МАТЕМАТИКА 2023. Т. 33. Вып. 2. С. 240–258.

УДК 517.977

© *Д. А. Куликов*

УСТОЙЧИВОСТЬ И ЛОКАЛЬНЫЕ БИФУРКАЦИИ ОДНОМОДОВЫХ СОСТОЯНИЙ РАВНОВЕСИЯ ВАРИАЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ ГИНЗБУРГА–ЛАНДАУ

Рассматривается одна из версий обобщенного вариационного уравнения Гинзбурга–Ландау, дополненная периодическими краевыми условиями. Для такой краевой задачи изучен вопрос о существовании, устойчивости и локальных бифуркациях одномодовых состояний равновесия. Показано, что в случае близком к критическому трехкратного нулевого собственного значения в задаче об устойчивости одномодовых пространственно неоднородных состояний равновесия реализуются докритические бифуркации двумерных инвариантных торов, заполненных пространственно неоднородными состояниями равновесия.

Анализ поставленной задачи опирается на такие методы теории бесконечномерных динамических систем как теория инвариантных многообразий и аппарат нормальных форм. Для решений, формирующих инвариантные торы, получены асимптотические формулы.

Ключевые слова: вариационное уравнение Гинзбурга–Ландау, краевая задача, устойчивость, бифуркации, асимптотические формулы.

DOI: 10.35634/vm230204

Введение

В 1975 году появилась работа [1] (см. также [2]), в которой было выведено следующее уравнение с частными производными

$$u_t = (\alpha + i\beta)u - (a + ic)u|u|^2 + (d + ib)u_{xx}, \tag{0.1}$$

где α, $a > 0$, $d \geqslant 0$, β, b, $c \in R$, $u = u(t, x)$ — комплекснозначная функция. Это уравнение получило название «комплексное уравнение Гинзбурга–Ландау». Реже его называют уравнением Курамото–Цузуки [3]. Далее будем придерживаться первого варианта названия («уравнение Гинзбурга–Ландау»). В обзоре [4] описан широкий спектр его приложений, приведены содержательные частные варианты, а также актуальные обобщения уравнения Гинзбурга–Ландау. В этом обзоре, пожалуй, пропущена только одна из обобщенных версий этого уравнения, которое носит название «нелокальное уравнение Гинзбурга–Ландау». Этот вариант уравнения представляет интерес в связи с изучением такого явления как ферромагнетизм [5, 6].

Значительное число работ посвящено вопросу существования глобальных аттракторов для решений различных версий уравнения Гинзбурга–Ландау [6–13]. Вместе с тем достаточно большое число работ посвящено отысканию точных решений, как правило, в виде бегущих волн с последующим анализом их устойчивости, а также отыскания периодических и почти периодических по t решений [14–20], как правило, на основе применения метода Галеркина с последующим бифуркационным анализом полученной системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Добавим, что в связи с задачами нелинейной оптики достаточно часто изучался слабодиссипативный вариант уравнения Гинзбурга–Ландау. Для него характерно равенство $d = 0$. В [21, 22] изучены локальные бифуркации бегущих волн в периодической краевой задаче для слабодиссипативной версии уравнения Гинзбурга–Ландау и его многомерных обобщений.

Особый интерес представляет та версия уравнения (0.1), в которой $\beta = c = b = 0$. Она имеет собственное название — «вариационное уравнение Гинзбурга–Ландау» (ВУГЛ) [4] и имеет следующий вид

$$u_t = \alpha u - au|u|^2 + du_{xx}. \tag{0.2}$$

Уместно подчеркнуть, что уравнение (0.2) было получено ранее в теории конденсированных сред для описания фазовых превращений [4, 23]. Уравнение (0.2) в данном разделе физики носит название Ψ^4-модель Гинзбурга–Ландау. Если в уравнении (0.1) заменить нелинейное слагаемое $-au|u|^2$ на $-au|u|^{2p}$, то такой вариант уравнения следует назвать Ψ^{2p+2}-моделью Гинзбурга–Ландау и, естественно, оно также заслуживает внимания в связи с приложениями в теории конденсированных сред, теории сверхпроводимости, предложенной в свое время В. Л. Гинзбургом и Л. Д. Ландау.

