_i = 1$ имеем $\kappa_i = 1$, поэтому $\xi_i \in [a_i, x_i)$. Если же $\lambda_i = 0$, то $\kappa_i \in B$, поэтому $\xi_i \in [a_i, x_i) \cup [x_i, y_i) = [a_i, y_i)$. Следовательно, $\xi \in P^{\lambda}_{xy}$. Обратно. Пусть $\xi \in P^{\lambda}_{xy}$ и $i \in N$. В двух случаях (при $\lambda_i = 1$ и при $\lambda_i = 0$, $\xi_i \in [a_i, x_i)$) полагаем $\kappa_i = 1$. Если же $\lambda_i = 0$, $\xi_i \in [x_i, y_i)$, то полагаем $\kappa_i = 0$. Следовательно, $\xi \in Q^{\kappa}_{xy}$, поэтому $\xi \in R^{\lambda}_{xy}$. Таким образом, $P^{\lambda}_{xy} = R^{\lambda}_{xy}$.

В соответствии с (3) и (2) справедливы две цепочки равенств:

$$\Delta(a, z^{\lambda}_{xy}) = \big\{\xi \in \Pi\colon \xi_i \in [a_i, \lambda_i x_i + (1-\lambda_i) y_i)\ \forall i \in N\big\} = P^{\lambda}_{xy} = \bigcup_{\kappa \in B^n\colon \lambda \prec \kappa} Q^{\kappa}_{xy},$$

$$\mathbb{F}(x, y) = \sum_{\lambda \in B^n} (-1)^{|\lambda|} F(z^{\lambda}_{xy}) = \sum_{\lambda \in B^n} (-1)^{|\lambda|} \alpha\big(\Delta(a, z^{\lambda}_{xy})\big) = \sum_{\lambda \in B^n} (-1)^{|\lambda|} \alpha(P^{\lambda}_{xy}),$$

а так как P^{λ}_{xy} и Q^{κ}_{xy} — параллелепипеды из D_{Π} и $\alpha\colon D_{\Pi} \to \mathbb{R}$ — аддитивная функция, то

$$\mathbb{F}(x, y) = \sum_{\lambda \in B^n} (-1)^{|\lambda|} \sum_{\kappa \in B^n\colon \lambda \prec \kappa} \alpha(Q^{\kappa}_{xy}) = \sum_{\kappa \in B^n} \alpha(Q^{\kappa}_{xy}) \Big[\sum_{\lambda \in B^n\colon \lambda \prec \kappa} (-1)^{|\lambda|} \Big].$$

В силу формулы бинома сумма, стоящая в квадратных скобках, не равна нулю в одном-единственном случае — при $\kappa = (0, \ldots, 0)$. В этом случае сумма равна единице и справедливо равенство $Q^{\kappa}_{xy} = \Delta_{xy}$, поэтому $\mathbb{F}(x, y) = \alpha(\Delta_{xy}) \geqslant 0$. Итак, $F \in \mathcal{F}(\Pi)$.

Предложение 1. *Отображение $\varphi\colon \mathcal{A}(D_{\Pi}) \to \mathcal{F}(\Pi)$, переводящее функцию $\alpha\colon D_{\Pi} \to \mathbb{R}$ в функцию $F\colon \Pi \to \mathbb{R}$ такую, что $F(x) = \alpha(\Delta_{ax})$, $x \in \Pi$, является биекцией.*

Доказательство. Инъективность отображения φ очевидна. Сюръективность. Функция $F \in \mathcal{F}(\Pi)$ порождает функцию α_F такую, что $\alpha_F(\Delta_{xy}) = \mathbb{F}(x, y)$, $\Delta_{xy} \in D_{\Pi}$. Покажем, что α_F является прообразом функции F.

Зафиксируем параллелепипед $\Delta_{xy} \in D_{\Pi}$, представимый в виде дизъюнктного объединения нескольких параллелепипедов из D_{Π}. Сначала предположим, что это объединение —

стандартное. А именно. Пусть $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$, и при каждом $i \in N$ зафиксированы разбиения $x_i = x_i^0 < x_i^1 < \ldots < x_i^{k_i} = y_i$. Они порождают «стандартное» дизъюнктное объединение параллелепипедов (применяем второе обозначение из определения (3)):

$$U \doteq \bigcup_{(r_1,\ldots,r_n)\in K_1\times\ldots\times K_n} \Delta\big((x_1^{r_1-1},\ldots,x_n^{r_n-1}),(x_1^{r_1},\ldots,x_n^{r_n})\big),$$

где $K_i \doteq \{1,\ldots,k_i\}$, $i \in N$. Очевидно, $U = \Delta_{xy}$. Имеет место равенство

$$\Sigma \doteq \sum_{(r_1,\ldots,r_n)\in K_1\times\ldots\times K_n} \alpha_F\Big(\Delta\big((x_1^{r_1-1},\ldots,x_n^{r_n-1}),(x_1^{r_1},\ldots,x_n^{r_n})\big)\Big)= \\ = \sum_{(r_1,\ldots,r_n)\in K_1\times\ldots\times K_n} \mathbb{F}\left((x_1^{r_1-1},\ldots,x_n^{r_n-1}),(x_1^{r_1},\ldots,x_n^{r_n})\right),$$

а в соответствии с (2) справедливо

$$\Sigma = \sum_{(r_1,\ldots,r_n)\in K_1\times\ldots\times K_n} \sum_{\lambda\in B^n} (-1)^{|\lambda|} F\big(\lambda_1 x_1^{r_1-1}+(1-\lambda_1)x_1^{r_1},\ \ldots\ ,\ \lambda_n x_n^{r_n-1}+(1-\lambda_n)x_n^{r_n}\big) = \\ = \sum_{\lambda\in B^n}\prod_{i=1}^{n}(-1)^{\lambda_i} \sum_{(r_1,\ldots,r_n)\in K_1\times\ldots\times K_n} F(w_1^{r_1},\ldots,w_n^{r_n}).$$

Воспользовались равенством $|\lambda| = \lambda_1+\ldots+\lambda_n$ и обозначениями $w_i^{r_i} \doteq \lambda_i x_i^{r_i-1}+(1-\lambda_i)x_i^{r_i}$, $i \in N$, $r_i \in K_i$. Справедливы равенства

$$\Sigma\big|_{\lambda_1=0}= \sum_{(\lambda_2,\ldots,\lambda_n)\in B^{n-1}}\prod_{i=2}^{n}(-1)^{\lambda_i} \sum_{\substack{r_1=1,\ldots,k_1\\(r_2,\ldots,r_n)\in K_2\times\ldots\times K_n}} F\big(x_1^{r_1},w_2^{r_2},\ldots,w_n^{r_n}\big),$$

$$\Sigma\big|_{\lambda_1=1}= -\sum_{(\lambda_2,\ldots,\lambda_n)\in B^{n-1}}\prod_{i=2}^{n}(-1)^{\lambda_i} \sum_{\substack{r_1=1,\ldots,k_1\\(r_2,\ldots,r_n)\in K_2\times\ldots\times K_n}} F\big(x_1^{r_1-1},w_2^{r_2},\ldots,w_n^{r_n}\big) = \\ = -\sum_{(\lambda_2,\ldots,\lambda_n)\in B^{n-1}}\prod_{i=2}^{n}(-1)^{\lambda_i} \sum_{\substack{r_1=0,\ldots,k_1-1\\(r_2,\ldots,r_n)\in K_2\times\ldots\times K_n}} F\big(x_1^{r_1},w_2^{r_2},\ldots,w_n^{r_n}\big).$$

Заменили переменную суммирования r_1 на $r_1' = r_1 - 1$ (после замены штрих не пишем). В результате массовых сокращений (по переменной r_1) получаем цепочку равенств

$$\Sigma = \Sigma\big|_{\lambda_1=0}+\Sigma\big|_{\lambda_1=1}= \sum_{(\lambda_2,\ldots,\lambda_n)\in B^{n-1}}\prod_{i=2}^{n}(-1)^{\lambda_i} \sum_{\substack{r_1=k_1\\(r_2,\ldots,r_n)\in K_2\times\ldots\times K_n}} F(x_1^{r_1},w_2^{r_2},\ldots,w_n^{r_n}) - \\ - \sum_{(\lambda_2,\ldots,\lambda_n)\in B^{n-1}}\prod_{i=2}^{n}(-1)^{\lambda_i} \sum_{\substack{r_1=0\\(r_2,\ldots,r_n)\in K_2\times\ldots\times K_n}} F(x_1^{r_1},w_2^{r_2},\ldots,w_n^{r_n}) = \\ = \sum_{\lambda\in B^n}(-1)^{|\lambda|} \sum_{(r_2,\ldots,r_n)\in K_2\times\ldots\times K_n} F(z_1^{\lambda},w_2^{r_2},\ldots,w_n^{r_n}).$$

Воспользовались равенствами: $x_1^{r_1} = x_1^{k_1} = y_1$ при $r_1 = k_1$, $x_1^{r_1} = x_1^0 = x_1$ при $r_1 = 0$

и $z_1^\lambda = \lambda_1 x_1 + (1-\lambda_1) y_1$. Аналогичным образом получаются равенства

$$\Sigma = \sum_{\lambda \in B^n} (-1)^{|\lambda|} \sum_{(r_3,\ldots,r_n) \in K_3 \times \ldots \times K_n} F(z_1^\lambda, z_2^\lambda, w_3^{r_3}, \ldots, w_n^{r_n}) =$$
$$= \ldots = \sum_{\lambda \in B^n} (-1)^{|\lambda|} \sum_{r_n \in K_n} F(z_1^\lambda, z_2^\lambda, \ldots, z_{n-1}^\lambda, w_n^{r_n}) =$$
$$= \sum_{\lambda \in B^n} (-1)^{|\lambda|} F(z_1^\lambda, z_2^\lambda, \ldots, z_n^\lambda) = \sum_{\lambda \in B^n} (-1)^{|\lambda|} F(z_{xy}^\lambda) = \mathbb{F}(x,y) = \alpha_F(\Delta_{xy}).$$

Таким образом, в случае стандартного дизъюнктного объединения параллелепипедов функция α_F аддитивна. Пусть, далее, объединение параллелепипедов — произвольное: $\Delta_{xy} = \bigcup_{\varkappa \in K} \Delta^\varkappa$, где $\Delta^\varkappa \doteq [\xi_1^\varkappa, \eta_1^\varkappa) \times \ldots \times [\xi_n^\varkappa, \eta_n^\varkappa)$, $\mathrm{card} K < \infty$. При каждом $i \in N$ сначала упорядочим по возрастанию элементы множества $\{\xi_i^\varkappa\}_{\varkappa \in K} \cup \{\eta_i^\varkappa\}_{\varkappa \in K}$, а затем переобозначим их: $x_i = x_i^0 < x_i^1 < \ldots < x_i^{k_i} = y_i$ (в случае повторяющихся чисел сохраняем лишь одно из них). Понятно, что Δ_{xy} и все параллелепипеды $\Delta^\varkappa$ представляют собой стандартные дизъюнктные объединения параллелепипедов $\Delta\big((x_1^{r_1-1}, \ldots, x_n^{r_n-1}), (x_1^{r_1}, \ldots, x_n^{r_n})\big)$, что доказывает аддитивность функции α_F в общем случае. $\square$

В соответствии с [15] конечные объединения

$$\sigma \doteq \bigcup_{(x,y) \in S} \Delta_{xy} \tag{4}$$

попарно непересекающихся параллелепипедов Δ_{xy} будем называть фигурами (множества S состоят из конечного числа пар $(x,y) \in \Pi^2$ таких, что $x \preceq y$).

