VESTNIK UDMURTSKOGO UNIVERSITETA. MATEMATIKA. MEKHANIKA. KOMP'YUTERNYE NAUKI
CORRESPONDENCE 2023. Vol. 33. Issue 2. Pp. 382–384.

MSC2020: 35K60, 35R30, 45G15

© *D. Q. Durdiev, J. J. Jumaev, D. D. Atoev*

LETTER TO THE EDITOR: CORRECTION TO THE "KERNEL DETERMINATION PROBLEM IN AN INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION OF PARABOLIC TYPE WITH NONLOCAL CONDITION" [VESTN. UDMURT. UNIV. MAT. MEKH. KOMP'YUT. NAUKI, 2023, VOL. 33, ISSUE 1, PP. 90–102]

In this note we give a complete correct formulation and proof of Lemma 1 of [1].

Keywords: Banach fixed-point theorem.

DOI: 10.35634/vm230213

In the paper [1], in the proof of Lemma 1, the Schauder principle was incorrectly applied for proving the existence of a solution to the operator equation

$$u = Lu. \tag{1}$$

That is, there is no proof of equicontinuity of the operator L.

Here we give the following alternative lemma and prove the existence and uniqueness of the solution to the operator equation using the Banach principle. We use the notation of [1].

Consider the functional space of function $u(x,t) \in C(D_{Tl})$ with the norm given by the relation

$$\|u\| = \max_{(x,t)\in\overline{D}_{Tl}} |u(x,t)|.$$

For simplicity, we denote

$$\Phi_0 = \max_{(x,t)\in\overline{D}_{Tl}} |\Phi(x,t)|, \quad k_0 = \max_{t\in[0,T]} |k(t)|.$$

Let $S(\Phi,\Phi_0) = \{u : \|u-\Phi\| \le \Phi_0\}$. Obviously, $\|u\| \le 2\Phi_0$ for $u(x,t) \in S(\Phi,\Phi_0)$.

We use the Banach principle to prove the existence and uniqueness of solution to the operator equation (1).

Lemma 1. *Suppose that the following conditions are satisfied:* $\varphi(x) \in C[0,l]$, $k(t) \in C[0,T]$, $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$. *For all* $u(x,t) \in S(\Phi,\Phi_0)$ *and* $T < \sqrt{\frac{1}{(1+\lambda)k_0}}$ *the solution to the operator equation* (1) *in the class* $C^{2,1}(D_{Tl})$ *exists and it is unique.*

P r o o f. Let us prove that for suitable T the operator L maps the ball $S(\Phi,\Phi_0)$ into itself; i.e., the condition $u \in S(\Phi,\Phi_0)$ implies that $Lu \in S(\Phi,\Phi_0)$. For this, we have

$$\|Lu-\Phi\| = \max_{(x,t)\in\overline{D}_T} |Lu-\Phi\| \le \Big|\lambda \int_0^T \int_0^l G_0(x,\xi,T+t-\tau) \int_0^\tau k(\alpha)u(\xi,\tau-\alpha)\,d\alpha\,d\xi\,d\tau\Big| +$$

$$+\Big|\int_0^t \int_0^l G(x,\xi,t-\tau) \int_0^\tau k(\alpha)u(\xi,\tau-\alpha)\,d\alpha\,d\xi\,d\tau\Big| \le (1+\lambda)k_0\frac{T^2}{2}\|u\| \le (1+\lambda)k_0\Phi_0T^2.$$

If T satisfy the condition $T \le \sqrt{\frac{1}{(1+\lambda)k_0}}$, then $Lu \in S(\Phi,\Phi_0)$.

Now we check the second condition of a fixed point argument. Let $u_1, u_2 \in S(\Phi, \Phi_0)$, then we get

$$\|Lu_1 - Lu_2\| \leq$$
$$\leq \lambda \max_{(x,t)\in \overline{D}_T} \left| \int_0^T \int_0^l G_0(x,\xi,T+t-\tau) \int_0^\tau k(\alpha)(u_1(\xi,\tau-\alpha) - u_1(\xi,\tau-\alpha))\, d\alpha\, d\xi\, d\tau \right| +$$
$$+ \max_{(x,t)\in \overline{D}_T} \left| \int_0^t \int_0^l G(x,\xi,t-\tau) \int_0^\tau k(\alpha)(u_1(\xi,\tau-\alpha) - u_2(\xi,\tau-\alpha))\, d\alpha\, d\xi\, d\tau \right| \leq$$
$$\leq (1+\lambda)k_0 \frac{T^2}{2} \|u_1 - u_2\|.$$

