

УДК 532.5

© *И. В. Степанова, В. Е. Зализняк*

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ КОНВЕКЦИИ БИНАРНОЙ СМЕСИ В ГОРИЗОНТАЛЬНОМ СЛОЕ

Рассматривается нестационарное движение жидкой бинарной смеси в узком протяженном горизонтальном канале с твердыми стенками, нагреваемыми по определенному закону. Используется возможность применения решения Остроумова–Бириха к описанию исследуемого течения, что сводит задачу к решению смешанной краевой задачи для системы параболических уравнений. Особенностью задачи является дополнительное к граничным интегральное условие на расход жидкости, позволяющее вместе с функциями скорости, температуры и концентрации находить горизонтальный градиент давления. Посредством построенной численной процедуры решения поставленной задачи проводится анализ полученных характеристик движения при использовании в качестве смеси водного спиртового раствора. Показаны возможности стабилизации нестационарного течения и управления движением посредством периодически меняющейся тепловой нагрузки на стенке канала.

*Ключевые слова:* уравнения Обербека–Буссинеска, термодиффузия, решение Остроумова–Бириха, численное решение нестационарной задачи тепломассопереноса.

DOI: [10.35634/vm230212](https://doi.org/10.35634/vm230212)

### Введение

Необходимость прогнозирования природных и технологических процессов, связанных с течением жидкостей, требует как можно более полного описания тепломассопереноса в многокомпонентных жидких смесях. Анализ течения смесей формирует отдельный класс задач в отличие от течений однородных сред, поскольку диффузия примеси в жидкости происходит намного медленнее диффузии тепла, что приводит к различиям в структуре и эволюции чисто тепловых и термоконцентрационных течений [1–3]. Кроме того, взаимодействие между конвекцией, теплопроводностью и диффузией осложняется наличием термодиффузионных эффектов, один из которых (эффект Соре, состоящий в появлении в смеси градиента концентрации при изменении температуры) может оказывать существенное влияние на течение жидкости [4, 5]. Один из подходов в исследованиях указанных течений состоит в анализе их характеристик, рассчитанных на основе существующих классических и новых уточненных математических моделей, сформулированных в виде краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных (см., например, [6–8]). К перечисленным моделям относятся в основном уравнения Навье–Стокса и их модификации, при решении которых определяются скорость, давление, температура и концентрация смеси как функции пространственных координат и времени.

Большой удачей при таком методе изучения движения жидкостей считается возможность использования точных решений поставленных краевых задач. Часто точным решением называют не конечные формулы для искомых величин, а по крайней мере вид этих функций, характер их зависимости от времени и/или пространственных координат. Одним из примеров применения точного решения для моделирования конвекции теплопроводных жидкостей является такой вид решения, где функция температуры и/или концентрации линейно зависит от одной из пространственных координат. Впервые на это решение указал

Г. А. Остроумов [9], затем оно было применено в статье Р. В. Бириха [10] для анализа течения теплопроводной жидкости со свободной границей. Необходимо отметить, что в этих работах описывалась чисто тепловая конвекция в однородной по составу жидкости. Позже решение в таком виде использовалось для изучения устойчивости течения бинарной смеси под действием постоянного горизонтального градиента температуры [11, 12]. Авторы работ [13, 14] успешно применили идею построения решения в виде, предложенном Г. А. Остроумовым, для исследования режимов диффузионной испарительной конвекции в двухслойных системах, где верхний слой заполнен парогазовой бинарной смесью. Массовая скорость испарения, теоретически предсказываемая в цитируемых работах на основе анализа точного решения, сопоставима с измеряемой в экспериментах величиной [15]. В работах [11–14] учитывалось влияние эффекта Соре на конвективное течение.

Нужно уточнить, что в [9–14] построено и проанализировано решение стационарных задач. В случае исследования неустановившихся течений построение точного решения уравнений соответствующих математических моделей значительно усложняется и не всегда возможно [16]. Тем не менее применение нестационарного аналога решения Остроумова–Бириха позволяет продвинуться в решении как некоторых задач о движении чистых жидкостей [17, 18], так и описать разделение бинарных смесей под действием эффекта термодиффузии. В представленной работе рассматривается задача построения и анализа решения нестационарных уравнений конвекции двухкомпонентной смеси в случае ее однонаправленного движения и влияния термодиффузионного эффекта. При этом считается, что функции температуры и концентрации зависят от горизонтальной координаты линейно, а от времени и вертикальной координаты — произвольно. Тем самым, решение принадлежит вышеупомянутому классу Остроумова–Бириха, содержащему решения уравнений конвекции, построенные в предположении линейной зависимости функции температуры от продольной координаты. Указанный вид функций температуры и концентрации позволяет расщепить исходную систему уравнений и соответствующие граничные условия на последовательно решаемые краевые задачи Дирихле (для функций, определяющих температуру) и Неймана (для функций, определяющих концентрацию) для уравнений параболического типа, часть из которых является нелинейными. Нахождение функции скорости осложняется тем, что в соответствующее уравнение входит неизвестный параметр, отвечающий за продольный градиент давления, для определения которого необходимо задать дополнительное условие. В этом смысле задача является обратной, в работе предложен авторский алгоритм построения ее численного решения, апробированный на результатах, полученных авторами ранее для более простых случаев решения поставленной задачи [19]. Кроме этого, численная процедура отработана для решения задачи при периодическом распределении температуры по времени. Это означает, что можно описывать режимы, когда тепловая нагрузка увеличивается, уменьшается или отсутствует в определенные моменты времени.

Статья организована следующим образом. В § 1 приводится постановка задачи, вводятся критерии подобия течения, в § 2 описывается применение решения типа Остроумова–Бириха для редукции исходной задачи к последовательно решаемым задачам для нахождения характеристик течения смеси. Параграф 3 посвящен процедуре построения численного решения редуцированной задачи, в § 4 построенное численное решение используется для анализа поведения спиртового раствора этанола и воды при различных режимах нагрева одной из стенок канала, приводится детальное сравнение с полученными ранее результатами для установившегося течения и для нестационарного режима, исследованного ранее посредством более простой постановки задачи. Результаты работы позволяют предсказать поведение конвективных движений двухкомпонентных смесей в неоднородно нагреваемых горизонтальных протяженных каналах в рамках использования представления функций температуры и концентрации в виде линейных зависимостей от горизонтальной координаты,



Рис. 1. Геометрия задачи

а также способствуют пониманию влияния термодиффузионного эффекта на распределение компонентов в смеси.