Далее полагаем, что $F\colon \Pi \to \mathbb{R}$ — допустимая функция. Продолжим соответствующую ей функцию α_F с множества D_Π на произвольные полуоткрытые параллелепипеды Δ пространства $\mathbb{R}^n$, полагая $\alpha_F(\Delta) \doteq \alpha_F(\Pi \cap \Delta)$. Считаем $\alpha_F(\Delta) = 0$ для любого полуоткрытого параллелепипеда Δ из $\mathbb{R}^n$, не пересекающегося с Π. Понятно, что продолженная функция неотрицательна и аддитивна.

Продолжим функцию α_F на фигуры вида (4), полагая

$$\alpha_F(\sigma) \doteq \sum_{(x,y) \in S} \alpha_F(\Delta_{xy}) = \sum_{(x,y) \in S} \mathbb{F}(x,y) = \sum_{(x,y) \in S} \sum_{\lambda \in B^n} (-1)^{|\lambda|} F(z_{xy}^\lambda).$$

Заметим, что если $\sigma = \bigcup_{(x,y) \in S} \Delta_{xy} = \bigcup_{(x,y) \in S'} \Delta'_{xy}$, то $\sum_{(x,y) \in S} \alpha_F(\Delta_{xy}) = \sum_{(x,y) \in S'} \alpha_F(\Delta'_{xy})$, — понятно, что параллелепипеды Δ_{xy} и Δ'_{xy} представляют собой стандартные дизъюнктные объединения параллелепипедов вида $\Delta\big((x_1^{r_1-1}, \ldots, x_n^{r_n-1}), (x_1^{r_1}, \ldots, x_n^{r_n})\big)$. (Здесь следует рассуждать так же, как в заключительной стадии доказательства предложения 1.) Таким образом, величина $\alpha_F(\sigma)$ не зависит от представления фигуры σ.

Согласно [15] функция α_F, продолженная на совокупность всех фигур $\sigma \subseteq \Pi$, неотрицательна и аддитивна. Она порождает обобщенные меры Жордана (внутреннюю меру m_F^i и внешнюю меру m_F^e), определенные для произвольного множества $X \subseteq \Pi$:

$$m_F^i(X) \doteq \sup_{\sigma\colon \overline{\sigma} \subset \operatorname{int} X} \alpha_F(\sigma), \qquad m_F^e(X) \doteq \inf_{\sigma\colon \overline{X} \subset \operatorname{int} \sigma} \alpha_F(\sigma).$$

Числа $m_F^i(X)$ и $m_F^e(X)$ конечны и $0 \leqslant m_F^i(X) \leqslant m_F^e(X)$. В случае их равенства говорим, что множество X измеримо относительно обобщенной меры Жордана

$$m_F(X) \doteq m_F^i(X) = m_F^e(X).$$

Замечание 3. Со ссылкой на [15, с. 381] перечислим основные свойства меры $m_{_F}$:

(1) если $F(x_1,\ldots,x_n)\doteq x_1\cdot\ldots\cdot x_n$, то мера $m_{_F}$ превращается в меру Жордана;

(2) вместе с X и Y измеримыми относительно меры $m_{_F}$ являются множества $X\cup Y$, $X\cap Y$, $X\backslash Y$;

(3) если множества X и Y измеримы и $X\cap Y=\varnothing$, то $m_{_F}(X\cup Y)=m_{_F}(X)+m_{_F}(Y)$;

(4) если множества X и Y измеримы и $X\supseteq Y$, то $m_{_F}(X\backslash Y)=m_{_F}(X)-m_{_F}(Y)$, причем при $X=Y$ справедливо $m_{_F}(\varnothing)=0$;

(5) множество X измеримо относительно меры $m_{_F}$ тогда и только тогда, когда $m_{_F}(\partial X)=$ $=0$ (где ∂X — граница X);

(6) вместе с X измеримыми относительно меры $m_{_F}$ являются множества $\operatorname{int}X$, $\overline{X}$.

Пример 1. Пусть $\Pi\doteq[-1,1]$. Функция $F\colon\Pi\to\mathbb{R}$ такая, что $F(x)=1+x^3$, $x\in[-1,0)$, и $F(x)=2+x$, $x\in[0,1]$, является допустимой, и она порождает меру $m_{_F}$. Перечислим неизмеримые относительно этой меры отрезки $X\doteq[a,b]\subseteq\Pi$:

(1) при $a\in[-1,0)$ и $b=0$ справедливо $m^i_{_F}(X)=-a^3$ и $m^e_{_F}(X)=1-a^3$;

(2) при $a=b=0$ справедливо $m^i_{_F}(X)=0$ и $m^e_{_F}(X)=1$;

(3) при $a=0$ и $b\in(0,1]$ справедливо $m^i_{_F}(X)=b$ и $m^e_{_F}(X)=1+b$.

(Во всех этих случаях граница ∂X неизмерима. Уместно отметить, что неизмеримыми являются все множества $Y\subset\Pi$ такие, что $0\in\partial Y$.) Остальные отрезки X измеримы:

(4) при $a\in[-1,0)$ и $b\in[a,0)$ справедливо $m_{_F}(X)=b^3-a^3$;

(5) при $a\in[-1,0)$ и $b\in(0,1]$ справедливо $m_{_F}(X)=1+b-a^3$;

(6) при $a\in(0,1]$ и $b\in[a,1]$ справедливо $m_{_F}(X)=b-a$.

Пример 2. Пусть $\Pi\doteq[0,1]^2$. Функция $F\colon\Pi\to\mathbb{R}$ такая, что $F(x_1,x_2)=x_1x_2$ при $(x_1,x_2)\in$ $\in[0,1)^2$, $F(x_1,1)=2x_1$ при $x_1\in[0,1)$, $F(1,x_2)=2x_2$ при $x_2\in[0,1)$, $F(1,1)=4$, является допустимой, и она порождает меру $m_{_F}$. Перечислим неизмеримые относительно этой меры прямоугольники $X\doteq[a,b]\times[c,d]\subseteq\Pi$ (полагаем $(a,c)\in[0,1)^2$):

(1) если $b=1$, $d=1$, то $m^i_{_F}(X)=(1-a)(1-c)$ и $m^e_{_F}(X)=(2-a)(2-c)$;

(2) если $b=1$, $d\in[c,1)$, то $m^i_{_F}(X)=(1-a)(d-c)$ и $m^e_{_F}(X)=(2-a)(d-c)$;

(3) если $b\in[a,1)$, $d=1$, то $m^i_{_F}(X)=(b-a)(1-c)$ и $m^e_{_F}(X)=(b-a)(2-c)$.

Для любых $(b,d)\in[a,1)\times[c,1)$ прямоугольники X измеримы: $m_{_F}(X)=(b-a)(d-c)$.

Пример 3. Пусть $\Pi\doteq[0,1]^2$. Функция $F\colon\Pi\to\mathbb{R}$ такая, что $F(x_1,x_2)=x_1x_2$ при $(x_1,x_2)\in$ $\in[0,1)^2$, $F(x_1,1)=x_1+1$ при $x_1\in[0,1)$, $F(1,x_2)=x_2+1$ при $x_2\in[0,1)$, $F(1,1)=3$, является допустимой, и она порождает меру $m_{_F}$. Относительно этой меры все прямоугольники $X\doteq[a,b]\times[c,d]\subseteq\Pi$ измеримы: $m_{_F}(X)=(b-a)(d-c)$.

Если изменить функцию F, положив $F(1,1)=4$, то появятся неизмеримые относительно новой меры $m_{_F}$ прямоугольники $X\doteq[a,1]\times[c,1]$ такие, что $m^i_{_F}(X)=(1-a)(1-c)$ и $m^e_{_F}(X)=1+(1-a)(1-c)$. Все остальные прямоугольники измеримы и по новой мере.

2.2. Пространство $\mathrm{G}^F(X)$. Через $\mathcal{O}_{_F}(\mathbb{R}^n)$ обозначим подсемейство в $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$, состоящее из ограниченных множеств, измеримых по обобщенной жордановой мере $m_{_F}$. Определенное ниже пространство $\mathrm{G}^F(X)$ отличается от $\mathrm{G}(X)$ тем, что в его определении вместо $\mathcal{O}$-разбиений фигурируют F-разбиения, элементы которых — измеримые относительно меры $m_{_F}$ открытые множества (то есть они принадлежат совокупности $\mathcal{O}_{_F}(\mathbb{R}^n)$). Например, интервалы $(-1,0)$ и $(0,1)$ принадлежат совокупности $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$, но не принадлежат $\mathcal{O}_{_F}(\mathbb{R}^n)$ (с функцией F из примера 1).

Замечание 4. Все множества $X \in \mathcal{O}_F(\mathbb{R}^n)$ открыты, ограничены и $m_F(\partial X) = 0$, а дизъюнктное объединение $\overline{X} = X \cup \partial X$ порождает равенство $m_F(\overline{X}) = m_F(X)$. (Уместно отметить, что множества ∂X и $\overline{X}$ измеримы относительно меры m_F и ограничены.)

Пусть $X_0 \in \mathcal{O}_F(\mathbb{R}^n)$, а множество X таково, что $X_0 \subseteq X \subseteq \overline{X}_0$. Так как $X \backslash X_0 \subseteq \partial X_0$ и $m_F(\partial X_0) = 0$, то $m_F(X \backslash X_0) = 0$, следовательно, $m_F(X) = m_F(X_0)$ $(= m_F(\overline{X}_0))$.

Определение 5. Пусть $X_0 \in \mathcal{O}_F(\mathbb{R}^n)$, а множество X таково, что $X_0 \subseteq X \subseteq \overline{X}_0$. Система $\{X_1, \ldots, X_r\}$ множеств из $\mathcal{O}_F(\mathbb{R}^n)$ называется F*-разбиением* множества X, если

(1) $X_i \cap X_j = \varnothing$ для всех $i, j = 1, \ldots, r$ таких, что $i \neq j$;

(2) $\bigcup\limits_{i=1}^{r} \overline{X}_i = \overline{X}$.

Замечание 5. F-разбиения $\{X_1, \ldots, X_r\}$ и $\{Y_1, \ldots, Y_l\}$ множества X порождают множества $Z_{ij} \doteq X_i \cap Y_j$, $i = 1, \ldots, r$, $j = 1, \ldots, l$. Через $\mathcal{S}$ обозначим совокупность всех пар (i, j) таких, что $Z_{ij} \neq \varnothing$. Система $\{Z_{ij}\}_{(i,j)\in\mathcal{S}}$ также является F-разбиением множества X (для доказательства этого утверждения следует повторить выкладки из замечания 2).