При анализе всех версий уравнения Гинзбурга–Ландау и в том числе ВУГЛ чаще других используются периодические краевые условия

$$u(t, x + 2l) = u(t, x), \quad l > 0,$$

т. е. далее предполагается изучать краевую задачу

$$u_t = \alpha u - au|u|^{2p} + du_{xx}, \tag{0.3}$$
$$u(t, x + 2l) = u(t, x), \tag{0.4}$$

где $p \in \mathbb{N}$, α, a, $d > 0$, а $u = u(t, x)$ — комплекснозначная функция. При этом нормировки

$$t = \frac{t_1}{\alpha}, \quad x = \frac{lx_1}{\pi}, \quad u = \left(\frac{\alpha}{a}\right)^{1/(2p)} u_1$$

приводят краевую задачу (0.3), (0.4) к следующему виду

$$u_{1_{t1}} = u_1 - u_1|u_1|^{2p} + d_1 u_{1_{x_1 x_1}}, \tag{0.5}$$

где теперь функция $u_1(t_1, x_1)$ имеет период 2π по переменной x_1. В нормированном варианте $d_1 = d(\pi/l)^2/\alpha$, а остальные коэффициенты в правой части нормированного уравнения (0.5) равны 1, если сравнивать с уравнением (0.3). Далее, индекс «1» у переменных t_1, x_1, u_1 и коэффициента d_1 писать не будем и, следовательно, будем изучать уравнение (0.5), в котором период по переменной x у функции $u(t, x)$ равен 2π, т. е.

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x). \tag{0.6}$$

Краевая задача (0.5), (0.6) при $p = 1, 2$ изучалась в [24, 25].

В заключении этого раздела отметим, что неоднократно высказывалась гипотеза (см., например, [3]), что анализ уравнения Гинзбурга–Ландау, в котором слагаемое $-au|u|^2$ заменено на $-au|u|^{2p}$, где $p \geqslant 2$, приводит к динамике, отличной от динамики решений классического варианта уравнения Гинзбурга–Ландау, который, как уже отмечалось, предполагает, что $p = 1$. Поэтому анализ вариантов этого уравнения с $p \geqslant 2$ весьма актуален и заслуживает отдельного изучения.

Подчеркнем еще раз содержательность анализа краевой задачи (0.3), (0.4) (0.5), (0.6)). В данной работе будет, в частности, показано, что для диссипативной версии уравнения Гинзбурга–Ландау характерны докритические («жесткие») бифуркации. Актуальность этого вопроса отмечалась в ряде работ (см., например, [3, 7]).

§ 1. Постановка задачи

В данной работе рассмотрим периодическую краевую задачу (КЗ) для обобщенного ВУГЛ

$$u_t = u - u|u|^{2p} + du_{xx}, \tag{1.1}$$

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x), \tag{1.2}$$

где $p \in \mathbb{N}$, $d > 0$, $u(t,x) = u_1(t,x) + iu_2(t,x)$ — комплекснозначная функция.

Дополним КЗ (1.1), (1.2) начальным условием

$$u(0, x) = f(x), \tag{1.3}$$

где комплекснозначная функция $f(x)$принадлежит $\mathbb{H}_2^1$ — пространству 2π-периодических функций, принадлежащих при $x \in [-\pi, \pi]$ пространству Соболева $\mathbb{W}_2^1[-\pi,\pi]$ [26]. Из результатов работы [27] вытекает, что начально-краевая задача (1.1), (1.2), (1.3) локально корректно разрешима, т. е. у нее существует решение $u(t,x)$, если $t \in (0, T]$. При всех таких t и всех $x \in \mathbb{R}$ решение $u(t,x)$ имеет непрерывные частные производные любого порядка. Отметим также, что, если заменить уравнение (1.1) на его линеаризованный вариант

$$u_t = u + du_{xx}, \tag{1.4}$$

то начально-краевая задача (1.4), (1.3), (1.2) порождает аналитическую полугруппу линейных ограниченных операторов [28]. Проверка этого факта базируется на том, что решение начально-краевой задачи (1.4), (1.3), (1.2) может быть найдено в явном виде

$$u(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \exp\Big((1 - dn^2)t\Big) \exp(inx),$$

где $\{f_n\}$ — набор коэффициентов Фурье функции $f(x)$. Добавим, что функциональный ряд при $t > 0$ сходится равномерно вместе со всеми своими производными. Иными словами, при $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$ решение $u(t,x)$ начально-краевой задачи (1.4), (1.3), (1.2) имеет частные производные любого порядка ($u(t,x) \in \mathbb{C}^\infty$ ($t > 0$, $x \in \mathbb{R}$)).