### § 1. Постановка задачи. Основные предположения о решении

Рассматривается нестационарная задача о разделении бинарной смеси на компоненты под действием эффекта термодиффузии (Соре) в центральной части протяженного горизонтального канала, ограниченного твердыми стенками. Схема течения приведена на рис. 1. Для описания течения используется одна из модификаций уравнений Навье–Стокса для несжимаемой жидкости – система Обербека–Буссинеска, которая имеет вид [7, 8]

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, \\ \mathbf{u}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} &= -\frac{\nabla p}{\rho_0} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} - \mathbf{g}(\beta_1 \theta + \beta_2 c), \\ \theta_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta &= \chi \nabla^2 \theta, \\ c_t + \mathbf{u} \cdot \nabla c &= D \nabla^2 c + D^\theta \nabla^2 \theta. \end{aligned} \quad (1.1)$$

В уравнениях (1.1) искомыми являются следующие величины:  $\mathbf{u} = (u^1, u^2, u^3)$  – вектор скорости,  $p$  – давление с точностью до гидростатического,  $\theta$  и  $c$  – малые отклонения температуры и концентрации одного из компонентов от их средних равновесных значений. Считается, что концентрация второго компонента определяется как  $1 - c$ . В системе (1.1)  $t$  обозначает время,  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  – вектор координат, оператор градиента  $\nabla$  вычисляется по пространственным переменным,  $\nabla^2$  есть оператор Лапласа,  $\mathbf{g}$  – постоянный вектор, как правило,  $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$ , где  $g$  – ускорение силы тяжести. Коэффициенты кинематической вязкости  $\nu$ , температуропроводности  $\chi$ , диффузии  $D$ , термодиффузии  $D^\theta$  и средняя плотность смеси  $\rho_0$  предполагаются постоянными. Уравнение состояния имеет вид

$$\rho = \rho_0(1 - \beta_1 \theta - \beta_2 c),$$

где  $\beta_1, \beta_2$  – коэффициенты теплового и концентрационного расширения соответственно. Отметим, что влияние эффекта Соре учитывается посредством последнего слагаемого в последнем уравнении (1.1), где знак коэффициента  $D^\theta$  указывает на нормальную/аномальную ( $D^\theta < 0/D^\theta > 0$ ) термодиффузию, при которой легкий по плотности компонент перемещается в более/менее нагретую область.

Поскольку в работе изучается течение смеси в центральной части протяженного горизонтального канала, можно считать, следуя [10, 17], что вектор скорости имеет лишь одну ненулевую составляющую: горизонтальную компоненту  $u$ , зависящую только от времени  $t$  и координаты  $y$ . Предполагая также при этом, что функции температуры и концентрации

не зависят от переменной  $z$ , перепишем систему (1.1) в виде

$$\begin{aligned} u_t &= \nu u_{yy} - \frac{1}{\rho_0} p_x, & g(\beta_1 \theta + \beta_2 c) &= \frac{1}{\rho_0} p_y, \\ \theta_t + u \theta_x &= \chi(\theta_{xx} + \theta_{yy}), \\ c_t + u c_x &= D(c_{xx} + c_{yy}) + D^\theta(\theta_{xx} + \theta_{yy}). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Строить численное решение удобнее в безразмерных переменных. Принимая в качестве горизонтального и вертикального масштаба ширину слоя  $L$ , в качестве масштаба температуры ее некоторое среднее значение  $\theta^*$ , введем безразмерные переменные:

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \frac{x}{L}, & \hat{y} &= \frac{y}{L}, & \hat{t} &= \frac{\nu}{L^2} t, & \hat{u} &= \frac{\nu}{g\beta_1\theta^*L^2} u, \\ \hat{p} &= \frac{1}{\rho_0 g \beta_1 \theta^* L} p, & \hat{\theta} &= \frac{1}{\theta^*} \theta, & \hat{c} &= \frac{\beta_2}{\beta_1 \theta^*} c. \end{aligned}$$

В этих переменных система уравнений (1.2) имеет вид (символ «крышка» опущен)

$$\begin{aligned} u_t &= u_{yy} - p_x, & \theta + c &= p_y, \\ \theta_t + \text{Gr} u \theta_x &= \frac{1}{\text{Pr}} (\theta_{xx} + \theta_{yy}), \\ c_t + \text{Gr} u c_x &= \frac{1}{\text{Sc}} [c_{xx} + c_{yy} - \psi(\theta_{xx} + \theta_{yy})], \end{aligned} \quad (1.3)$$

где использованы стандартные в механике критерии подобия  $\text{Gr} = g\beta_1\theta^*L^3/\nu^2$  — число Грасгофа,  $\text{Pr} = \nu/\chi$  — число Прандтля,  $\text{Sc} = \nu/D$  — число Шмидта,  $\psi = -\beta_2 D^\theta / (\beta_1 D)$  — параметр разделения.

Для описания тепломассопереноса в бинарной смеси в горизонтальном слое (рис. 1) с помощью решения краевой задачи для системы (1.3) необходимо задать граничные условия на твердых стенках  $y = 0$  и  $y = 1$  в безразмерных переменных. Для скорости ставятся условия прилипания

$$u(0, t) = u(1, t) = 0. \quad (1.4)$$

Считается, что стенки нагреваются по заданному закону:

$$\theta(x, 0, t) = \theta^l(x, t), \quad \theta(x, 1, t) = \theta^u(x, t), \quad (1.5)$$

где индексы  $l, u$  означают значения величин на нижней и верхней стенке соответственно.

Для функции концентрации задается условие отсутствия потока вещества через твердые стенки. Данное условие с учетом эффекта термодиффузии записывается так:

$$\frac{\partial c}{\partial y} - \psi \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \quad y = 1. \quad (1.6)$$

Для замыкания нестационарной задачи необходимо задать начальные условия:

$$u(y, 0) = u^0(y), \quad \theta(x, y, 0) = \theta^0(x, y), \quad c(x, y, 0) = c^0(x, y). \quad (1.7)$$

Дальнейшее изложение посвящено решению задачи (1.3)–(1.7) и интерпретации полученного решения.

## § 2. Использование решения Остроумова–Бириха для построения решения задачи (1.3)–(1.7)

Необходимо заметить, что условия совместности системы (1.3) подробно обсуждаются в работе [20]. Доказано, что для существования решения уравнений (1.3) необходимо, чтобы сумма функций  $\theta(x, y, t)$  и  $c(x, y, t)$  была линейной функцией относительно переменной  $x$ . Это утверждение позволяет искать решение системы (1.3) в предположении, что

$$\theta(x, y, t) = v_1(y, t)x + v_4(y, t), \quad c(x, y, t) = v_2(y, t)x + v_5(y, t), \quad (2.1)$$

где функции  $v_i(y, t)$ ,  $i = 1, 2, 4, 5$ , подлежат определению. Неупорядоченные обозначения связаны с последующим изложением процедуры численного решения обсуждаемой задачи, через пропущенное в (2.1)  $v_3$  будет обозначаться функция скорости  $u$ . Вид искомых функций (2.1) указывает на то, что строящееся решение является обобщением решения Остроумова–Бириха на случай описания нестационарной конвекции в бинарной смеси.

Предложенные выражения (2.1) для функций  $\theta$  и  $c$  подставляются в два последних уравнения системы (1.3), которые при расщеплении относительно переменной  $x$  дают соотношения

$$\begin{aligned} v_{1t} &= a_1 v_{1yy}, & v_{2t} &= a_2 (v_{2yy} - a_3 v_{1yy}), \\ v_{4t} &= a_1 v_{4yy} - a_4 v_1 v_3, & v_{5t} &= a_2 (v_{5yy} - a_3 v_{2yy}) - a_4 v_2 v_3, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где  $v_3$  может быть найдена с помощью двух первых уравнений системы (1.3), которые приводят к равенству

$$v_{3t} = v_{3yy} - \int_0^y (v_1(\eta, t) + v_2(\eta, t)) d\eta - f(t). \quad (2.3)$$

В (2.2) введены обозначения

$$a_1 = \frac{1}{\text{Pr}}, \quad a_2 = \frac{1}{\text{Sc}}, \quad a_3 = \psi, \quad a_4 = \text{Gr}.$$

Функция  $f(t)$  из (2.3) связана с функцией давления  $p(x, y, t)$ , которая находится также из двух первых уравнений системы (1.3) и имеет вид

$$p(x, y, t) = \left( \int_0^y (v_1(\eta, t) + v_2(\eta, t)) d\eta + f(t) \right) x + \int_0^y (v_4(\eta, t) + v_5(\eta, t)) d\eta + f_1(t). \quad (2.4)$$

Вследствие того, что для давления не задаются физически обоснованные граничные условия на твердых стенках, функция  $f_1(t)$  остается неопределенной. Это известная особенность задач гидродинамики (см., например, [6]). Более подробно вывод соотношений (2.2)–(2.4) изложен в работе [19].