Определение 6. Пусть $X_0 \in \mathcal{O}_F(\mathbb{R}^n)$, а множество X таково, что $X_0 \subseteq X \subseteq \overline{X}_0$. Ограниченная функция $h\colon X \to \mathbb{R}$ называется F*-ступенчатой*, если существует F-разбиение $\{X_1, \ldots, X_r\}$ множества X такое, что при всех $i = 1, \ldots, r$ сужение функции h на множество X_i является функцией-константой на X_i.

Пример 4. В условиях примера 1 ступенчатая (см. определение 2) функция $h\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ такая, что $h(x) = -1$ при $x \in [-1, 0)$ и $h(x) = 1$ при $x \in [0, 1]$, не является F-ступенчатой. Допустим противное. Тогда существует F-разбиение $\{X_1, \ldots, X_r\}$ отрезка $[-1, 1]$, удовлетворяющее условиям определения 6. Для него справедливы следующие утверждения. Во-первых, $r \geqslant 2$, а во-вторых, существуют индексы $i, j \in \{1, \ldots, r\}$ такие, что $X_i \subset [-1, 0)$ и $X_j \subset [0, 1]$, причем $0 \in \partial X_i$ и $0 \in \partial X_j$. В силу комментариев в примере 1 и замечания 3 оба множества не измеримы относительно меры m_F, поэтому $X_i, X_j \notin \mathcal{O}_F(\mathbb{R}^n)$, — противоречие.

Определение 7. Пусть $X_0 \in \mathcal{O}_F(\mathbb{R}^n)$, а множество X таково, что $X_0 \subseteq X \subseteq \overline{X}_0$. Ограниченная функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ называется F*-правильной*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует F-разбиение $\{X_1, \ldots, X_r\}$ множества X такое, что $\max\limits_{i=1,\ldots,r} \omega(f; X_i) < \varepsilon$.

В соответствии с замечанием 5 сумма $f+g$ и произведение fg двух F-правильных функций $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ также являются F-правильными. (Аналогичное утверждение имеет место и для F-ступенчатых функций.) Пространство (алгебру) F-правильных функций $f\colon X \to \mathbb{R}$ будем обозначать через $\mathrm{G}^F(X)$. В нем определена норма (1).

Пусть $f \in \mathrm{G}^F(X)$ и $f_k \in \mathrm{G}^F(X)$, $k = 1, 2, \ldots$. Сходимость $f_k \to f$ по этой норме эквивалентна равномерной сходимости $f_k \rightrightarrows f$, $k \to \infty$.

Доказательство каждого из перечисленных ниже четырех утверждений во многом повторяет доказательство аналогичных утверждений из параграфа 1 (их полное доказательство см. в [1]: утверждение 1, теоремы 1 и 2, следствие 1). Следует лишь заменить термины «$\mathcal{O}$-разбиение», «ступенчатая функция» и «правильная функция» на термины «F-разбиение», «F-ступенчатая функция» и «F-правильная функция» соответственно, множество $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ — на $\mathcal{O}_F(\mathbb{R}^n)$, а пространство $\mathrm{G}(X)$ — на $\mathrm{G}^F(X)$.

Утверждение 3. *Пусть множества X_0 и X таковы, что $X_0 \in \mathcal{O}_F(\mathbb{R}^n)$, а $X = \overline{X}_0$. Всякая непрерывная функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ является F-правильной.*

Теорема 3. *Пусть* $X_0 \in \mathcal{O}_{F}(\mathbb{R}^n)$, *а множество* X *таково, что* $X_0 \subseteq X \subseteq \overline{X}_0$. *Функция* $f\colon X \to \mathbb{R}$ *является* F*-правильной тогда и только тогда, когда она является равномерным пределом некоторой последовательности* $\{h_k\}$, *состоящей из* F*-ступенчатых функций* $h_k\colon X \to \mathbb{R}$.

Следствие 2. *Пусть* $X_0 \in \mathcal{O}_{F}(\mathbb{R}^n)$, *а множество* X *таково, что* $X_0 \subseteq X \subseteq \overline{X}_0$. *Если существует равномерный предел последовательности* $\{f_k\}$, *состоящей из* F*-правильных функций* $f_k\colon X \to \mathbb{R}$, *то он является* F*-правильной функцией.*

Теорема 4. *Пусть* $X_0 \in \mathcal{O}_{F}(\mathbb{R}^n)$, *а множество* X *таково, что* $X_0 \subseteq X \subseteq \overline{X}_0$. *Пространство* $\langle \mathrm{G}^F(X), \|\cdot\|\rangle$ *является полным по норме* (1).

§ 3. F-интегрирование функций. Аналог интеграла Римана–Стилтьеса

Во вводной части настоящего параграфа мы напоминаем определение интеграла Римана–Стилтьеса, а основная часть параграфа посвящена его обобщению.

3.1. Интеграл Римана–Стилтьеса (см. [15, с. 383]). Зафиксируем допустимую функцию $F\colon \Pi \to \mathbb{R}$, где $\Pi \doteq [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$. Пусть $X \subseteq \Pi$ — непустое множество, измеримое относительно меры m_{F}, $r \in \mathbb{N}$ и $I \doteq \{1, \ldots, r\}$.

Система $\{X_i\}_{i\in I}$, состоящая из непустых измеримых относительно меры m_{F} множеств, называется разбиением множества X, если, во-первых, $\bigcup\limits_{i\in I} X_i = X$, а во-вторых, $X_i \cap X_j \subseteq$ $\subseteq \partial X_i \cup \partial X_j$ для всех $i, j \in I$ таких, что $i \neq j$.

Замечание 6. Для любого $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ определено число $\operatorname{diam} Y \doteq \sup \varrho(x, y)$ (как элемент расширенной числовой оси $\overline{\mathbb{R}}$), где $x, y \in Y$, а ϱ — евклидова метрика в $\mathbb{R}^n$.

Зафиксируем $X \subseteq \Pi$, функцию $f\colon X \to \mathbb{R}$, разбиение $\{X_i\}_{i\in I}$ множества X, точки $\{x_i\}_{i\in I}$ такие, что $x_i \in X_i$, и составим интегральную сумму Римана–Стилтьеса

$$\Sigma = \Sigma\big(f, \{X_i\}_{i\in I}, \{x_i\}_{i\in I}\big) \doteq \sum_{i\in I} f(x_i)\, m_{F}(X_i). \tag{5}$$

Число $\mathcal{I} \in \mathbb{R}$ называется интегралом Римана–Стилтьеса от функции f на множестве X, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $\big|\Sigma - \mathcal{I}\big| < \varepsilon$, каково бы ни было разбиение $\{X_i\}_{i\in I}$ множества X такое, что $\max\limits_{i\in I} \operatorname{diam} X_i < \delta$, и каковы бы ни были точки $\{x_i\}_{i\in I}$ такие, что $x_i \in X_i$. В этом случае функцию f называем интегрируемой на множестве X (в смысле Римана–Стилтьеса) и пишем

$$\mathcal{I} = (RS)\int_X f(\cdot)\, dm_{F}. \tag{6}$$

Предложение 2 (аналог теоремы Лебега, [15, с. 384]). *Ограниченная функция* $f\colon X \to \mathbb{R}$ *интегрируема в смысле Римана–Стилтьеса на непустом компактном множестве* X, *измеримом относительно меры* m_{F}, *тогда и только тогда когда множество ее точек разрыва имеет лебегову* (*относительно аддитивной функции* α_{F}) *меру нуль.*

Следствие 3. *Если в условиях предложения* (2) *функция* f *непрерывна, то она интегрируема в смысле Римана–Стилтьеса относительно меры* m_{F}, *какова бы ни была допустимая на множестве* Π *функция* F.

Действительно, пустое множество точек разрыва функции f имеет лебегову меру нуль, поэтому она интегрируема в смысле Римана–Стилтьеса.

Пример 5. Зафиксируем допустимую функцию $F\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ из примера 1 и точку $c \in [-1,1]$. Согласно [15, с. 396] одноточечное множество $\{c\}$ измеримо относительно обобщенной лебеговой меры (меры μ_F) и его мера равна внешней жордановой мере: $\mu_F(\{c\}) = m_F^e(\{c\})$. Очевидно, $\mu_F(\{0\}) = m_F^e(\{0\}) = 1$ и $\mu_F(\{c\}) = m_F^e(\{c\}) = 0$ при $c \neq 0$. Таким образом, всякая разрывная в нуле функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ (где X — непустой компакт в $[-1,1]$ такой, что $0 \in X$) не интегрируема по мере m_F в смысле Римана–Стилтьеса.

Замечание 7. Справедливо следующее следствие из теоремы Лебега. В соответствии с [15, с. 396] из жордановой измеримости (относительно аддитивной функции α_F) непустого компактного множества X следует его лебегова измеримость (относительно этой же функции). Таким образом, если у ограниченной функции $f\colon X \to \mathbb{R}$ множество точек разрыва имеет обобщенную жорданову меру нуль (а значит, и обобщенная лебегова мера равна нулю), то функция интегрируема в смысле Римана–Стилтьеса

3.2. F-интеграл Римана–Стилтьеса. В основной части параграфа приведены определение и утверждения, связанные с обобщенным интегралом Римана–Стилтьеса.

Замечание 8. Пусть $X_0 \in \mathcal{O}_F(\mathbb{R}^n)$, а множество X таково, что $X_0 \subseteq X \subseteq \overline{X}_0$. Пусть, далее, $r \in \mathbb{N}$, $I \doteq \{1,\ldots,r\}$, $I_0 \doteq \{0\} \cup I$ и $\{X_i\}_{i\in I}$ — F-разбиение множества X. Для всех $i \in I_0$ справедливо $X_i \in \mathcal{O}_F(\mathbb{R}^n)$, $X_i \cap \partial X_i = \varnothing$ и $X_i \cup \partial X_i = \overline{X}_i$. Кроме того,

$$\overline{X}_0 = \bigcup_{i\in I} \overline{X}_i = \Big[\bigcup_{i\in I} X_i\Big] \cup \Big[\bigcup_{i\in I} \partial X_i\Big] = \Big[\bigcup_{i\in I} X_i\Big] \cup \Gamma,$$

где $\Gamma \doteq \bigcup\limits_{i\in I} \partial X_i$. В соответствии с замечанием 4 справедливо следующее утверждение. Поскольку $m_F(\partial X_i) = 0$ для всех $i \in I$, то $m_F(\Gamma) = 0$, следовательно,

$$m_F(X_0) = m_F(X) = m_F(\overline{X}_0) = m_F\Big(\bigcup_{i\in I} X_i\Big) = \sum_{i\in I} m_F(X_i). \tag{7}$$

Пусть $X_0 \in \mathcal{O}_F(\mathbb{R}^n)$, а множество X таково, что $X_0 \subseteq X \subseteq \overline{X}_0$. Пусть, далее, $r \in \mathbb{N}$ и $I \doteq \{1,\ldots,r\}$. Зафиксируем функцию $f\colon X \to \mathbb{R}$, F-разбиение $\{X_i\}_{i\in I}$ множества X, точки $\{x_i\}_{i\in I}$ такие, что $x_i \in X_i$, и составим F-*интегральную* сумму Σ вида (5) (отличие состоит в том, что здесь фигурирует F-разбиение, а в определении (5) — разбиение).