В данной работе будут изучаться вопросы, возникающие при анализе нелинейной КЗ (1.1), (1.2). Отметим, что кроме нулевого состояния равновесия КЗ (1.1), (1.2) может иметь состояния равновесия

$$u = u_n(x) = \eta_n \exp(inx). \tag{1.5}$$

Подстановка правой части равенства (1.5) в уравнение (1.1) приводит к тому, что для $|\eta_n|$ получим уравнение

$$1 - |\eta_n|^{2p} - dn^2 = 0.$$

Откуда находим, что $|\eta_n|^{2p} = 1 - dn^2$ и решения (1.5) существуют, если $1 - dn^2 > 0$. Следовательно, указанные решения существуют при $n = 0, \pm 1, \ldots, \pm n_0$, где $n_0 = [1/\sqrt{d}]$, если $1/\sqrt{d} \notin \mathbb{N}$ или $n_0 = [1/\sqrt{d}] - 1$, если $1/\sqrt{d} \in \mathbb{N}$.

Итак, $\eta_n = (1 - dn^2)^{1/(2p)} \exp(ih)$, где h — произвольное действительное число. Следовательно, КЗ (1.1), (1.2) имеет однопараметрическое семейство состояний равновесия

$$M_1(h, n)\colon u_n(x, h) = (1 - dn^2)^{1/(2p)} \exp(ih) \exp(inx), \quad n = 0, \pm 1, \ldots, \pm n_0. \tag{1.6}$$

Семейство $M_1(h,n)$ формирует одномерное инвариантное многообразие КЗ (1.1), (1.2).

Замечание 1. Для решений КЗ (1.1), (1.2) характерно свойство, которое в физике называют трансляционной инвариантностью: если $u(t, x)$ решение КЗ (1.1), (1.2), то и функция $u(t, x + h)$ будет ее решением.

В работе будут рассмотрены два следующих вопроса:

(1) об устойчивости состояний равновесия $u_n(x, h)$;

(2) о локальных бифуркациях решений $u_n(x, h)$ при смене ими устойчивости.

Подчеркнем, что в силу предшествующих замечаний при дальнейших построениях можно считать, что $\eta_n \in \mathbb{R}_+$ — множеству положительных действительных чисел.

§ 2. Об устойчивости одномерных инвариантных многообразий

В этом разделе рассмотрим вопрос об устойчивости одномерных инвариантных многообразий $M_1(h, n)$, порожденных однопараметрическим семейством состояний равновесия (1.6). Для этого положим

$$u(t, x) = \eta_n \exp(inx) \exp(ih)[1 + w(t, x)], \tag{2.1}$$

где $n = 0, \pm 1, \dots, \pm n_0, h \in \mathbb{R}$. После подстановки правой части формулы (2.1) в КЗ (1.1), (1.2) для отклонения w получим вспомогательную КЗ

$$w_t = \mathsf{A}_n w - \eta_n^{2p} p\Big(F_2(w) + F_3(w) + F_0(w)\Big), \tag{2.2}$$

$$w(t, x + 2\pi) = w(t, x). \tag{2.3}$$

Здесь

$$\mathsf{A}_n w = \mathsf{A}_n(p) w = -p\eta_n^{2p}(w + \overline{w}) + d(w_{xx} + 2inw_x),$$

$$F_2(w) = F_2(w, p) = \frac{1}{2}\Big((p + 1)w^2 + 2(p + 1)w\overline{w} + (p - 1)\overline{w}^2\Big),$$

$$F_3(w) = F_3(w, p) = \frac{1}{6}\Big((p^2 - 1)w^3 + 3(p^2 + p)w^2\overline{w} + 3(p^2 - 1)w\overline{w}^2 + (p^2 - 3p + 2)\overline{w}^3\Big),$$

а к нелинейности $F_0(w)$ отнесены слагаемые, имеющие в нуле более высокий порядок малости. Поясним, что $F_2(w)$, $F_3(w)$ и остальные слагаемые появляются после разложения функции $(1 + w)^{p+1}(1 + \overline{w})^p$ по степеням $w, \overline{w}$. В результате получаем многочлен степени $2p + 1$. Приведен явный вид только для квадратичных и кубических слагаемых. Слагаемые, имеющие более высокий порядок малости, выписывать не обязательно, так как их явный вид не будет использоваться при дальнейших построениях.