Для того чтобы определить функцию  $f(t)$ , соответствующую горизонтальному градиенту давления, необходимо задать дополнительное условие, каковым естественно считать условие на расход жидкости через поперечное сечение слоя:

$$\int_0^1 v_3(y, t) dy = q(t), \quad (2.5)$$

где функция  $q(t)$  известна.

Перепишем граничные условия (1.4)–(1.7) в переменных  $v_i(y, t)$ ,  $i = 1, \dots, 5$ . Условия прилипания (1.4) остаются теми же с точностью до замены  $u$  на  $v_3$ :

$$v_3(0, t) = v_3(1, t) = 0. \quad (2.6)$$

Условия нагрева стенок (1.5) с учетом линейного распределения температуры относительно горизонтальной координаты запишутся как

$$\theta(x, 0, t) = \theta^l(x, t) = c_1(t)x + c_2(t), \quad \theta(x, 1, t) = \theta^u(x, t) = c_3(t)x + c_4(t), \quad (2.7)$$

где функции  $c_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , заданы. В обозначениях  $v_1, v_4$  условия (2.7) перепишутся в виде

$$v_1(0, t) = c_1(t), \quad v_1(1, t) = c_2(t), \quad v_4(0, t) = c_3(t), \quad v_4(1, t) = c_4(t). \quad (2.8)$$

Балансовые соотношения (1.6) для функций  $v_2, v_5$  перейдут в равенства

$$\begin{aligned} v_{2y}(0, t) &= a_3 v_{1y}(0, t), & v_{2y}(1, t) &= a_3 v_{1y}(1, t), \\ v_{5y}(0, t) &= a_3 v_{4y}(0, t), & v_{5y}(1, t) &= a_3 v_{4y}(1, t). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Начальные условия (1.7) в переменных  $v_i$  запишутся так:

$$v_i(y, 0) = b_i(y), \quad (2.10)$$

где  $b_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , — заданные функции.

Итак, функции  $v_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , находятся из уравнений (2.2), (2.3), граничных условий (2.6), (2.8), (2.9) и начальных условий (2.10). Функция  $f(t)$  определяется вместе с функциями  $v_i$  с помощью дополнительного условия (2.5). После нахождения  $v_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , функции температуры и концентрации восстанавливаются согласно формул (2.1). Давление выражается последним с помощью равенства (2.4) с точностью до произвольной функции времени  $f_1(t)$ .

### §3. Описание процедуры построения численного решения задачи (2.2), (2.3), (2.6), (2.8)–(2.10)

В данном параграфе дано описание построения численного решения поставленной задачи. Алгоритм основан на неявной конечно-разностной схеме. Введем вычислительную сетку

$$(y_n, t_k), \quad \text{где } y_n = (n-1)h, \quad t_k = k\tau, \quad n = 1, \dots, N, \quad k = 0, \dots, M,$$

здесь  $h = 1/(N-1)$  — шаг по пространству,  $\tau$  — шаг по времени. Тогда

$$\{v_{i,n}^k = v_i(y_n, t_k)\}$$

есть приближенное решение, определенное в узле вычислительной сетки. Для аппроксимации второй производной функции  $v_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , используется центральная разность

$$\Delta v_{i,n}^k = \frac{1}{h^2}(v_{i,n+1}^k - 2v_{i,n}^k + v_{i,n-1}^k).$$

Поскольку приближенное решение в точке  $t_k$  известно, можно определить решение на следующем временном шаге  $t_{k+1}$ . При решении первого уравнения в (2.2) с первыми двумя условиями из (2.8) используется следующая схема:

$$v_{1,n}^{k+1} = v_{1,n}^k + \beta_1 \Delta v_{1,n}^{k+1}, \quad v_{1,1}^{k+1} = c_1, \quad v_{1,N}^{k+1} = c_3, \quad \text{где } \beta_1 = (a_1 \tau)/h^2. \quad (3.1)$$

Поскольку  $\{v_{1,n}^{k+1}\}$  уже известна из (3.1), можно найти  $v_{2,n}^{k+1}$  из следующих соотношений

$$v_{2,n}^{k+1} = v_{2,n}^k + \beta_2 \Delta v_{2,n}^{k+1} - a_3 \beta_2 \Delta v_{1,n}^{k+1}, \quad \text{где } \beta_2 = a_2 \tau/h^2. \quad (3.2)$$

Аппроксимация граничных условий (2.9) для функции  $v_2$  (и  $v_5$ ) основывается на методе фиктивных областей (см., например, [21]). Вводится фиктивное значение за границей области, с помощью которого первая производная решения на границе области аппроксимируется со вторым порядком точности.

Для того чтобы найти функцию  $f(t)$ , запишем интегральное условие (2.5) в виде

$$\frac{dq}{dt} = \int r(y, t) dy - f(t), \quad \text{где} \quad r(y, t) = v_{3yy}(y, t) - \int (v_1(y, t) + v_2(y, t)) dy.$$

Тогда, используя метод трапеций для численного интегрирования, получим формулу для вычисления  $f(t_k)$ :

$$f(t_k) = \frac{h}{1-h} \sum_{n=2}^{N-1} r_n^k - \frac{dq}{dt}(t_k), \quad \text{где}$$

$$r_n^k = \Delta v_{3,n}^k - h \left( \frac{1}{2}(v_{1,1}^{k+1} + v_{2,1}^{k+1}) + \frac{1}{2}(v_{1,n}^{k+1} + v_{2,n}^{k+1}) + \sum_{m=2}^{n-1} (v_{1,m}^{k+1} + v_{2,m}^{k+1}) \right).$$

Поскольку  $f(t)$  теперь определена, можно записать конечно-разностную схему для  $v_3$ :

$$v_{3,n}^{k+1} = v_{3,n}^k + \beta_3 \Delta v_{3,n}^{k+1} - \tau h \left( \frac{1}{2}(v_{1,1}^{k+1} + v_{2,1}^{k+1}) + \frac{1}{2}(v_{1,n}^{k+1} + v_{2,n}^{k+1}) + \sum_{m=2}^{n-1} v_{1,m}^{k+1} + v_{2,m}^{k+1} \right) - \tau f(t_k), \quad v_{3,1}^{k+1} = v_{3,N}^{k+1} = 0, \quad \text{где} \quad \beta_3 = \frac{\tau}{h^2}. \quad (3.3)$$

Для нахождения функций  $v_4$  и  $v_5$  используются следующие схемы:

$$v_{4,n}^{k+1} = v_{4,n}^k + \beta_1 \Delta v_{4,n}^{k+1} - \tau a_4 v_{1,n}^{k+1} v_{3,n}^{k+1}, \quad v_{4,1}^{k+1} = c_2, \quad v_{4,N}^{k+1} = c_4; \quad (3.4)$$

$$v_{5,n}^{k+1} = v_{5,n}^k + \beta_2 \Delta v_{5,n}^{k+1} - a_3 \beta_2 \Delta v_{4,n}^{k+1} - \tau a_4 v_{2,n}^{k+1} v_{3,n}^{k+1}. \quad (3.5)$$

В выражениях (3.1)–(3.5)  $n = 2, \dots, N-1$ . В качестве начальных условий используются равенства (2.10):  $v_{i,n}^0 = b_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ ,  $n = 1, \dots, N$ .