Определение 8. Пусть $X_0 \in \mathcal{O}_F(\mathbb{R}^n)$, а множество X таково, что $X_0 \subseteq X \subseteq \overline{X}_0$. Число $\mathcal{I} \in \mathbb{R}$ называется F-*интегралом* от функции $f\colon X \to \mathbb{R}$ на множестве X, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $\big|\Sigma - \mathcal{I}\big| < \varepsilon$, каково бы ни было F-разбиение $\{X_i\}_{i\in I}$ множества X такое, что $\max\limits_{i\in I} \operatorname{diam} X_i < \delta$, и каковы бы ни были точки $\{x_i\}_{i\in I}$ такие, что $x_i \in X_i$. В этом случае функцию f называем F-*интегрируемой* на множестве X (в смысле Римана–Стилтьеса) и пишем

$$\mathcal{I} = (F)\int_X f(\cdot)\, dm_F. \tag{8}$$

Теорема 5. *Пусть множества X_0 и X таковы, что $X_0 \in \mathcal{O}_F(\mathbb{R}^n)$, а $X = \overline{X}_0$. Если функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ интегрируема в смысле Римана–Стилтьеса относительно меры m_F, то она F-интегрируема. При этом значения интегралов совпадают.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{I}$ — это интеграл (6). Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Найдется число $\delta > 0$ такое, что $\Big|\sum\limits_{i\in I} f(x_i)\, m_F(X_i) - \mathcal{I}\Big| < \varepsilon$, каково бы ни было разбиение $\{X_i\}_{i\in I}$ множества X такое, что $\max\limits_{i\in I} \operatorname{diam} X_i < \delta$, и каковы бы ни были точки $\{x_i\}_{i\in I}$ такие, что $x_i \in X_i$.

Зафиксируем $r \in \mathbb{N}$, $K \doteq \{1, \ldots, r\}$ и F-разбиение $\{Y_k\}_{k \in K}$ множества X такое, что $\max\limits_{k \in K} \operatorname{diam} Y_k < \delta$. Оно порождает систему $\{\overline{Y}_k\}_{k \in K}$, состоящую из непустых замкнутых измеримых относительно меры $m_{_F}$ множеств. Понятно, что $\max\limits_{k \in K} \operatorname{diam} \overline{Y}_k < \delta$.

Для элементов систем $\{Y_k\}_{k \in K}$ и $\{\overline{Y}_k\}_{k \in K}$ справедливо $\bigcup\limits_{k \in K} \overline{Y}_k = \overline{\bigcup\limits_{k \in K} (\overline{Y}_k)} = X$.

Пусть $i, j \in K$ таковы, что $i \neq j$ (поэтому $Y_i \cap Y_j = \varnothing$). Следовательно,

$$\overline{Y}_i \cap \overline{Y}_j = (Y_i \cup \partial Y_i) \cap (Y_j \cup \partial Y_j) = (\partial Y_i \cap Y_j) \cup (Y_i \cap \partial Y_j) \cup (\partial Y_i \cap \partial Y_j).$$

Так как $\partial Y_i \cap Y_j \subseteq \partial Y_i$ и $Y_i \cap \partial Y_j \subseteq \partial Y_j$, то $\overline{Y}_i \cap \overline{Y}_j \subseteq \partial Y_i \cup \partial Y_j = \partial \overline{Y}_i \cup \partial \overline{Y}_j$.

Таким образом, $\{\overline{Y}_k\}_{k \in K}$ — это разбиение множества X, причем $\max\limits_{k \in K} \operatorname{diam} \overline{Y}_k < \delta$.

Зафиксируем точки $\{y_k\}_{k \in K}$ такие, что $y_k \in Y_k$. Очевидно, $y_k \in \overline{Y}_k$. Следовательно,

$$\Big| \sum_{k \in K} f(y_k)\, m_{_F}(\overline{Y}_k) - \mathcal{I} \Big| < \varepsilon, \qquad \Big| \sum_{k \in K} f(y_k)\, m_{_F}(Y_k) - \mathcal{I} \Big| < \varepsilon, \qquad (F)\int_X f(\cdot)\, dm_{_F} = \mathcal{I},$$

то есть $\mathcal{I}$ — это интеграл (8). □

Теорема 6. *Пусть множества X_0 и X таковы, что $X_0 \in \mathcal{O}_{_F}(\mathbb{R}^n)$, а $X = \overline{X}_0$. Всякая F-ступенчатая функция $h \colon X \to \mathbb{R}$ является F-интегрируемой на X.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Существует F-разбиение $\{X_1, \ldots, X_r\}$ компакта X такое, что при каждом $i \in I \doteq \{1, \ldots, r\}$ сужение $h_i \colon X_i \to \mathbb{R}$ функции h является функцией-константой. Следовательно, если $Y \doteq \bigcup\limits_{i \in I} X_i$, то функция-сужение $H \colon Y \to \mathbb{R}$ непрерывна в каждой точке области ее определения. В силу замечания 8 справедливы равенства $X \backslash Y = \Gamma$ (где $\Gamma \doteq \bigcup\limits_{i \in I} \partial X_i$) и $m_{_F}(\Gamma) = 0$.

Таким образом, у ограниченной (по определению) функции $h \colon X \to \mathbb{R}$ множество ее точек разрыва имеет обобщенную жорданову меру нуль. В соответствии с замечанием 7 функция h интегрируема в смысле Римана–Стилтьеса, а в силу теоремы 5 она F-интегрируема на X. □

Теорема 7. *Пусть множества X_0 и X таковы, что $X_0 \in \mathcal{O}_{_F}(\mathbb{R}^n)$, а $X = \overline{X}_0$. Всякая F-правильная функция $f \in \mathrm{G}^F(X)$ является F-интегрируемой на X.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу теоремы 3 существует последовательность $\{h_k\}$, состоящая из F-ступенчатых функций $h_k \colon X \to \mathbb{R}$, такая, что $\|h_k - f\| \to 0$ (здесь и далее $\|\cdot\|$ — это $\sup$-норма (1), сходимость по ней эквивалентна равномерной сходимости).

Для любого k определены F-разбиение $\{X_t^{(k)}\}_{t \in I_k}$ множества X и числа $\{c_t^{(k)}\}_{t \in I_k}$ такие, что $h_k(x) = c_t^{(k)}$ для всех $x \in X_t^{(k)}$ (при каждом $t \in I_k \doteq \{1, \ldots, r_k\}$). Зафиксируем какие-либо индексы k, ℓ и определим множества $Z_{ts}^{(k\ell)} \doteq X_t^{(k)} \cap X_s^{(\ell)}$, $(t, s) \in I_k \times I_\ell$, где $I_\ell \doteq$ $\doteq \{1, \ldots, r_\ell\}$. В соответствии с (7) из замечания 8 справедливы формулы

$$m_{_F}(X_t^{(k)}) = \sum_{s \in I_\ell} m_{_F}(Z_{ts}^{(k\ell)}), \quad t \in I_k, \qquad m_{_F}(X_s^{(\ell)}) = \sum_{t \in I_k} m_{_F}(Z_{ts}^{(k\ell)}), \quad s \in I_\ell,$$

$$m_{_F}(X) = \sum_{(t,s) \in I_k \times I_\ell} m_{_F}(Z_{ts}^{(k\ell)}).$$

В силу теоремы 6 функции h_k и h_ℓ являются F-интегрируемыми, и для их F-интегралов H_k и H_ℓ справедливы равенства

$$H_k = \sum_{t\in I_k} c_t^{(k)} m_{_F}(X_t^{(k)}), \qquad H_\ell = \sum_{s\in I_\ell} c_s^{(\ell)} m_{_F}(X_s^{(\ell)}),$$
$$H_k - H_\ell = \sum_{t\in I_k} c_t^{(k)} \sum_{s\in I_\ell} m_{_F}(Z_{ts}^{(k\ell)}) - \sum_{s\in I_\ell} c_s^{(\ell)} \sum_{t\in I_k} m_{_F}(Z_{ts}^{(k\ell)}) = \sum_{(t,s)\in I_k\times I_\ell} \big[c_t^{(k)} - c_s^{(\ell)}\big] m_{_F}(Z_{ts}^{(k\ell)})$$

и оценка $|H_k - H_\ell| \leqslant \|h_k - h_\ell\| \displaystyle\sum_{(t,s)\in I_k\times I_\ell} m_{_F}(Z_{ts}^{(k\ell)}) = \|h_k - h_\ell\|\, m_{_F}(X)$.

Так как $\|h_k - f\| \to 0$, то $\|h_k - h_\ell\| \to 0$ и $|H_k - H_\ell| \to 0$ при $k, \ell \to \infty$. Следовательно, последовательность $\{H_k\}$ фундаментальна в $\mathbb{R}$, поэтому существует предел $\mathcal{I} \doteq \lim H_k$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$, и пусть $e \doteq \varepsilon/(2 + m_{_F}(X))$. Так как $\|h_k - f\| \to 0$ и $H_k \to \mathcal{I}$, то существует i такое, что $\|h_i - f\| < e$ и $|H_i - \mathcal{I}| < e$.

Так как H_i — это F-интеграл от функции h_i на множестве X, то существует $\delta > 0$ такое, что $\big|\Sigma_i - H_i\big| < e$, каково бы ни было F-разбиение $\{Y_j\}_{j\in J}$ множества X такое, что $\max\limits_{j\in J} \operatorname{diam} Y_j < \delta$, и точки $\{y_j\}_{j\in J}$ такие, что $y_j \in Y_j$ (при каждом $j \in J \doteq \{1,\dots,l\}$). Здесь и далее используются F-интегральные суммы

$$\Sigma_i \doteq \sum_{j\in J} h_i(y_j)\, m_{_F}(Y_j), \qquad \Sigma \doteq \sum_{j\in J} f(y_j)\, m_{_F}(Y_j).$$

Поскольку $\big|\Sigma - \mathcal{I}\big| \leqslant \big|\Sigma - \Sigma_i\big| + \big|\Sigma_i - H_i\big| + |H_i - \mathcal{I}| < \big|\Sigma - \Sigma_i\big| + 2e$ и

$$\big|\Sigma_i - \Sigma\big| \leqslant \sum_{j\in J} \big|h_i(y_j) - f(y_j)\big|\, m_{_F}(Y_j) \leqslant \|h_i - f\| \sum_{j\in J} m_{_F}(Y_j) < e\, m_{_F}(X),$$

то $\big|\Sigma - \mathcal{I}\big| < (2 + m_{_F}(X))e = \varepsilon$, поэтому $(F)\displaystyle\int_X f(\cdot)\, dm_{_F} = \mathcal{I}$. □

§ 4. Критерии F-интегрируемости. F-интегральные суммы Дарбу

Зафиксируем допустимую функцию $F\colon \Pi \to \mathbb{R}$, где $\Pi \doteq [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$.