Замена $\tau = p\eta_n^{2p} t$ приводит КЗ (2.2), (2.3) к следующему виду

$$w_\tau = \mathsf{A}_n w - F_2(w) - F_3(w) - F_0(w), \tag{2.4}$$

$$w(\tau, x + 2\pi) = w(\tau, x), \tag{2.5}$$

где теперь $\mathsf{A}_n w = -(w + \overline{w}) + a(w_{xx} + 2niw_x), a = d/\big((\eta_n)^{2p} p\big)$ и, следовательно, с формальной точки зрения этот линейный дифференциальный оператор (ЛДО) не зависит от p, но зависит от номера одномодового решения $u_n(x)$. Подчеркнем, что $F_2(w) = F_2(w, p)$, $F_3(w) = F_3(w, p)$, $F_0(w) = F_0(w, p)$, т. е. нелинейные слагаемые зависят от p, но не зависят от n.

Эти построения сводят анализ устойчивости многообразий $M_1(h, n)$, а также состояний равновесия, их формирующих, к анализу устойчивости нулевого состояния равновесия вспомогательной КЗ (2.4), (2.5), где правая часть зависит от n как от параметра.

Для анализа устойчивости, а также изучения локальных бифуркаций в окрестности нулевого состояния равновесия КЗ (2.4), (2.5) ее удобно переписать в действительной форме. Пусть

$$w(t,x) = w_1(t,x) + iw_2(t,x).$$

Положим $W(t,x) = \operatorname{colon}\Big(w_1(t,x), w_2(t,x)\Big)$. Справедливы равенства

$$F_2(w) = F_{21}(w_1,w_2) + iF_{22}(w_1,w_2), \qquad F_3(w) = F_{31}(w_1,w_2) + iF_{32}(w_1,w_2),$$
$$F_{21}(w_1,w_2) = (2p+1)w_1^2 + w_2^2, \quad F_{22}(w_1,w_2) = 2w_1w_2,$$
$$F_{31}(w_1,w_2) = \frac{1}{3}\Big((4p^2-1)w_1^3 + 3(2p-1)w_1w_2^2\Big), \quad F_{32}(w_1,w_2) = (2p-1)w_1^2w_2 + w_2^3,$$
$$\mathsf{A}_n w = -2w_1 + a(w_{1xx} - 2nw_{2x}) + ia(2nw_{1x} + w_{2xx}).$$

Следовательно, КЗ (2.4), (2.5) можно переписать в действительной форме записи следующим образом

$$W_\tau = A_nW - F_2(W) - F_3(W) - F_0(W), \tag{2.6}$$
$$W(t,x+2\pi) = W(t,x), \tag{2.7}$$

где уже использована векторная запись изучаемой КЗ. Поэтому в ней

$$W = \operatorname{colon}(w_1,w_2),\ F_2(W) = \operatorname{colon}\Big(F_{21}(w_1,w_2), F_{22}(w_1,w_2)\Big),$$
$$F_3(W) = \operatorname{colon}\Big(F_{31}(w_1,w_2), F_{32}(w_1,w_2)\Big),$$

а через $F_0(W)$ обозначена двумерная вектор-функция, имеющая более высокий порядок малости по сравнению с $F_3(W)$.

Наконец, через A_n обозначен ЛДО, действующий в пространстве двумерных вектор-функций $W(t,x)$, который определен следующим равенством

$$A_nW = \begin{pmatrix} -2 + a\partial_x^2 & -2na\partial_x \\ 2na\partial_x & a\partial_x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix},$$

где, естественно, $n = 0, \pm1, \ldots, \pm n_0$, а натуральное n_0 было указано ранее. Естественно, компоненты w_1, w_2 вектор-функции W по переменной x имеют период 2π и достаточно гладко зависят от своих аргументов.