Устойчивость неявной схемы не зависит от размера шага по времени, поэтому выбрано значение  $\tau = 100h^2$ . Соотношения (3.1)–(3.5) представляют собой систему линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей для расчета приближенного решения в точке  $t_{k+1}$ . Данная система решается методом прогонки. В следующем параграфе обсуждается использование описанной процедуры построения численного решения для анализа течения в спиртовом растворе воды и этанола с концентрацией последнего 70%.

#### § 4. Анализ конвекции в водном растворе этанола при различных режимах нагрева нижней стенки канала

Впервые решение уравнений (2.2)–(2.4) в стационарном случае (все величины не зависят от переменной  $t$ ) обсуждается в работе [22], выписано в квадратурах в [19] и в конечных формулах в недавней статье [23]. Подробный анализ постановок граничных условий и их влияния на решение можно найти в [23]. Нужно упомянуть, что в стационарной постановке вследствие того, что для функций  $v_2$  и  $v_5$  ставятся граничные условия Неймана, задача теряет свойство единственности решения [24], функция концентрации  $c(x, y) = v_2(y)x + v_5(y)$  определяется с точностью до произвольной постоянной. Для ее нахождения задается дополнительное интегральное условие на среднюю концентрацию в сечении  $x = 0$ . Использование построенного стационарного решения позволяет сделать выводы о том, что при учете

эффекта термодиффузии неоднородности концентрации проявляются при самой большой толщине слоя, выполнении условия замкнутости потока, под действием гипергравитации, при самых больших продольных и самых маленьких поперечных градиентах температуры на стенках канала. Если эффектом термодиффузии пренебречь, можно аналитически доказать, что концентрация остается постоянной при всех остальных меняющихся параметрах задачи. Полученное стационарное решение адекватно отражает механические свойства исследуемого течения.

В работе [19] проводится численный анализ сходимости нестационарного движения к стационарному только для линейной части задачи: определяются функции  $v_1, v_2, v_3$  без нахождения функций  $v_4$  и  $v_5$ . С помощью метода преобразования Лапласа [25] задача для нахождения функций  $v_i, i = 1, 2, 3$ , сводится к задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которой строится в квадратурах для функций образов по Лапласу. Последующее численное обращение образов по Лапласу показывает, что решение выходит на найденный стационарный режим, если стабилизируются граничные условия для функции  $v_1$  на больших временах, а также при согласовании начального градиента концентрации  $v_2(y, 0)$  с другими параметрами системы посредством выведенного в [19] соотношения. Последнее связано с заданием упомянутого выше дополнительного условия на среднюю концентрацию при решении стационарной задачи.

В представленной работе анализируется решение полной нелинейной нестационарной задачи (2.2), (2.3), (2.6), (2.8)–(2.10) для трех постановок граничных условий:

- (1) во-первых, проводится тестирование изложенного в § 3 алгоритма численного решения посредством сравнения на больших временах с полученным в [23] точным стационарным решением;
- (2) во-вторых, проверяется, что происходит с рассчитываемыми характеристиками, если нет согласованности начального градиента концентрации  $v_2(y, 0)$  с его значением в стационарном решении из [23];
- (3) в-третьих, строится решение задачи при распределении тепловой нагрузки на нижней стенке канала по периодическому закону от времени.

Итак, пусть канал шириной  $L = 0.005$  м заполнен спиртовым раствором (30% воды и 70% этанола) при характерной температуре  $\theta^* = 20^\circ\text{C}$ . Поскольку при реализации пунктов (1) и (2) будет производиться сравнение со стационарным режимом течения, будем считать, что нагрев стенок в безразмерных величинах осуществляется по закону

$$\theta^l = 0.00125x + 1, \quad \theta^u = 0.00025x + 0.5, \quad (4.1)$$

то есть  $\theta^l, \theta^u$  не зависят от времени. Так как рассматривается только область  $x > 0$ , то из (4.1) следует, что нижняя стенка в этом случае нагрета сильнее, чем верхняя. Расчет проводится при выполнении условия замкнутости потока, то есть расход смеси через поперечное сечение слоя равен нулю ( $q(t) = 0$  в формуле (2.5)). Физические величины взяты из монографии [5] и приведены во втором столбце таблицы 1. Стационарное течение для указанных параметров находится по формулам

$$\begin{aligned} v_1 &= -0.001y + 0.00125, & v_2 &= -0.00024y - 0.00063, \\ v_3 &= -0.0000517y^4 + 0.000103y^3 - 0.000062y^2 + 0.0000103y, \\ v_4 &= 1 + 0.00015y^7 - 0.0006895y^6 + 0.00118y^5 - 0.0009y^4 + 0.000265y^3 - 0.5y, \\ v_5 &= 0.76 + 0.0069y^7 + 0.0058y^6 - 0.0579y^5 + 0.07y^4 - 0.025y^3 - 0.12y. \end{aligned} \quad (4.2)$$



Таблица 1. Параметры задачи

$a_1 = 1/\text{Pr}$	0.03595	$b_1$	0.00125	$c_1$	0.00125
$a_2 = 1/\text{Sc}$	0.000191	$b_2$	изменяется	$c_2$	изменяется
$a_3 = \psi$	0.24	$b_3$	0	$c_3$	0.00025
$a_4 = \text{Gr}$	4428.6	$b_4$	1	$c_4$	0.5
		$b_5$	0.760145		

Для обеспечения гладкости нестационарного решения граничные условия  $c_i(t)$  должны быть согласованы с начальными условиями  $b_i(y)$ . Величины  $b_i$  и  $c_i$ , использующиеся в расчетах, приведены в четвертом и шестом столбцах таблицы 1. В случае (1) в качестве значения начального градиента концентрации  $b_2$  используется выведенное в [19] соотношение, при выполнении которого функции  $v_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , выходили на стационарное решение (4.2) при  $t \rightarrow \infty$ . Рассчитанное значение в этом случае есть  $b_2 = -0.000749$ , величина  $c_2 = 1$  совпадает с  $b_4$  для согласования начального и граничного условий для функции  $v_4$ . Ожидаемый результат при таких условиях — выход нестационарного решения, построенного по алгоритму, изложенному в параграфе § 3, на стационарный режим, выражаемый формулами (4.2).

В случае (2) проводится расчет при невыполнении условия стабилизации из [19], принимается, что  $b_2 = 0$ , значение  $c_2 = 1$  не изменяется. Ожидается, что выхода решения на режим (4.2) при больших временах не будет.

В случае (3) величина  $b_2 = -0.000749$  согласуется с условием выхода на стационарный режим, как в случае (1), но нагрев нижней стенки осуществляется по периодическому закону, принимается  $c_2 = \cos(\pi t/2)$ . Опишем результаты решения краевых задач, условия которых описаны в пунктах (1)–(3).