Пусть $X_0 \in \mathcal{O}_{_F}(\mathbb{R}^n)$, $X = \overline{X}_0$ и $f\colon X \to \mathbb{R}$ — ограниченная функция. Через $\mathcal{X}$ обозначим совокупность всех F-разбиений $\{X_i\}_{i\in I}$ (где $I \doteq \{1,\dots,r\}$) множества X. Определены следующие величины:

$$\gamma_i' \doteq \inf_{x\in X_i} f(x), \qquad \gamma_i'' \doteq \sup_{x\in X_i} f(x), \qquad i \in I,$$
$$\Sigma' = \Sigma'\big(f, \{X_i\}_{i\in I}\big) \doteq \sum_{i\in I} \gamma_i'\, m_{_F}(X_i), \qquad \Sigma'' = \Sigma''\big(f, \{X_i\}_{i\in I}\big) \doteq \sum_{i\in I} \gamma_i''\, m_{_F}(X_i),$$
$$\mathcal{I}' = \mathcal{I}'(f) \doteq \sup_{\{X_i\}\in\mathcal{X}} \Sigma'\big(f, \{X_i\}_{i\in I}\big), \qquad \mathcal{I}'' = \mathcal{I}''(f) \doteq \inf_{\{X_i\}\in\mathcal{X}} \Sigma''\big(f, \{X_i\}_{i\in I}\big). \tag{9}$$

Числа Σ' и Σ'' называются *нижней и верхней F-интегральными суммами Дарбу* соответственно. Понятно, что для любой совокупности точек $\{x_i\}_{i\in I}$ такой, что $x_i \in X_i$, справедливы неравенства $\Sigma' \leqslant \Sigma \leqslant \Sigma''$ (величина Σ, зависящая от этой совокупности точек, определена правой частью формулы (5)).

Числа $\mathcal{I}'$ и $\mathcal{I}''$ называются *нижним и верхним F-интегралами* соответственно. Докажем неравенство $\mathcal{I}' \leqslant \mathcal{I}''$. Зафиксируем два F-разбиения $\{X_i\}_{i\in I}$, $\{Y_j\}_{j\in J}$ из $\mathcal{X}$, где

$I \doteq \{1, \ldots, r\}$, $J \doteq \{1, \ldots, \ell\}$. Обозначим $Z_{ij} \doteq X_i \cap Y_j$, $(i,j) \in I \times J$. В соответствии с замечанием 5 система $\{Z_{ij}\}_{(i,j)\in\mathcal{S}}$ также является F-разбиением, где $\mathcal{S}$ — это совокупность всех пар (i,j) таких, что $Z_{ij} \neq \varnothing$. В силу (7) из замечания 8 справедливы равенства

$$m_{_F}(X_i) = \sum_{j\in J} m_{_F}(Z_{ij}), \qquad m_{_F}(Y_j) = \sum_{i\in I} m_{_F}(Z_{ij}).$$

$$\Sigma'\big(f, \{X_i\}_{i\in I}\big) = \sum_{i\in I} \gamma_i' \sum_{j\in J} m_{_F}(Z_{ij}) = \sum_{(i,j)\in\mathcal{S}} \gamma_i' m_{_F}(Z_{ij}) = \Sigma'\big(f, \{Z_{ij}\}_{(i,j)\in\mathcal{S}}\big),$$

$$\Sigma''\big(f, \{Y_j\}_{j\in J}\big) = \sum_{j\in J} \gamma_j'' \sum_{i\in I} m_{_F}(Z_{ij}) = \sum_{(i,j)\in\mathcal{S}} \gamma_j'' m_{_F}(Z_{ij}) = \Sigma''\big(f, \{Z_{ij}\}_{(i,j)\in\mathcal{S}}\big). \tag{10}$$

Так как $\Sigma'\big(f, \{Z_{ij}\}_{(i,j)\in\mathcal{S}}\big) \leqslant \Sigma''\big(f, \{Z_{ij}\}_{(i,j)\in\mathcal{S}}\big)$, то $\Sigma'\big(f, \{X_i\}_{i\in I}\big) \leqslant \Sigma''\big(f, \{Y_j\}_{j\in J}\big)$ для любых F-разбиений $\{X_i\}_{i\in I}$, $\{Y_j\}_{j\in J}$ из $\mathcal{X}$, поэтому $\mathcal{I}'(f) \leqslant \mathcal{I}''(f)$.

Теорема 8. *Пусть* $X_0 \in \mathcal{O}_{_F}(\mathbb{R}^n)$, $X = \overline{X}_0$ *и* $f\colon X \to \mathbb{R}$ — *ограниченная функция. Следующие утверждения эквивалентны*:

(a) $\mathcal{I}'(f) = \mathcal{I}''(f)$;

(b) *для любого* $\varepsilon > 0$ *в множестве* $\mathcal{X}$ *найдется* F*-разбиение* $\{X_i\}_{i\in I}$ *такое, что*

$$\Sigma''\big(f, \{X_i\}_{i\in I}\big) - \Sigma'\big(f, \{X_i\}_{i\in I}\big) < \varepsilon; \tag{11}$$

(c) *для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что неравенство* (11) *выполняется для всех* F*-разбиений* $\{X_i\}_{i\in I}$ *из множества* $\mathcal{X}$ *таких, что* $\max\limits_{i\in I} \operatorname{diam} X_i < \delta$;

(d) *существует* F*-интеграл* (8) (*обозначим его* $\mathcal{I}(f)$).

При этом $\mathcal{I}(f) = \mathcal{I}'(f) = \mathcal{I}''(f)$.

Доказательство. (a)$\Longrightarrow$(b). Зафиксируем $\varepsilon > 0$. В соответствии с (9) существуют F-разбиения $\{X_i\}_{i\in I}$ и $\{Y_j\}_{j\in J}$ такие, что

$$\mathcal{I}'(f) - \varepsilon/2 < \Sigma'\big(f, \{X_i\}_{i\in I}\big) = \Sigma'\big(f, \{Z_{ij}\}_{(i,j)\in\mathcal{S}}\big),$$

$$\mathcal{I}''(f) + \varepsilon/2 > \Sigma''\big(f, \{Y_j\}_{j\in J}\big) = \Sigma''\big(f, \{Z_{ij}\}_{(i,j)\in\mathcal{S}}\big).$$

(Воспользовались F-разбиением $\{Z_{ij}\}_{(i,j)\in\mathcal{S}}$, определенным перед формулами (10), и самими формулами.) Так как $\mathcal{I}'(f) = \mathcal{I}''(f)$, то $\Sigma''\big(f, \{Z_{ij}\}_{(i,j)\in\mathcal{S}}\big) - \Sigma'\big(f, \{Z_{ij}\}_{(i,j)\in\mathcal{S}}\big) < \varepsilon$. Следовательно, для F-разбиения $\{Z_{ij}\}_{(i,j)\in\mathcal{S}}$ справедливо неравенство вида (11).

(b)$\Longrightarrow$(a). Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Так как существует F-разбиение $\{X_i\}_{i\in I}$, удовлетворяющее (11), и $\Sigma'\big(f, \{X_i\}_{i\in I}\big) \leqslant \mathcal{I}'(f) \leqslant \mathcal{I}''(f) \leqslant \Sigma''\big(f, \{X_i\}_{i\in I}\big)$, то $\mathcal{I}''(f) - \mathcal{I}'(f) < \varepsilon$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ справедливо равенство $\mathcal{I}'(f) = \mathcal{I}''(f)$.

(b)$\Longrightarrow$(c). Случай $\|f\| = 0$ тривиален (см. (1)). Далее полагаем $\|f\| > 0$. Пусть $\varepsilon > 0$. Существует F-разбиение $\{X_i\}_{i\in I}$ такое, что $\Sigma''\big(f, \{X_i\}_{i\in I}\big) - \Sigma'\big(f, \{X_i\}_{i\in I}\big) < \varepsilon$ (неравенство (11)). Обозначим $\Gamma \doteq \bigcup\limits_{i\in I} \partial X_i$. В силу замечания 8 имеет место равенство $m_{_F}(\Gamma) = 0$, а так как $m_{_F}(\Gamma) = m_{_F}^e(\Gamma)$, то в соответствии с определением внешней меры существует фигура σ такая, что $\Gamma \subset \operatorname{int}\sigma$ и $\alpha_{_F}(\sigma \cap \Pi) < \varepsilon/\|f\|$. (Здесь под фигурой мы понимаем объединение (4) параллелепипедов, определенных во всем пространстве $\mathbb{R}^n$, а не только в Π.) Так как Γ и $\mathbb{R}^n \backslash \operatorname{int}\sigma$ — замкнутые непересекающиеся множества (причем Γ ограничено), то существует $\delta > 0$ такое, что $\varrho(x,y) > \delta$ для всех $x \in \Gamma$ и $y \in \mathbb{R}^n \backslash \operatorname{int}\sigma$. В частности, $\varrho(x,y) > \delta$ для всех $x \in \Gamma$ и $y \in \partial\sigma$.

Зафиксируем F-разбиение $\{Y_j\}_{j\in J}$ множества X такое, что $\operatorname{diam} Y_j < \delta$ для всех $j \in J$, и для его элементов определим величины $\gamma'_j(=\gamma'_{j,Y})$, $\gamma''_j(=\gamma''_{j,Y})$, $\Sigma'(=\Sigma'_Y)$, $\Sigma''(=\Sigma''_Y)$ вида (9). Через K обозначим множество всех тех индексов $j \in J$, что $Y_j \subset \sigma \cap \Pi$. Тогда

$$\Sigma''_Y - \Sigma'_Y = \sum_{j\in J} (\gamma''_j - \gamma'_j)\, m_F(Y_j) = \sum_{j\in K} (\gamma''_j - \gamma'_j)\, m_F(Y_j) + \sum_{j\in J\setminus K} (\gamma''_j - \gamma'_j)\, m_F(Y_j). \tag{12}$$

Обозначим слагаемые в правой части (12) через Σ_1 и Σ_2. Если $U \doteq \bigcup_{j\in K} Y_j$, то $U \subset \sigma \cap \Pi$, а в соответствии с определением внутренней меры существует фигура σ' такая, что $\overline{\sigma}' \subset U$ и $m_F(U) = m^i_F(U) < \alpha_F(\sigma') + \varepsilon/\|f\| < \alpha_F(\sigma \cap \Pi) + \varepsilon/\|f\| < 2\varepsilon/\|f\|$, поэтому

$$\Sigma_1 \leqslant 2\|f\| \sum_{j\in K} m_F(Y_j) = 2\|f\|\, m_F(U) < 4\varepsilon.$$

Покажем, что если множество $M \subset X$ таково, что $\operatorname{diam} M < \delta$ и $M \cap (X\setminus\sigma) \neq \varnothing$, то среди элементов F-разбиения $\{X_i\}_{i\in I}$ существует единственный элемент, содержащий в себе целиком все множество M. Действительно. Зафиксируем точку $x \in M \cap (X\setminus\sigma)$. Так как $x \in X$ и $x \notin \sigma$ (поэтому $x \notin \Gamma$), то существует индекс $k \in I$ такой, что $x \in X_k$. Предположим, что $M\setminus X_k \neq \varnothing$. Тогда для всех $y \in M\setminus X_k$ справедливы неравенства $\varrho(x,y) \leqslant \operatorname{diam} M < \delta$ (заметим, что $x, y \in M$). Другими словами, длина отрезка $T \doteq \{(1-t)x + ty\}_{t\in[0,1]}$ не превосходит δ. Поскольку $x \in X_k$, а $y \notin X_k$, то $T \cap \Gamma \neq \varnothing$. Пусть $z \in T \cap \Gamma$. Так как $z \in \Gamma$, то $\varrho(z,w) > \delta$ для любого $w \in \partial\sigma$ (см. определение числа δ и комментарий к нему). С другой стороны, $\varrho(z,w) < \delta$ для любого $w \in T$, поэтому $T \cap \partial\sigma = \varnothing$. (Допустим, что $T\setminus\sigma \neq \varnothing$, и пусть $w \in T\setminus\sigma$, тогда $z, w \in T$, $z \in \sigma$, $w \notin \sigma$, поэтому $\{(1-t)z + tw\}_{t\in[0,1]} \cap \partial\sigma \neq \varnothing$ и $T \cap \partial\sigma \neq \varnothing$.) Полученное противоречие означает, что $T\setminus\sigma = \varnothing$. Другими словами, $T \subset \sigma$, поэтому $x \in \sigma$. Новое противоречие означает, что $M\setminus X_k = \varnothing$, то есть $M \subset X_k$. Так как элементы F-разбиения $\{X_i\}_{i\in I}$ попарно не пересекаются, то M не принадлежит ни одному из множеств X_i, $i \neq k$.