Therefore, if the number T is small enough to satisfy the condition $T < \sqrt{\frac{1}{(1+\lambda)k_0}}$, then L is a contraction operator on $S(\Phi, \Phi_0)$. Then, by the Banach principle, equation (1) has a unique solution in $S(\Phi, \Phi_0)$. The proof of the lemma is complete. □

REFERENCES

1. Durdiev D. Q., Jumaev J. J., Atoev D. D. Kernel determination problem in an integro-differential equation of parabolic type with nonlocal condition, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2023, vol. 33, issue 1, pp. 90–102. https://doi.org/10.35634/vm230106

Received 12.06.2023

Accepted 18.06.2023

Durdimurod Qalandarovich Durdiev, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Bukhara Branch of the Institute of Mathematics named after V. I. Romanovskiy at the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, ul. M. Ikbal, 11, Bukhara, 200118, Uzbekistan.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6054-2827
E-mail: d.durdiev@mathinst.ru

Jonibek Jamolovich Jumaev, Doctor of Philosophy (PhD) in Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, Bukhara Branch of the Institute of Mathematics named after V. I. Romanovskiy at the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, ul. M. Ikbal, 11, Bukhara, 200118, Uzbekistan.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8496-1092
E-mail: jonibekjj@mail.ru

Dilshod Dilmurodovich Atoev, PhD student, Bukhara State University, ul. M. Ikbal, 11, Bukhara, 200118, Uzbekistan.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4047-7690
E-mail: atoevdd@mail.ru

Citation: D. Q. Durdiev, J. J. Jumaev, D. D. Atoev. Letter to the Editor: Correction to the “Kernel determination problem in an integro-differential equation of parabolic type with nonlocal condition” [Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki, 2023, vol. 33, issue 1, pp. 90–102], *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2023, vol. 33, issue 2, pp. 382–384.

ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ 2023. Т. 33. Вып. 2. С. 382–384.

Д. К. Дурдиев, Ж. Ж. Жумаев, Д. Д. Атоев

Письмо в редакцию: поправка к статье «Задача определения ядра в интегро-дифференциальном уравнении параболического типа с нелокальным условием» [Вестник Удмурт. унив. Матем. Мех. Компьют. науки. 2023. Т. 33. Вып. 1. С. 90–102]

Ключевые слова: теорема Банаха о неподвижной точке.

УДК 517.958

DOI: 10.35634/vm230213

В этом сообщении мы даем полную корректную фомулировку и доказательство леммы 1 из [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Durdiev D. Q., Jumaev J. J., Atoev D. D. Kernel determination problem in an integro-differential equation of parabolic type with nonlocal condition // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2023. Т. 33. Вып. 1. С. 90–102. https://doi.org/10.35634/vm230106

Поступила в редакцию 12.06.2023

Принята к публикации 18.06.2023

Дурдиев Дурдимурод Каландарович, д. ф.-м. н., профессор, заведующий Бухарским отделением Института математики им. В. И. Романовского АН Республики Узбекистан, Узбекистан, г. Бухара, ул. Мухаммад Икбол, 11.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6054-2827
E-mail: d.durdiev@mathinst.ru

Жумаев Жонибек Жамолович, Доктор Философии (PhD) по физико-математическим наукам, научный сотрудник Бухарского отделения Института математики им. В. И. Романовского АН Республики Узбекистан, Узбекистан, г. Бухара, ул. Мухаммад Икбол, 11.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8496-1092
E-mail: jonibekjj@mail.ru

Атоев Дилшод Дилмуродович, аспирант, Бухарский государственный университет, Узбекистан, г. Бухара, ул. Мухаммад Икбол, 11.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4047-7690
E-mail: atoevdd@mail.ru

Цитирование: Д. К. Дурдиев, Ж. Ж. Жумаев, Д. Д. Атоев. Письмо в редакцию: поправка к статье «Задача определения ядра в интегро-дифференциальном уравнении параболического типа с нелокальным условием» [Вестник Удмурт. унив. Матем. Мех. Компьют. науки. 2023. Т. 33. Вып. 1. С. 90–102] // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2023. Т. 33. Вып. 2. С. 382–384.