§ 3. Анализ устойчивости нулевого решения вспомогательной краевой задачи

В этом разделе будет рассмотрен вопрос об устойчивости нулевого решения КЗ (2.6), (2.7) в линейном приближении. Вместо нелинейной КЗ (2.6), (2.7) сначала рассмотрим следующую линейную КЗ

$$W_\tau = A_nW, \tag{3.1}$$
$$W(\tau,x+2\pi) = W(\tau,x), \tag{3.2}$$

у которой существует счетный набор решений вида

$$W_k(\tau,x) = \exp(\lambda_k\tau)H_k(x),$$

где k принадлежит $\mathbb{Z}$ — множеству целых чисел. В свою очередь, λ_k, $H_k(x)$ определяются как собственные значения, собственные функции ЛДО A_n. Итак, λ_k определяем как значения параметра λ, при которых для любого рассматриваемого n у КЗ

$$A_n H(x) = \lambda H(x), \tag{3.3}$$

$$H(x + 2\pi) = H(x) \tag{3.4}$$

существуют нетривиальные решения. КЗ (3.3), (3.4) имеет счетное множество собственных значений λ_k и соответствующих им собственных элементов $H_k(x)$ ($\lambda_k = \lambda_k(n)$, $H_k(x) = H_k(x, n)$). Если теперь положить

$$H_k(x; n) = \begin{pmatrix} \delta_{k1} \\ \delta_{k2} \end{pmatrix} \exp(ikx),$$

где $k \in \mathbb{Z}$, δ_{k1}, δ_{k2} из $\mathbb{R}(\mathbb{C})$ — множества действительных или комплексных чисел, то в результате находим, что $\lambda = \lambda_k(n)$ — корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 + 2p_k(n)\lambda + q_k(n) = 0, \tag{3.5}$$

где $p_k(n) = (1 + ak^2) > 0$ при любом k, $q_k(n) = ak^2(2 + ak^2 - 4an^2)$.

Пусть $\lambda_{kj}(n)$ — корни характеристического уравнения (3.5), $n = 0, \pm 1, \ldots, \pm n_0$, $k \in \mathbb{Z}$, $j = 1, 2$. Очевидно, что $\lambda_{01}(n) = 0$, $\lambda_{02}(n) = -2$ при любых рассматриваемых n. Далее, $k \neq 0$ ($k = \pm 1, \pm 2, \ldots$). Тогда неравенства $\mathrm{Re}\lambda_{kj}(n) < 0$ выполнены при всех таких k, для которых $2 + a - 4an^2 > 0$ или $a < a_n = 2/(4n^2 - 1)$. Если же $a > a_n$, то можно указать такое $k = k_*$, что $\lambda_{k_* j}(n) > 0$ хотя бы при одном из значений j. Наконец, при $a = a_n$ ЛДО A_n имеет трехкратное нулевое собственное число, которому отвечают собственные функции

$$H_0(x; n) = H_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad H_1(x; n) = \begin{pmatrix} \cos x \\ -2n \sin x \end{pmatrix}, \qquad H_2(x; n) = \begin{pmatrix} \sin x \\ 2n \cos x \end{pmatrix}.$$

Остальные собственные значения ЛДО A_n при $a = a_n$ лежат в левой полуплоскости комплексной плоскости, выделяемой неравенством

$$\mathrm{Re}\,\lambda \leqslant -\gamma_0 < 0.$$

Замечание 2. Подчеркнем, что все собственные числа ЛДО A_n при любом n действительны. Это может быть показано двумя способами. Во-первых, элементарно проверяется, что каждое из уравнений семейства характеристических уравнений (3.5) при любом k и n имеет только действительные корни. Во-вторых, достаточно стандартный анализ показывает, что ЛДО A_n — это симметричный ЛДО, так как справедливо тождество

$$\langle A_n f, g \rangle = \langle f, A_n g \rangle,$$

где $f = \mathrm{colon}\Big(f_1(x), f_2(x)\Big)$, $g = \mathrm{colon}\Big(g_1(x), g_2(x)\Big)$,

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} (f, g)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \Big(f_1(x) g_1(x) + f_2(x) g_2(x)\Big)\, dx.$$

Собственные вектор-функции ЛДО A_n при каждом n формируют полную ортогональную систему (см., например, [29]).

Из предыдущих построений и, в частности, замечания 2 вытекает что справедливы два следующих утверждения.

Лемма 1. *Пусть $n = 0$. Тогда все решения линейной КЗ* (3.1)*,* (3.2) *устойчивы при любых значениях параметра a. Если $n \neq 0$, то решения КЗ* (3.1)*,* (3.2) *устойчивы, если $a \leqslant a_n$, и неустойчивы при $a > a_n$.*

Перейдем теперь к вопросу об устойчивости нулевого решения КЗ (2.4), (2.5) и (2.6), (2.7). Фактически речь идет об одной и той же КЗ, так как КЗ (2.4), (2.5) — это комплексный ее вариант записи, а КЗ (2.6), (2.7) — ее запись в виде системы в $\mathbb{R}^2$.