Пусть $L \doteq J\setminus K$. Тогда $Y_j \subset X\setminus(\sigma\cap\Pi) = X\setminus\sigma$, $j \in L$. Так как $\operatorname{diam} Y_j < \delta$ для всех $j \in L$, то существует единственный индекс $k_j \in I$ такой, что $Y_j \subseteq X_{k_j}$. Полагаем далее $L_i \doteq \{j \in L\colon Y_j \subseteq X_i\}$, $i \in I$, следовательно,

$$\begin{aligned}\Sigma_2 &= \sum_{j\in L} (\gamma''_{j,Y} - \gamma'_{j,Y})\, m_F(Y_j) = \sum_{i\in I}\sum_{j\in L_i} \Big[\sup_{x\in Y_j} f(x) - \inf_{x\in Y_j} f(x)\Big]\, m_F(Y_j) \leqslant \\ &\leqslant \sum_{i\in I} \Big[\sup_{x\in X_i} f(x) - \inf_{x\in X_i} f(x)\Big] \sum_{j\in L_i} m_F(Y_j) \leqslant \sum_{i\in I} \Big[\sup_{x\in X_i} f(x) - \inf_{x\in X_i} f(x)\Big]\, m_F(X_i) = \\ &= \Sigma''\big(f, \{X_i\}_{i\in I}\big) - \Sigma'\big(f, \{X_i\}_{i\in I}\big) < \varepsilon.\end{aligned}$$

В силу (12) для F-разбиения $\{Y_j\}_{j\in J}$ справедлива оценка $\Sigma''_Y - \Sigma'_Y < 5\varepsilon$ вида (11).

Импликация (c)$\Longrightarrow$(b) тривиальна.

(c) $\Longrightarrow$ (d). Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что неравенство $\Sigma'' - \Sigma' < \varepsilon$ (вида (11)) выполняется для всех F-разбиений $\{X_i\}_{i\in I}$ с $\max_{i\in I} \operatorname{diam} X_i < \delta$. Зафиксируем точки $x_i \in X_i$, $i \in I$, и пусть Σ — правая часть в (5). Импликации (c) $\Longrightarrow$ (b) $\Longrightarrow$ (a) влекут равенство $\mathcal{I}'(f) = \mathcal{I}''(f)$. Так как $\Sigma' \leqslant \mathcal{I}'(f) = \mathcal{I}''(f) \leqslant \Sigma''$, то $\Sigma' \leqslant \mathcal{I} \leqslant \Sigma''$, где $\mathcal{I} \doteq \mathcal{I}'(f)$. В силу неравенств $\Sigma' \leqslant \Sigma \leqslant \Sigma''$, фигурирующих в комментариях к формулам (9), справедливо $\big|\Sigma - \mathcal{I}\big| \leqslant \Sigma'' - \Sigma' < \varepsilon$, поэтому $\mathcal{I}$ — это F-интеграл (8).

(d) $\Longrightarrow$ (c). Пусть существует F-интеграл $\mathcal{I}(f)$. Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $\mathcal{I}(f) - \varepsilon/2 < \Sigma < \mathcal{I}(f) + \varepsilon/2$, где Σ — правая часть формулы (5), определенная для произвольного F-разбиения $\{X_i\}_{i\in I}$ такого, что $\max\limits_{i\in I}\operatorname{diam}X_i < \delta$, и для произвольной совокупности точек $\{x_i\}_{i\in I}$ таких, что $x_i \in X_i$. Переходя в (5) к нижней и верхней граням для величин $f(x_i)$ (к величинам γ_i' и γ_i''), получаем $\mathcal{I}(f) - \varepsilon/2 \leqslant \Sigma' \leqslant \Sigma'' \leqslant \mathcal{I}(f) + \varepsilon/2$ и, как следствие, неравенство $\Sigma'' - \Sigma' \leqslant \varepsilon$ вида (11). □

§ 5. Свойства F-интеграла Римана–Стилтьеса

В параграфе доказаны основные свойства F-интеграла Римана–Стилтьеса. Зафиксируем допустимую функцию $F\colon \Pi \to \mathbb{R}$, где $\Pi \doteq [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$.

1. *Пусть $X_0, Y_0 \in \mathcal{O}_F(\mathbb{R}^n)$, $X = \overline{X}_0$, $Y = \overline{Y}_0$ и $Y \subseteq X$. Если ограниченная функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ F-интегрируема (на множестве X), то ее сужение $f_Y\colon Y \to \mathbb{R}$ также F-интегрируемо (на множестве Y).*

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. В силу теоремы 8 существует F-разбиение $\{X_i\}_{i\in I}$ множества X такое, что $\Sigma'' - \Sigma' < \varepsilon$ (числа Σ', Σ'', γ_i', γ_i'' определены формулами (9)).

Обозначим $Y_i \doteq X_i \cap Y$, $i \in I$. Пусть J — множество всех тех i, что $Y_i \neq \varnothing$. Если

$$c_i' \doteq \inf_{x\in Y_i} f(x), \qquad c_i'' \doteq \sup_{x\in Y_i} f(x), \qquad i \in J,$$

то, очевидно, $c_i' \geqslant \gamma_i'$, $c_i'' \leqslant \gamma_i''$, а так как $m_F(Y_i) \leqslant m_F(X_i)$, то

$$\sum_{i\in J} (c_i'' - c_i')\, m_F(Y_i) \leqslant \sum_{i\in J} (\gamma_i'' - \gamma_i')\, m_F(X_i) \leqslant \sum_{i\in I} (\gamma_i'' - \gamma_i')\, m_F(X_i) = \Sigma'' - \Sigma' < \varepsilon.$$

Таким образом, для F-разбиения $\{Y_i\}_{i\in J}$ множества Y справедливо неравенство вида (11), следовательно, в силу теоремы 8 сужение $f_Y\colon Y \to \mathbb{R}$ — F-интегрируемая функция.

2. *Пусть $Y_0, Z_0 \in \mathcal{O}_F(\mathbb{R}^n)$ — непересекающиеся множества, $Y = \overline{Y}_0$, $Z = \overline{Z}_0$ и $X \doteq Y \cup Z$. Если ограниченная функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ F-интегрируема (на множестве X), то ее сужения $f_Y\colon Y \to \mathbb{R}$ и $f_Z\colon Z \to \mathbb{R}$ также F-интегрируемы (на множествах Y и Z соответственно) и*

$$(F)\int_X f(\cdot)\, dm_F = (F)\int_Y f(\cdot)\, dm_F + (F)\int_Z f(\cdot)\, dm_F. \tag{13}$$

Существование интегралов в правой части равенства (13) доказано выше.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. В силу F-интегрируемости функции f на множествах X, Y, Z найдется $\delta > 0$ такое, что

(a) $|\Sigma_X - \mathcal{I}_X| < \varepsilon$ для произвольного F-разбиения $\{X_i\}_{i\in I}$ множества X такого, что $\max\limits_{i\in I}\operatorname{diam} X_i < \delta$, и для произвольной совокупности точек $\{x_i\}_{i\in I}$ таких, что $x_i \in X_i$,

(b) $|\Sigma_Y - \mathcal{I}_Y| < \varepsilon$ для произвольного F-разбиения $\{Y_j\}_{j\in J}$ множества Y такого, что $\max\limits_{j\in J}\operatorname{diam} Y_j < \delta$, и для произвольной совокупности точек $\{y_j\}_{j\in J}$ таких, что $y_j \in Y_j$,

(c) $|\Sigma_Z - \mathcal{I}_Z| < \varepsilon$ для произвольного F-разбиения $\{Z_k\}_{k\in K}$ множества Z такого, что $\max\limits_{k\in K}\operatorname{diam} Z_k < \delta$, и для произвольной совокупности точек $\{z_k\}_{k\in K}$ таких, что $z_k \in Z_k$.

Числа Σ_X, Σ_Y, Σ_Z определены в соответствии с (5):

$$\Sigma_X \doteq \sum_{i\in I} f(x_i)\, m_F(X_i), \qquad \Sigma_Y \doteq \sum_{j\in J} f(y_j)\, m_F(Y_j), \qquad \Sigma_Z \doteq \sum_{k\in K} f(z_k)\, m_F(Z_k), \tag{14}$$

а числа $\mathcal{I}_X$, $\mathcal{I}_Y$, $\mathcal{I}_Z$ — в соответствии с (8) (это элементы формулы (13)).

Системы $\{Y_j\}_{j\in J}$, $\{Z_k\}_{k\in K}$ и точки $\{y_j\}_{j\in J}$, $\{z_k\}_{k\in K}$, удовлетворяющие условиям (b), (c), порождают F-разбиение $\{Y_j\}_{j\in J} \cup \{Z_k\}_{k\in K}$ множества X и совокупность точек

$\{y_j\}_{j\in J} \cup \{z_k\}_{k\in K}$, удовлетворяющие условиям (a). В этом случае в соответствии с (14) справедливо равенство $\Sigma_X = \Sigma_Y + \Sigma_Z$, поэтому $|\mathcal{I}_X - \mathcal{I}_Y - \mathcal{I}_Z| < 3\varepsilon$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ имеет место равенство $\mathcal{I}_X = \mathcal{I}_Y + \mathcal{I}_Z$ (равенство (13)).