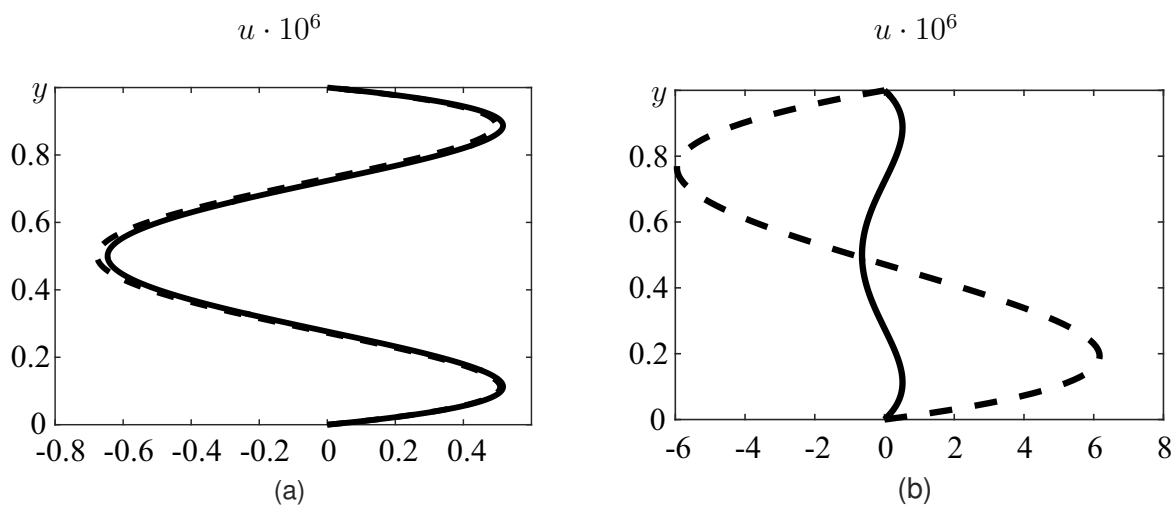
На рис. 2 и 3 представлены характеристики течения, соответствующие случаям (1) и (2). На рис. 2, *a*, *b* изображены профили скорости, сплошная линия — стационарное решение из (4.2), пунктирная — рассчитанное нестационарное решение на момент времени  $t = 10^4$ . На рис. 2, *a* показан результат расчета, произведенного для согласованного с формулами (4.2) значения  $b_2$ , продемонстрирован выход на стационарный режим при больших временах. В то время как для расчета, результат которого изображен на рис. 2, *b*, было выбрано значение  $b_2 = 0$ , и сходимости к стационарному решению здесь нет. Тем не менее в обоих случаях решение устанавливается, профили скорости больше не меняются при увеличении числа шагов по времени (расчет продолжался до  $t = 10^6$ ).

Концентрация этанола (рис. 3, *a*, *b*) при этом меняется в разных диапазонах: при  $b_2 = -0.000749$  содержание этанола меняется от 0.7 до 0.82, в то время как при  $b_2 = 0$  изменения концентрации соответствуют интервалу (0.68, 0.78). В обоих случаях можно наблюдать нормальный термодиффузионный эффект: легкий по плотности этанол скапливается возле более нагретой стенки  $y = 0$ . Результаты расчета демонстрируют справедливость утверждения о сходимости нестационарного решения к стационарному (4.2) при согласованности граничных условий и дополнительного условия на начальный градиент концентрации. Аналогичный вывод был сделан в работе [19] при решении линейной части полной нестационарной задачи (2.2), (2.3), (2.6), (2.8)–(2.10).

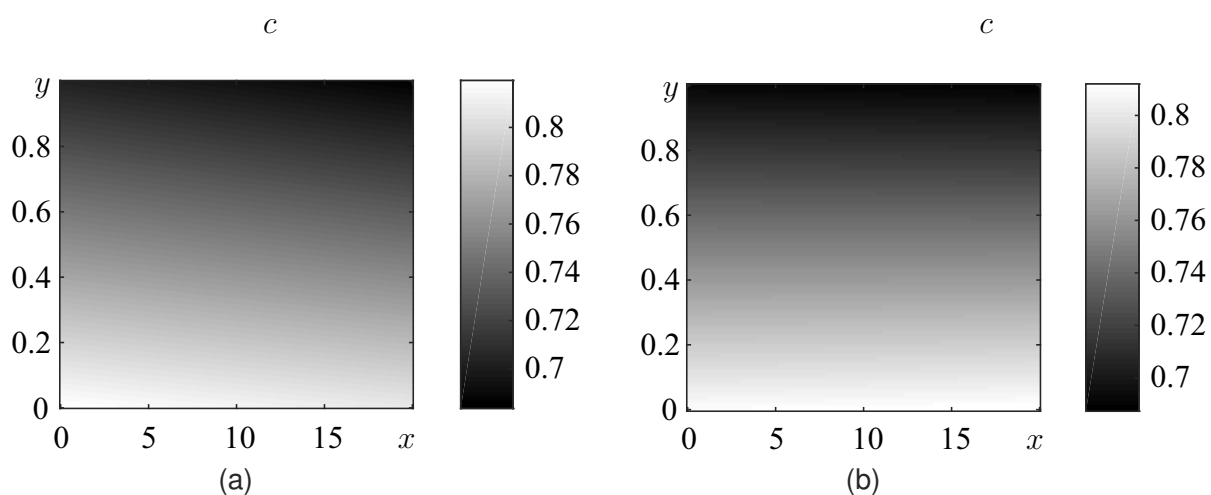
Рассмотрим теперь ситуацию (3), когда нижняя стенка нагревается по периодическому закону

$$\theta^l = 0.00125x + \cos(\pi t/2).$$

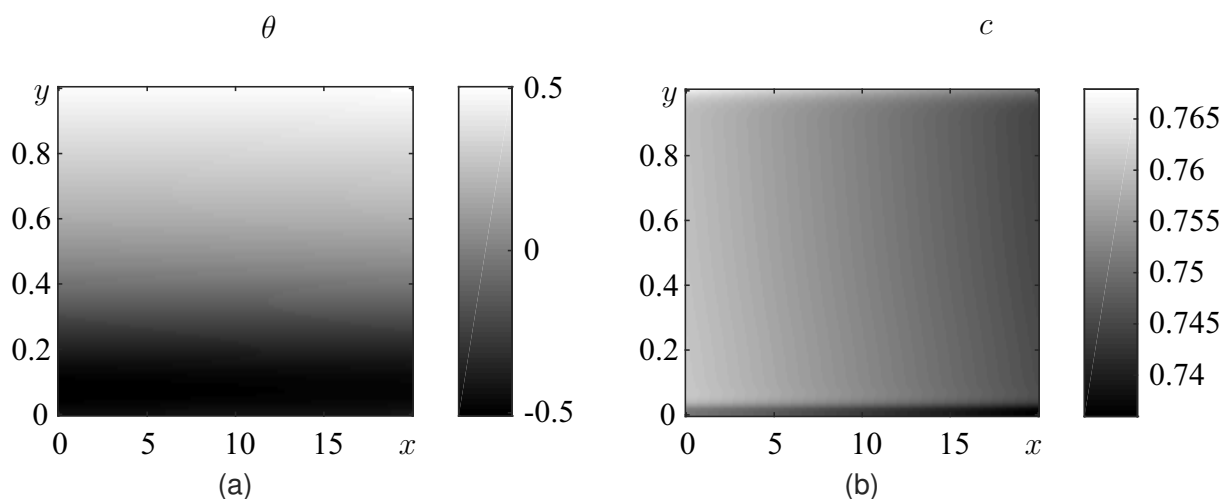
В этом случае для минимального (максимального) периодически повторяющегося значения



**Рис. 2.** Профиль скорости (а) для расчета в случае (1), то есть при выполнении условий сходимости к стационарному решению (4.2) при  $t \rightarrow \infty$ . Профиль скорости (б) для расчета в случае (2), то есть при невыполнении одного из условий сходимости к стационарному решению (4.2) при  $t \rightarrow \infty$ . Сплошная линия на обоих рисунках соответствует стационарному решению для функции скорости из (4.2), пунктирная – нестационарному решению, рассчитанному при  $t = 10^4$ .