При всех рассматриваемых n у КЗ (2.4), (2.5) существует одномерное инвариантное многообразие $M_{1C}(h,n)$, сформированное однопараметрическим семейством пространственно однородных состояний равновесия $w(t,x) = \exp(ih) - 1$, где h — произвольная действительная постоянная. Естественно, у КЗ (2.6), (2.7) также существует одномерное инвариантное многообразие $M_{1R}(h,n)$: $W \in M_{1R}(h,n)$, если $W = \operatorname{colon}(w_1, w_2)$, а $w_1 = \cos h - 1, w_2 = \sin h$.

Из результатов работ [30–32] вытекает, что справедливо следующее утверждение, формулировка которого использует терминологию из этих статей.

Лемма 2. *Пусть $n = 0$. Тогда одномерное инвариантное многообразие КЗ* (2.4)*,* (2.5) *$M_{1C}(h,0)$ $(M_{1R}(h,0))$ локальный аттрактор при всех a.*

Если же $n \neq 0$, то $M_{1C}(h,n)$ $(M_{1R}(h,n))$ — локальный аттрактор при $a < a_n$, и это инвариантное многообразие седловое (неустойчивое), если $a > a_n$. При $a = a_n$ реализуется критический случай в задаче об устойчивости соответствующих инвариантных многообразий.

Замечание 3. Если $n = 0$, т. е. $M_{1C}(h,0)$ локальный аттрактор для решений соответствующих КЗ (2.4), (2.5), то ее нулевое решение устойчиво, но не может быть асимптотически устойчивым, так как в окрестности нулевого состояния равновесия существует семейство состояний равновесия $\exp(ih) - 1$, если $h \ll 1$. Аналогичное утверждение справедливо и при $n \neq 0$. При таких n нулевое решение КЗ (2.4), (2.5) устойчиво при $a < a_n$ и седловое при $a > a_n$.

Перейдем к основной КЗ (1.1), (1.2). Из предыдущих построений вытекает справедливость утверждения.

Теорема 1. *Пусть $M_1(h,n)$ — одномерное инвариантное многообразие КЗ* (1.1)*,* (1.2)*, порожденное состояниями равновесия* (1.5)*. При $n = 0$ $(M_1(h,0))$ оно — локальный аттрактор при всех a (d). Если $n = \pm 1, \ldots, \pm n_0$, то $M_1(h,n)$ — локальный аттрактор, если*

$$a < a_n = \frac{2}{4n^2 - 1} \quad \left(d < d_n(p) = \frac{2p}{(4+2p)n^2 - 1}\right),$$

а решения, его формирующие, устойчивы. Если же $a > a_n$ $(d > d_n(p)$, то соответствующее многообразие $M_1(h,n)$ седловое, а решения, его формирующие, неустойчивы.

Напомним, что d и a связаны равенством $d = ap(\eta_n)^{2p}$. Откуда и получаем, что критическое значение $d = d_n(p) = 2p/\Big((4+2p)n^2 - 1\Big)$. Очевидно, что $d_n(p)$ убывает с ростом n и возрастает с увеличением p.

§ 4. Бифуркации инвариантных многообразий

Анализ бифуркаций одномерных инвариантных многообразий $M_1(h, n)$ нелинейной КЗ (1.1), (1.2) предполагает изучение вспомогательной КЗ (2.6), (2.7) при

$$a = a_n(1 + \gamma\varepsilon), \tag{4.1}$$

где $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $0 < \varepsilon_0 \ll 1$, $\gamma = \pm 1$ или 0. Последний вариант выбора γ возникает в тех случаях, когда КЗ изучается при $a = a_n$.