3. *Пусть $X_0 \in \mathcal{O}_F(\mathbb{R}^n)$, $X = \overline{X}_0$ и ограниченные функции $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ F-интегрируемы на X. Если $u \doteq f+g$, $v \doteq cf$ (где $c \in \mathbb{R}$), $w \doteq fg$, то функции $u, v, w\colon X \to \mathbb{R}$ также F-интегрируемы на X и*

$$(F)\int_X u(\cdot)\,dm_F = (F)\int_X f(\cdot)\,dm_F + (F)\int_X g(\cdot)\,dm_F, \tag{15}$$

$$(F)\int_X v(\cdot)\,dm_F = c\cdot(F)\int_X f(\cdot)\,dm_F. \tag{16}$$

В соответствии с (5) для произвольного F-разбиения $\{X_i\}_{i\in I}$ множества X и произвольной совокупности точек $\{x_i\}_{i\in I}$ таких, что $x_i \in X_i$, справедливы равенства

$$\Sigma\big(u, \{X_i\}_{i\in I}, \{x_i\}_{i\in I}\big) = \Sigma\big(f, \{X_i\}_{i\in I}, \{x_i\}_{i\in I}\big) + \Sigma\big(g, \{X_i\}_{i\in I}, \{x_i\}_{i\in I}\big),$$
$$\Sigma\big(v, \{X_i\}_{i\in I}, \{x_i\}_{i\in I}\big) = c\cdot\Sigma\big(f, \{X_i\}_{i\in I}, \{x_i\}_{i\in I}\big)$$

или $\Sigma_u = \Sigma_f + \Sigma_g$, $\Sigma_v = c\cdot\Sigma_f$ (смысл обозначений понятен). Через $\mathcal{I}_f$ и $\mathcal{I}_g$ обозначим интегралы в правой части (15). Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Так как функции f, g F-интегрируемы, то найдется $\delta > 0$ такое, что $|\Sigma_f - \mathcal{I}_f| < \varepsilon$ и $|\Sigma_g - \mathcal{I}_g| < \varepsilon$ для произвольного F-разбиения $\{X_i\}_{i\in I}$ множества X такого, что $\max\limits_{i\in I} dX_i < \delta$, и для произвольной совокупности точек $\{x_i\}_{i\in I}$ таких, что $x_i \in X_i$.

Так как $\Sigma_u = \Sigma_f + \Sigma_g$, то $|\Sigma_u - \mathcal{I}_f - \mathcal{I}_g| < 2\varepsilon$, поэтому функция u F-интегрируема, причем F-интеграл в левой части (15) равен $\mathcal{I}_f + \mathcal{I}_g$.

Случай $c = 0$ тривиален. Пусть далее $c \neq 0$. Так как $\Sigma_v = c\cdot\Sigma_f$, то $|\Sigma_v - c\mathcal{I}_f| < |c|\,\varepsilon$, поэтому функция v F-интегрируема, причем F-интеграл в левой части (16) равен $c\mathcal{I}_f$.

Неравенство $\|w\| \leqslant \|f\|\cdot\|g\|$ очевидно (в пространстве ограниченных функций применяем $\sup$-норму (1)). Зафиксируем какое-нибудь F-разбиение $\{X_i\}_{i\in I}$ множества X. Так как $w(x) - w(y) = g(x)\,[f(x) - f(y)] + f(y)\,[g(x) - g(y)]$, то в соответствии с терминологией в определении 3 справедливы неравенства $\omega(w; X_i) \leqslant \|g\|\,\omega(f; X_i) + \|f\|\,\omega(g; X_i)$, $i \in I$. Имеет место цепочка равенств

$$\omega(f; X_i) = \sup_{x,y\in X_i}\big(f(x) - f(y)\big) = \sup_{z\in X_i} f(z) - \inf_{z\in X_i} f(z) = \gamma_i'' - \gamma_i'. \tag{17}$$

Числа γ_i' и γ_i'' определены в (9). Переобозначим их через $\gamma_i'(f)$ и $\gamma_i''(f)$ соответственно. Справедливы аналогичные равенства $\omega(g; X_i) = \gamma_i''(g) - \gamma_i'(g)$ и $\omega(w; X_i) = \gamma_i''(w) - \gamma_i'(w)$ (смысл выражений, стоящих в правых частях, понятен). Таким образом,

$$\gamma_i''(w) - \gamma_i'(w) \leqslant \|g\|\cdot[\gamma_i''(f) - \gamma_i'(f)] + \|f\|\cdot[\gamma_i''(g) - \gamma_i'(g)], \qquad i \in I,$$
$$\Sigma''(w) - \Sigma'(w) \leqslant \|g\|\cdot[\,\Sigma''(f) - \Sigma'(f)] + \|f\|\cdot[\,\Sigma''(g) - \Sigma'(g)].$$

В последнем неравенстве числа $\Sigma'(f)$, $\Sigma''(f)$ (и другие) определены в соответствии со второй группой обозначений (9). Они зависят от F-разбиения $\{X_i\}_{i\in I}$ множества X.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Так как функции f, g F-интегрируемы, то в соответствии с теоремой 8 существует F-разбиение $\{X_i\}_{i\in I}$ множества X такое, что $\Sigma''(f) - \Sigma'(f) < \varepsilon$ и $\Sigma''(g) - \Sigma'(g) < \varepsilon$. Следовательно, $\Sigma''(w) - \Sigma'(w) < (\|f\| + \|g\|)\,\varepsilon$. Повторно ссылаясь на теорему 8, получаем, что функция w F-интегрируема.

4. *Пусть* $X_0 \in \mathcal{O}_F(\mathbb{R}^n)$, $X = \overline{X}_0$, *а ограниченная функция* $f\colon X \to \mathbb{R}$ F*-интегрируема на* X *и такова, что* $\inf\limits_{x\in X} |f(x)| > 0$. *Тогда функция* $g \doteq 1/f$ *также* F*-интегрируема на* X.

Существует $C > 0$ такое, что $|g(x)| < C$ для всех $x \in X$. Зафиксируем какое-нибудь F-разбиение $\{X_i\}_{i\in I}$ множества X. Так как $g(x) - g(y) = g(x)g(y)\,[f(y) - f(x)]$, то в соответствии с определением 3 справедливы неравенства $\omega(g; X_i) \leqslant C^2\omega(f; X_i)$, $i \in I$. В соответствии с (17) имеем $\gamma_i''(g)-\gamma_i'(g) \leqslant C^2\,[\gamma_i''(f)-\gamma_i'(f)]$, $i \in I$, поэтому $\Sigma''(g)-\Sigma'(g) \leqslant C^2\,[\Sigma''(f)-\Sigma'(f)]$. (Смысл чисел, стоящих в неравенствах, понятен, см. обозначения (9).)

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Так как функция f F-интегрируема, то в соответствии с теоремой 8 существует F-разбиение $\{X_i\}_{i\in I}$ множества X такое, что $\Sigma''(f)-\Sigma'(f) < \varepsilon$. Следовательно, $\Sigma''(g) - \Sigma'(g) < C^2\varepsilon$. В силу теоремы 8 функция g F-интегрируема.

5. *Если* $X_0 \in \mathcal{O}_F(\mathbb{R}^n)$, $X = \overline{X}_0$, *а функция* $f\colon X \to \mathbb{R}$ F*-интегрируема на* X*, ограничена и неотрицательна, то* $(F)\displaystyle\int_X f(\cdot)\,dm_F \geqslant 0$.

Очевидно, любая интегральная сумма Римана–Стилтьеса вида (5) неотрицательна, откуда и следует справедливость утверждения.

6. *Если* $X_0 \in \mathcal{O}_F(\mathbb{R}^n)$, $X = \overline{X}_0$, *а функция* $f\colon X \to \mathbb{R}$ F*-интегрируема на* X *и ограничена, то функция* $|f|$ F*-интегрируема и*

$$\Bigl|(F)\int_X f(\cdot)\,dm_F\Bigr| \leqslant (F)\int_X |f(\cdot)|\,dm_F. \tag{18}$$

Ограниченность функции $|f|$ очевидна. Зафиксируем F-разбиение $\{X_i\}_{i\in I}$ множества X. Так как $\bigl||f(x)| - |f(y)|\bigr| \leqslant |f(x) - f(y)|$, то в соответствии с определением 3 имеют место неравенства $\omega(|f|; X_i) \leqslant \omega(f; X_i)$, $i \in I$. Согласно (17) справедливо $\gamma_i''(|f|) - \gamma_i'(|f|) \leqslant \gamma_i''(f) - \gamma_i'(f)$, $i \in I$, поэтому $\Sigma''(|f|) - \Sigma'(|f|) \leqslant \Sigma''(f) - \Sigma'(f)$. (Смысл чисел, стоящих в неравенствах, понятен, см. обозначения (9).)

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Так как функция f F-интегрируема, то в соответствии с теоремой 8 существует F-разбиение $\{X_i\}_{i\in I}$ множества X такое, что $\Sigma''(f)-\Sigma'(f) < \varepsilon$. Следовательно, $\Sigma''(|f|) - \Sigma'(|f|) < \varepsilon$. В силу теоремы 8 функция $|f|$ F-интегрируема.

Через $\mathcal{I}(f)$ и $\mathcal{I}(|f|)$ обозначим интегралы в (18). В силу F-интегрируемости функций $f, |f|$ найдется $\delta > 0$ такое, что $|\Sigma(f)-\mathcal{I}(f)| < \varepsilon$ и $|\Sigma(|f|)-\mathcal{I}(|f|)| < \varepsilon$ для произвольного F-разбиения $\{X_i\}_{i\in I}$ множества X такого, что $\max\limits_{i\in I} \mathrm{diam} X_i < \delta$, и для произвольной совокупности точек $\{x_i\}_{i\in I}$ таких, что $x_i \in X_i$. Используем обозначения вида (5):

$$\Sigma(f) \doteq \sum_{i\in I} f(x_i)\,m_F(X_i), \qquad \Sigma(|f|) \doteq \sum_{i\in I} |f(x_i)|\,m_F(X_i).$$

Легко показать, что $|\Sigma(f)| \leqslant \Sigma(|f|)$, а так как $\bigl||\Sigma(f)| - |\mathcal{I}(f)|\bigr| \leqslant |\Sigma(f) - \mathcal{I}(f)| < \varepsilon$ и $|\Sigma(|f|) - \mathcal{I}(|f|)| < \varepsilon$, то $|\mathcal{I}(f)| - \mathcal{I}(|f|) < 2\varepsilon$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство $|\mathcal{I}(f)| - \mathcal{I}(|f|) \leqslant 0$, то есть неравенство (18).