**Рис. 3.** Поле концентрации (а) для расчета в случае (1), то есть при выполнении условий сходимости к стационарному решению (4.2) при  $t \rightarrow \infty$ . Поле концентрации (б) для расчета в случае (2), то есть при невыполнении условий сходимости к стационарному решению (4.2) при  $t \rightarrow \infty$ .



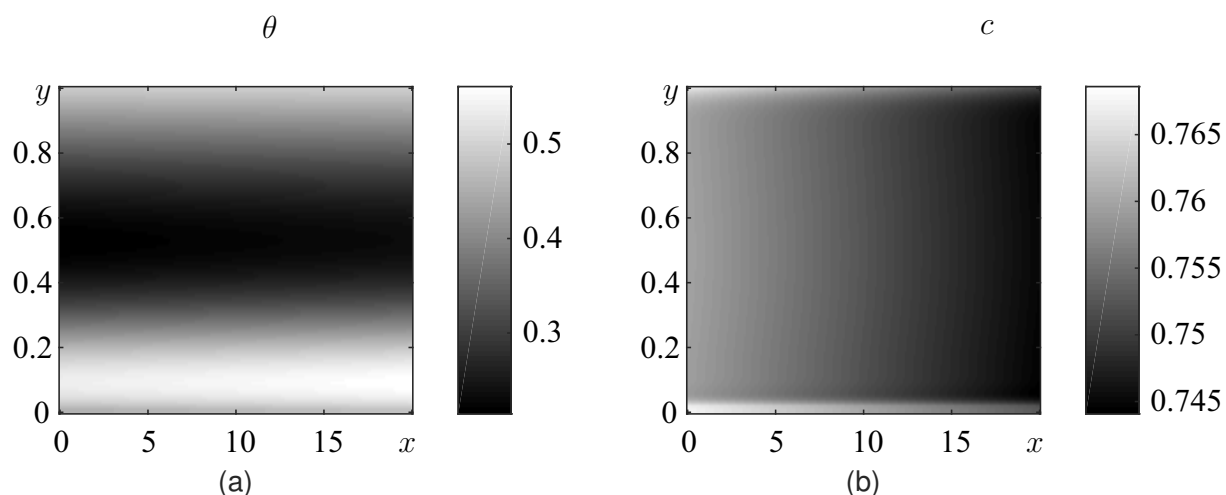
**Рис. 4.** Поле температуры (а), поле концентрации (б) для расчета в случае периодического нагрева нижней стенки на 270-ом временном шаге

функции  $\cos(\pi t/2)$  нижняя стенка будет менее (более) нагрета, чем верхняя. Возникающий градиент температуры влечет возникновение градиента концентрации. При этом диффузия примеси происходит гораздо медленнее переноса тепла, поэтому говорить об эффекте термодиффузии можно только при достижении значений расчетного времени, близких к диффузионному времени ( $L^2/D \sim 56000$  с). На рис. 4 приведены поля температуры (а) и концентрации (б) в момент, когда нижняя стенка холодная. Можно видеть отток примеси от холодной стенки (рис. 4(б)), концентрация этанола возле нее приблизительно равна 0.73 и повышается до 0.765 возле верхней стенки. На рис. 5 поля температуры (а) и концентрации (б) изображены в момент, когда наименьшая температура наблюдается в середине слоя. Легко увидеть, что именно в центре слоя концентрация этанола также самая малая ( $\sim 0.745$ ), при приближении к стенкам канала она возрастает до  $\sim 0.765$ . Профили скорости здесь не приводятся, но расчет показывает, что происходит их постепенное установление. Начиная с некоторого временного шага, профиль скорости почти не меняется. Это связано с тем, что изменяющаяся функция  $c_2(t)$  не входит в выражение (2.3) (и в его конечно-разностный аналог (3.3)) для расчета скорости. Полученные результаты вычислений по пункту (3) показывают работоспособность изложенного в § 3 алгоритма при моделировании тепломассопереноса в бинарной смеси, заполняющей протяженный узкий канал, с изменяющейся тепловой нагрузкой на стенке.

Отметим, что при проведении расчетов число узлов сетки  $N$  варьировалось для дополнительного анализа сходимости метода от  $N_1 = 101$  до  $N_2 = 301$ . Обнаружено, что число узлов  $N_1$  недостаточно для корректного вычисления функции  $v_3$  в тестовой задаче (1). При значении  $N_2$  функция скорости  $v_3$  сходится к стационарному значению и дальнейшее увеличение числа узлов сетки не ведет к изменению решения. Все расчеты, обсуждаемые в данном параграфе, проведены на сетке с количеством узлов равным 301.

## Заключение

В данной работе представлен численный алгоритм для решения нестационарной задачи, описывающей движение бинарной смеси под действием эффекта термодиффузии с линейной зависимостью плотности от параметров состояния. Ключевыми моментами являются: использование решения Остроумова–Бириха, позволяющее свести задачу к системе последовательно решаемых краевых задач для параболических уравнений; применение дополни-



**Рис. 5.** Поле температуры (а), поле концентрации (б) для расчета в случае периодического нагрева нижней стенки на 470-ом временном шаге

тельного интегрального условия на расход жидкости, необходимого для нахождения функции скорости. Предложенный алгоритм, вообще говоря, позволяет рассчитывать движение смеси при произвольных зависимостях тепловой нагрузки на стенках канала от времени. Это в свою очередь дает возможность оценивать интенсивность проявления эффекта Соре (перемещение примеси под действием градиента температуры) и моделировать ситуации, когда возможно установление стационарного режима течения, что важно, например, при проведении лабораторных экспериментов по измерению коэффициентов диффузии и термодиффузии (см., например, [26,27]).

Авторы благодарят д. ф.-м. н. проф. В. К. Андреева за организацию их сотрудничества и полезные обсуждения.

**Финансирование.** Исследования первого автора выполнены при финансовой поддержке Красноярского математического центра, финансируемого Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2023-912).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мизёв А. И. Тепловая и концентрационная конвекция Марангони в задачах с плоской и цилиндрической геометрией: автореф. дис. ... д-ра физ.-матем. наук. Пермь, 2019. 36 с.
2. Taraut A. V., Smorodin B. L., Lücke M. Collisions of localized convection structures in binary fluid mixtures // *New Journal of Physics*. 2012. Vol. 14. 093055. <https://doi.org/10.1088/1367-2630/14/9/093055>
3. Mercader I., Batiste O., Alonso A., Knobloch E. Travelling convectons in binary fluid convection // *Journal of Fluid Mechanics*. 2013. Vol. 722. P. 240–266. <https://doi.org/10.1017/jfm.2013.77>
4. Köhler W., Morozov K. I. The Soret effect in liquid mixtures – A review // *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*. 2016. Vol. 41. No. 3. P. 151–197. <https://doi.org/10.1515/jnet-2016-0024>
5. Рыжков И. И. Термодиффузия в смесях: уравнения, симметрии, решения и их устойчивость. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2013. <https://elibrary.ru/item.asp?id=21131251>
6. Андреев В. К., Гапоненко Ю. А., Гончарова О. Н., Пухначев В. В. Современные математические модели конвекции. М.: Физматлит, 2008.
7. де Гроот С., Мазур П. Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1964.
8. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Том VI. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
9. Остроумов Г. А. Свободная конвекция в условиях внутренней задачи. М.: Гостехиздат, 1952.

10. Бирих Р.В. О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости // Прикладная механика и техническая физика. 1966. Т. 7. № 3 (37). С. 69–72.
11. Любимов Д.В., Любимова Т.П., Никитин Д.А., Перминов А.В. Устойчивость адвективного течения бинарной смеси в плоском горизонтальном слое с идеально теплопроводными границами // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2010. № 3. С. 129–139. <https://elibrary.ru/item.asp?id=13917593>
12. Lyubimova T. P., Lyubimov D. V., Nikitin D. A., Perminov A. V. Stability of the advective flow of a binary mixture in a horizontal layer with adiabatic boundaries // Comptes Rendus Mécanique. 2013. Vol. 341. Issues 4–5. P. 483–489. <https://doi.org/10.1016/j.crme.2013.02.002>
13. Bekezhanova V. B., Goncharova O. N. Stability of the exact solutions describing two-layer flows with evaporation at the interface // Fluid Dynamics Research. 2016. Vol. 48. Issue 6. 061408. <https://doi.org/10.1088/0169-5983/48/6/061408>
14. Bekezhanova V. B., Goncharova O. N. Analysis of characteristics of two-layer convective flows with diffusive type evaporation based on exact solutions // Microgravity Science and Technology. 2020. Vol. 32. Issue 2. P. 139–154. <https://doi.org/10.1007/s12217-019-09764-0>
15. Lyulin Yu., Kabov O. Evaporative convection in a horizontal liquid layer under shear-stress gas flow // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2014. Vol. 70. P. 599–609. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2013.11.039>
16. Bratsun D., Vyatkin V. Closed-form non-stationary solutions for thermo and chemovibrational viscous flows // Fluids. 2019. Vol. 4. Issue 3. 175. <https://doi.org/10.3390/fluids4030175>
17. Пухначев В.В. Нестационарные аналоги решения Бириха // Известия Алтайского государственного университета. 2011. № 1–2 (69). С. 62–69. <https://elibrary.ru/item.asp?id=17103846>
18. Андреев В.К., Лемешкова Е.Н. Линейные задачи конвективных движений с поверхностями раздела. Красноярск: СФУ, 2018.
19. Andreev V. K., Stepanova I. V. Non-stationary unidirectional motion of binary mixture in long flat layer // International Journal of Applied and Computational Mathematics. 2020. Vol. 6. Issue 6. Article number: 169. <https://doi.org/10.1007/s40819-020-00924-0>
20. Андреев В.К., Степанова И.В. Об условиях существования однонаправленных движений бинарных смесей в модели Обербека–Буссинеска // Сибирский журнал индустриальной математики. 2019. Т. 22. № 2. С. 3–12. <https://doi.org/10.33048/sibjim.2019.22.201>
21. Zalizniak V. Essentials of scientific computing. Woodhead Publishing, 2008.
22. Андреев В.К., Степанова И.В. Однонаправленные течения бинарных смесей в модели Обербека–Буссинеска // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2016. № 2. С. 13–24. <https://elibrary.ru/item.asp?id=25934464>
23. Stepanova I. V. On thermodiffusion of binary mixture in a horizontal channel at inhomogeneous heating the walls // Журнал Сибирского федерального университета. Серия «Математика и физика». 2022. Т. 15. Вып. 6. P. 776–784. <https://www.mathnet.ru/rus/jsfu1047>
24. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968.
25. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.
26. Kozlova S. V., Ryzhkov I. I., Bou-Ali M. M. Modeling of separation in a binary mixture with negative Soret effect in a cylindrical thermogravitational column // Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics. 2021. Vol. 46. Issue 2. P. 109–120. <https://doi.org/10.1515/jnet-2020-0045>
27. Gaponenko Y., Mialdun A., Shevtsova V. Experimental and numerical analysis of mass transfer in a binary mixture with Soret effect in the presence of weak convection // The European Physical Journal E. 2014. Vol. 37. Issue 10. Article number: 90. <https://doi.org/10.1140/epje/i2014-14090-5>

Поступила в редакцию 10.02.2023

Принята к публикации 15.04.2023

Степанова Ирина Владимировна, д. ф.-м. н., старший научный сотрудник, отдел дифференциальных уравнений механики, Институт вычислительного моделирования СО РАН, 660036, Россия, г. Красноярск, ул. Академгородок, 50/44.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4255-2762>

E-mail: [stepiv@icm.krasn.ru](mailto:stepiv@icm.krasn.ru)

Зализняк Виктор Евгеньевич, PhD, доцент, кафедра математического моделирования и процессов управления, Сибирский федеральный университет, 660041, Россия, г. Красноярск, пр-т Свободный, 79.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1930-5926>

E-mail: [vzalizniak@sfu-kras.ru](mailto:vzalizniak@sfu-kras.ru)

**Цитирование:** И. В. Степанова, В. Е. Зализняк. Численное решение задачи нестационарной конвекции бинарной смеси в горизонтальном слое // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2023. Т. 33. Вып. 2. С. 365–381.

*I. V. Stepanova, V. E. Zalizniak*

**Numerical solution of nonstationary problem for convection of binary mixture in horizontal layer**

*Keywords:* Oberbeck–Boussinesque equations, thermal diffusion, Ostroumov–Birikh solution, numerical solution of nonstationary heat and mass transfer problem.

MSC2020: 76R10, 76M99

DOI: [10.35634/vm230212](https://doi.org/10.35634/vm230212)

Nonstationary motion of a liquid binary mixture in a narrow long horizontal channel with rigid walls heated according to a certain law is considered. The possibility of applying the Ostroumov–Birikh solution to the description of the flow under study is used. It reduces the problem to solving a mixed boundary value problem for a system of parabolic equations. A feature of the problem is an additional integral condition on the fluid flow rate. It allows finding the pressure gradient together with the functions of velocity, temperature, and concentration. Applying the constructed numerical procedure, the analysis of the obtained characteristics of motion is carried out using water-ethanol solution as a mixture. The possibilities of stabilizing the unsteady flow and controlling the motion by means of a periodically changing thermal load on the channel wall are shown.

**Funding.** The study of the first author was funded by the Krasnoyarsk Mathematical Center and financed by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation in the framework of the establishment and development of regional Centers for Mathematics Research and Education (Agreement No. 075-02-2022-873).