Заключение

Отметим класс допустимых функций $F\colon \Pi \to \mathbb{R}$, имеющих важное теоретическое и прикладное значение, — это функции распределения. В прикладных задачах, использующих математическую статистику, в тех случаях, когда априори не очевидно применение того или иного известного распределения, могут применяться так называемые эмпирические функции распределения, в том числе многомерные функции распределения вида $F_\xi(x) = p\,(\xi_1 \leqslant x_1, \ldots, \xi_n \leqslant x_n)$. (В терминах применяемого нами частичного порядка

$x \preceq y$ пишем $F_\xi(x) = p\,(\xi \preceq x)$.) В подобных случаях эмпирическая функция распределения может быть «восстановлена» на базе имеющегося статистического материала путем минимизации некоторого функционала, определенного на этом ресурсе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баранов В. Н., Родионов В. И., Родионова А. Г. О банаховых пространствах правильных функций многих переменных. Аналог интеграла Римана // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2023. Т. 33. Вып. 3. С. 387–401. https://doi.org/10.35634/vm230301
2. Шварц Л. Анализ. Т. 1. М.: Мир, 1972. https://zbmath.org/0252.00001
3. Hönig Ch. S. Volterra–Stieltjes integral equations: functional analytic methods, linear constraints. Amsterdam: North-Holland, 1975. https://zbmath.org/0307.45002
4. Dudek S., Olszowy L. Measures of noncompactness and superposition operator in the space of regulated functions on an unbounded interval // Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas. 2020. Vol. 114. Issue 4. Article number: 168. https://doi.org/10.1007/s13398-020-00900-9
5. Dudek S., Olszowy L. Measures of noncompactness in the space of regulated functions on an unbounded interval // Annals of Functional Analysis. 2022. Vol. 13. Issue 4. Article number: 63. https://doi.org/10.1007/s43034-022-00206-4
6. Баранов В. Н., Родионов В. И. О нелинейных метрических пространствах функций ограниченной вариации // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2022. Т. 32. Вып. 3. С. 341–360. https://doi.org/10.35634/vm220301
7. Monteiro G. A., Slavík A. Extremal solutions of measure differential equations // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2016. Vol. 444. Issue 1. P. 568–597. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2016.06.035
8. Di Piazza L., Marraffa V., Satco B. Closure properties for integral problems driven by regulated functions via convergence results // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2018. Vol. 466. Issue 1. P. 690–710. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2018.06.012
9. Olszowy L. Measures of noncompactness in the space of regulated functions // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2019. Vol. 476. Issue 2. P. 860–874. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2019.04.024
10. Olszowy L., Zając T. Some inequalities and superposition operator in the space of regulated functions // Advances in Nonlinear Analysis. 2020. Vol. 9. Issue 1. P. 1278–1290. https://doi.org/10.1515/anona-2020-0050
11. Hanung Umi Mahnuna, Tvrdý M. On the relationships between Stieltjes type integrals of Young, Dushnik and Kurzweil // Mathematica Bohemica. 2019. Vol. 144. No. 4. P. 357–372. https://doi.org/10.21136/MB.2019.0015-19
12. Cichoń M., Cichoń K., Satco B. Measure differential inclusions through selection principles in the space of regulated functions // Mediterranean Journal of Mathematics. 2018. Vol. 15. Issue 4. Article number: 148. https://doi.org/10.1007/s00009-018-1192-y
13. Krejčí P., Monteiro G. A., Recupero V. Non-convex sweeping processes in the space of regulated functions // Communications on Pure and Applied Analysis. 2022. Vol. 21. Issue 9. P. 2999–3029. https://doi.org/10.3934/cpaa.2022087
14. Estrada R. The set of singularities of regulated functions in several variables // Collectanea Mathematica. 2012. Vol. 63. Issue 3. P. 351–359. https://doi.org/10.1007/s13348-011-0042-z
15. Никольский С. М. Курс математического анализа. Т. 2. М.: Наука, 1975.
16. Fréchet M. Extension au cas des intégrales multiples d’une définition de l’intégrale due á Stieltjes // Nouvelles Annales de Mathématiques. Serie 4. 1910. Vol. 10. P. 241–256. https://zbmath.org/41.0333.02
17. Tonelli L. Su alcuni concetti dell’analisi moderna // Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa. II. Ser. 1942. Vol. 11. Issues 1–2. P. 107–118. https://zbmath.org/0027.09803

18. Шилов Г. Е., Гуревич Б. Л. Интеграл, мера и производная. Общая теория. М.: Наука, 1967. https://zbmath.org/0163.05702
19. Dai Jin, Mou Shuang. The minimal affine total variation on $BV(\mathbb{R}^n)$ // Advances in Applied Mathematics. 2023. Vol. 147. Article number: 102504. https://doi.org/10.1016/j.aam.2023.102504
20. Angeloni L., Vinti G. Multidimensional sampling-Kantorovich operators in BV-spaces // Open Mathematics. 2023. Vol. 21. Issue 1. 20220573. https://doi.org/10.1515/math-2022-0573

Поступила в редакцию 02.11.2023

Принята к публикации 20.05.2024

Баранов Виктор Николаевич, к. ф.-м. н., доцент, кафедра информатики и математики, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: v.n.baranov@gmail.com

Родионов Виталий Иванович, к. ф.-м. н., заведующий кафедрой, кафедра информатики и математики, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
ORCID: https://orcid.org/0009-0009-4502-4464
E-mail: rodionov@uni.udm.ru

Родионова Алла Григорьевна, к. ф.-м. н., доцент, кафедра информатики и математики, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: alla041054@yandex.ru

Цитирование: В. Н. Баранов, В. И. Родионов, А. Г. Родионова. О банаховых пространствах правильных функций многих переменных. Аналог интеграла Римана–Стилтьеса // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2024. Т. 34. Вып. 2. С. 182–203.

VESTNIK UDMURTSKOGO UNIVERSITETA. MATEMATIKA. MEKHANIKA. KOMP'UTERNYE NAUKI
MATHEMATICS 2024. Vol. 34. Issue 2. Pp. 182–203.

V. N. Baranov, V. I. Rodionov, A. G. Rodionova

On Banach spaces of regulated functions of several variables. Analogue of the Riemann–Stieltjes integral

Keywords: step function, regulated function, generalized Jordan measure, Riemann–Stieltjes integral.

MSC2020: 46B99, 26A42

DOI: 10.35634/vm240202

In the previous work of the authors, the concept of a regulated function of several variables $f\colon X \to \mathbb{R}$ was introduced, where $X \subseteq \mathbb{R}^n$. The definition is based on the concept of a special partition of the set X and the concept oscillation of the function f on the elements of the partition. The space $\mathrm{G}(X)$ of such functions is Banach in the $\sup$-norm and is the closure of the space of step functions. In this paper, the space $\mathrm{G}^F(X)$ is defined and studied, which differs from $\mathrm{G}(X)$ in that here, in defining regulated functions of several variables, instead of special partitions, F-partitions are used: their elements are non-empty open sets measurable by the generalized Jordan measure (by the measure m_F). (Symbol F denotes the function generating the measure m_F.) In the second part of the work, the concept of F-integrability of functions of several variables is defined. It is proved that if X is the closure of a non-empty open bounded set $X_0 \subseteq \mathbb{R}^n$, measurable with respect to measure m_F, and the function $f\colon X \to \mathbb{R}$ is integrable in the Riemann–Stieltjes sense with respect to the measure m_F, then it is F-integrable. In this case, the values of the multiple integrals coincide. All functions from the space $\mathrm{G}^F(X)$ are F-integrable. The main properties of the Riemann–Stieltjes F-integral are proved.

REFERENCES

1. Baranov V. N., Rodionov V. I., Rodionova A. G. On Banach spaces of regulated functions of several variables. An analogue of the Riemann integral, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2023, vol. 33, issue 3, pp. 387–401 (in Russian). https://doi.org/10.35634/vm230301
2. Schwartz L. *Analyse mathématique. I*, Paris: Hermann, 1967. https://zbmath.org/0171.01301
3. Hönig Ch. S. *Volterra–Stieltjes integral equations: functional analytic methods, linear constraints*, Amsterdam: North-Holland, 1975. https://zbmath.org/0307.45002
4. Dudek S., Olszowy L. Measures of noncompactness and superposition operator in the space of regulated functions on an unbounded interval, *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas*, 2020, vol. 114, issue 4, article number: 168. https://doi.org/10.1007/s13398-020-00900-9
5. Dudek S., Olszowy L. Measures of noncompactness in the space of regulated functions on an unbounded interval, *Annals of Functional Analysis*, 2022, vol. 13, issue 4, article number: 63. https://doi.org/10.1007/s43034-022-00206-4
6. Baranov V. N., Rodionov V. I. On nonlinear metric spaces of functions of bounded variation, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2022, vol. 32, issue 3, pp. 341–360 (in Russian). https://doi.org/10.35634/vm220301
7. Monteiro G. A., Slavík A. Extremal solutions of measure differential equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2016, vol. 444, issue 1, pp. 568–597. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2016.06.035
8. Di Piazza L., Marraffa V., Satco B. Closure properties for integral problems driven by regulated functions via convergence results, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2018, vol. 466, issue 1, pp. 690–710. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2018.06.012
9. Olszowy L. Measures of noncompactness in the space of regulated functions, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2019, vol. 476, issue 2, pp. 860–874. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2019.04.024

10. Olszowy L., Zając T. Some inequalities and superposition operator in the space of regulated functions, *Advances in Nonlinear Analysis*, 2020, vol. 9, issue 1, pp. 1278–1290. https://doi.org/10.1515/anona-2020-0050
11. Hanung Umi Mahnuna, Tvrdý M. On the relationships between Stieltjes type integrals of Young, Dushnik and Kurzweil, *Mathematica Bohemica*, 2019, vol. 144, no. 4, pp. 357–372. https://doi.org/10.21136/MB.2019.0015-19
12. Cichoń M., Cichoń K., Satco B. Measure differential inclusions through selection principles in the space of regulated functions, *Mediterranean Journal of Mathematics*, 2018, vol. 15, issue 4, article number: 148. https://doi.org/10.1007/s00009-018-1192-y
13. Krejčí P., Monteiro G. A., Recupero V. Non-convex sweeping processes in the space of regulated functions, *Communications on Pure and Applied Analysis*, 2022, vol. 21, issue 9, pp. 2999–3029. https://doi.org/10.3934/cpaa.2022087
14. Estrada R. The set of singularities of regulated functions in several variables, *Collectanea Mathematica*, 2012, vol. 63, issue 3, pp. 351–359. https://doi.org/10.1007/s13348-011-0042-z
15. Nikol'skii S. M. *Kurs matematicheskogo analiza. Tom 2* (A course of mathematical analysis. Vol. 2), Moscow: Nauka, 1975.
16. Fréchet M. Extension au cas des intégrales multiples d'une définition de l'intégrale due á Stieltjes, *Nouvelles Annales de Mathématiques. Serie 4*, 1910, vol. 10, pp. 241–256. https://zbmath.org/41.0333.02
17. Tonelli L. Su alcuni concetti dell'analisi moderna, *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa. II. Ser.*, 1942, vol. 11, issues 1–2, pp. 107–118. https://zbmath.org/0027.09803
18. Shilov G. E., Gurevich B. L. *Integral, mera i proizvodnaya. Obshchaya teoriya* (Integral, measure and derivation. General theory), Moscow: Nauka, 1967. https://zbmath.org/0163.05702
19. Dai Jin, Mou Shuang. The minimal affine total variation on $BV(\mathbb{R}^n)$, *Advances in Applied Mathematics*, 2023, vol. 147, article number: 102504. https://doi.org/10.1016/j.aam.2023.102504
20. Angeloni L., Vinti G. Multidimensional sampling-Kantorovich operators in BV-spaces, *Open Mathematics*, 2023, vol. 21, issue 1, 20220573. https://doi.org/10.1515/math-2022-0573

Received 02.11.2023

Accepted 20.05.2024

Viktor Nikolaevich Baranov, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Informatics and Mathematics, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: v.n.baranov@gmail.com

Vitalii Ivanovich Rodionov, Candidate of Physics and Mathematics, Head of Department, Department of Informatics and Mathematics, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0009-0009-4502-4464
E-mail: rodionov@uni.udm.ru

Alla Grigor'evna Rodionova, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Informatics and Mathematics, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: alla041054@yandex.ru

Citation: V. N. Baranov, V. I. Rodionov, A. G. Rodionova. On Banach spaces of regulated functions of several variables. Analogue of the Riemann–Stieltjes integral, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2024, vol. 34, issue 2, pp. 182–203.