#### REFERENCES

1. Mizev A. I. *Thermal and concentration Marangoni convection in problems with plate and cylindrical geometry*, Abstract of Dr. Sci. (Phys.–Math.) Dissertation, Perm, 2019, 36 p. (In Russian).
2. Taraut A. V., Smorodin B. L., Lücke M. Collisions of localized convection structures in binary fluid mixtures, *New Journal of Physics*, 2012, vol. 14, 093055. <https://doi.org/10.1088/1367-2630/14/9/093055>
3. Mercader I., Batiste O., Alonso A., Knobloch E. Travelling convectons in binary fluid convection, *Journal of Fluid Mechanics*, 2013, vol. 722, pp. 240–266. <https://doi.org/10.1017/jfm.2013.77>
4. Köhler W., Morozov K. I. The Soret effect in liquid mixtures — A review, *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 2016, vol. 41, no. 3, pp. 151–197. <https://doi.org/10.1515/jnet-2016-0024>
5. Ryzhkov I. I. *Termodiffuziya v smesyakh: uravneniya, simmetrii, resheniya i ikh ustoychivost'* (Thermodiffusion in mixtures: equations, symmetries, solutions and their stability), Novosibirsk: Russian Academy of Sciences, Siberian Branch, 2013. <https://elibrary.ru/item.asp?id=21131251>
6. Andreev V. K., Gaponenko Yu. A., Goncharova O. N., Pukhnachev V. V. *Mathematical models of convection*, Berlin–Boston: De Gruyter, 2020. <https://doi.org/10.1515/9783110655469>
7. de Groot S. R., Mazur P. *Non-equilibrium thermodynamics*, Amsterdam: North-Holland, 1962.
8. Landau L. D., Lifshitz E. M. *Course of theoretical physics. Volume 6. Fluid mechanics*, Pergamon Press, 1987.
9. Ostroumov G. A. *Svobodnaya konvektsiya v usloviyakh vnutrennei zadachi* (Free convection in inner problem conditions), Moscow: Gostekhizdat, 1952.
10. Birikh R. V. Thermocapillary convection in a horizontal layer of liquid, *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1966, vol. 7, issue 3, pp. 43–44. <https://doi.org/10.1007/BF00914697>
11. Lyubimov D. V., Lyubimova T. P., Nikitin D. A., Perminov A. V. Stability of a binary-mixture advective flow in a plane horizontal layer with perfectly heat conducting boundaries, *Fluid Dynamics*, 2010, vol. 45, issue 3, pp. 458–467. <https://doi.org/10.1134/S0015462810030129>
12. Lyubimova T. P., Lyubimov D. V., Nikitin D. A., Perminov A. V. Stability of the advective flow of a binary mixture in a horizontal layer with adiabatic boundaries, *Comptes Rendus Mécanique*, 2013, vol. 341, issues 4–5, pp. 483–489. <https://doi.org/10.1016/j.crme.2013.02.002>

13. Bekezhanova V.B., Goncharova O.N. Stability of the exact solutions describing two-layer flows with evaporation at the interface, *Fluid Dynamics Research*, 2016, vol. 48, no. 6, 061408. <https://doi.org/10.1088/0169-5983/48/6/061408>
14. Bekezhanova V.B., Goncharova O.N. Analysis of characteristics of two-layer convective flows with diffusive type evaporation based on exact solutions, *Microgravity Science and Technology*, 2020, vol. 32, issue 2, pp. 139–154. <https://doi.org/10.1007/s12217-019-09764-0>
15. Lyulin Yu., Kabov O. Evaporative convection in a horizontal liquid layer under shear-stress gas flow, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2014, vol. 70, pp. 599–609. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2013.11.039>
16. Bratsun D., Vyatkin V. Closed-form non-stationary solutions for thermo and chemovibrational viscous flows, *Fluids*, 2019, vol. 4, issue 3, 175. <https://doi.org/10.3390/fluids4030175>
17. Pukhnachev V.V. Non-stationary analogues of the Birikh solution, *Izvestiya Altaiskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2011, nos. 1–2 (69), pp. 62–69 (in Russian). <https://elibrary.ru/item.asp?id=17103846>
18. Andreev V.K., Lemeshkova E.N. *Lineinye zadachi konvektivnykh dvizhenii s poverkhnostyami razdela* (Linear problems of convective motions with interfaces), Krasnoyarsk: Siberian Federal University, 2018.
19. Andreev V.K., Stepanova I.V. Non-stationary unidirectional motion of binary mixture in long flat layer, *International Journal of Applied and Computational Mathematics*, 2020, vol. 6, issue 6, article number: 169. <https://doi.org/10.1007/s40819-020-00924-0>
20. Andreev V.K., Stepanova I.V. On the conditions for existence of unidirectional motions of binary mixtures in the Oberbeck–Boussinesq model, *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2019, vol. 13, issue 2, pp. 185–193. <https://doi.org/10.1134/S1990478919020017>
21. Zaluzniak V. *Essentials of scientific computing*, Woodhead Publishing, 2008.
22. Andreev V.K., Stepanova I.V. Unidirectional flows of binary mixtures within the framework of the Oberbeck–Boussinesq model, *Fluid Dynamics*, 2016, vol. 51, issue 2, pp. 136–147. <https://doi.org/10.1134/S0015462816020022>
23. Stepanova I.V. On thermodiffusion of binary mixture in a horizontal channel at inhomogeneous heating the walls, *Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics*, 2022, vol. 15, issue 6, pp. 776–784. <https://www.mathnet.ru/eng/jsfu1047>
24. Friedman A. *Partial differential equations of parabolic type*, Prentice-Hall, 1964.
25. Lavrent'ev M. A., Shabat B. V. *Metody teorii funktsii kompleksnogo peremennogo* (Methods of theory of functions of a complex variable), Moscow: Nauka, 1973.
26. Kozlova S. V., Ryzhkov I. I., Bou-Ali M. M. Modeling of separation in a binary mixture with negative Soret effect in a cylindrical thermogravitational column, *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 2021, vol. 46, issue 2, pp. 109–120. <https://doi.org/10.1515/jnet-2020-0045>
27. Gaponenko Y., Mialdun A., Shevtsova V. Experimental and numerical analysis of mass transfer in a binary mixture with Soret effect in the presence of weak convection, *The European Physical Journal E*, 2014, vol. 37, issue 10, article number: 90. <https://doi.org/10.1140/epje/i2014-14090-5>

Received 10.02.2023

Accepted 15.04.2023



---

Irina Vladimirovna Stepanova, Doctor of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Department of Differential Equations in Mechanics, Institute of Computational Modelling, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. Akademgorodok, 50/44, Krasnoyarsk, 660036, Russia.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4255-2762>

E-mail: [stepiv@icm.krasn.ru](mailto:stepiv@icm.krasn.ru)

Viktor Evgen'evich Zalizniak, PhD, Associate Professor, Department of Mathematical Modeling and Control, Siberian Federal University, pr. Svobodnyi, 79, Krasnoyarsk, 660041, Russia.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1930-5926>

E-mail: [vzalizniak@sfu-kras.ru](mailto:vzalizniak@sfu-kras.ru)

**Citation:** I. V. Stepanova, V. E. Zalizniak. Numerical solution of nonstationary problem for convection of binary mixture in horizontal layer, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2023, vol. 33, issue 2, pp. 365–381.