Итак, рассмотрим КЗ (2.6), (2.7) при выбранных равенством (4.1) значениях. В результате ее можно переписать в следующем виде

$$W_\tau = \Big(A_0(n) + \gamma\varepsilon A_1(n)\Big)W - F_2(W) - F_3(W) - F_0(W), \tag{4.2}$$

$$W(\tau, x + 2\pi) = W(\tau, x), \tag{4.3}$$

где вектор-функции $F_2(W)$, $F_3(W)$ были определены ранее. Наконец, ЛДО $A_0(n)$, $A_1(n)$ имеют следующий вид

$$A_0(n) = \begin{pmatrix} -2 + a_n\partial_x^2 & -2na_n\partial_x \\ 2na_n\partial_x & a_n\partial_x^2 \end{pmatrix}, \qquad A_1(n) = \begin{pmatrix} a_n\partial_x^2 & -2na_n\partial_x \\ 2na_n\partial_x & a_n\partial_x^2 \end{pmatrix}. \tag{4.4}$$

Напомним, что ЛДО $A_0(n)$ имеет трехкратное нулевое собственное значение. У возмущенного ЛДО $A_0(n)+\varepsilon A_1(n)$ собственное значение $\lambda_0 = 0$ сохраняется, но оно при $\varepsilon \neq 0$ будет однократным. Вместе с этим у возмущенного ЛДО $A_0(n) + \varepsilon A_1(n)$ появляется двукратное собственное число

$$\lambda(\varepsilon) = \lambda(\varepsilon, n) = \gamma\varepsilon\frac{2}{4n^2 + 1} + o(\varepsilon) \quad (n = \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{4.5}$$

отличное от нуля, если $\gamma \neq 0$, но вместе с тем близкое к нулю. При этом остальные собственные значения ЛДО $A_0(n) + \varepsilon A_1(n)$ лежат в полуплоскости, выделяемой неравенством

$$\operatorname{Re}\lambda \leqslant -\gamma_0 < 0, \tag{4.6}$$

где $\gamma_0 > 0$ не зависит от ε. Следовательно, у КЗ (4.2), (4.3) реализуется случай, близкий к критическому, трехкратного нулевого собственного значения. Прежде чем приступить к анализу бифуркационной задачи отметим одну особенность КЗ (4.2), (4.3).

Рассмотрим линейное подпространство фазового пространства $\tilde{\mathbb{H}}_2^1$ КЗ (4.2), (4.3), которое определим следующим образом. Вектор-функция $f(x) = \operatorname{colon}\Big(f_1(x), f_2(x)\Big) \in \tilde{\mathbb{H}}_2^1$, если $f(x) \in \mathbb{H}_2^1$, но вместе с этим $f_1(x)$ — четная функция, а $f_2(x)$ — нечетная функция, т. е. справедливы тождества $f_1(-x) = f_1(x)$, $f_2(-x) = -f_2(x)$.

Очевидно, что в силу специфики правой части уравнения (4.2) подпространство $\tilde{\mathbb{H}}_2^1$ инвариантно для решений КЗ (4.2), (4.3). Это означает, что если $f(x) \in \tilde{\mathbb{H}}_2^1$ $(u(0, x) = f(x))$, то при всех $\tau \in [0, T]$, на котором существует решение КЗ (4.2), (4.3) справедливо следующее равенство

$$w_1(\tau, -x) = w_1(\tau, x), \quad w_2(\tau, -x) = -w_2(\tau, x). \tag{4.7}$$

Условие (4.7) вместе с условиями периодичности позволяет сначала вместо бифуркационной задачи для КЗ (4.2), (4.3) рассмотреть аналогичные вопросы для вспомогательной КЗ

$$W_\tau = A_0(n)W + \gamma\varepsilon A_1(n)W - F_2(W) - F_3(W) - F_0(W), \tag{4.8}$$

$$w_{1x}(t, 0) = w_{1x}(t, \pi) = 0, \; w_2(t, 0) = w_2(t, \pi) = 0, \tag{4.9}$$

если считать при этом, что $x \in [0, \pi]$. Формулы, определяющие линейные и нелинейные операторы из правой части уравнения (4.8), остаются прежними. Изменения касаются лишь спектральных свойств ЛДО (4.4), что связано с изменением области его определения. Теперь ЛДО определен на вектор-функциях $f(x) = \operatorname{colon}\Big(f_1(x), f_2(x)\Big)$, где компоненты $f_j(x)$ — достаточно гладкие функции, удовлетворяющие краевым условиям (4.9), т. е.

$$f_1'(0) = f_1'(\pi) = f_2(0) = f_2(\pi) = 0.$$

При $a = a_n$ ЛДО $A_0(n)$ имеет простое нулевое собственное число, а у ЛДО $A_0(n) + \gamma\varepsilon A_1(n)$ есть также простое собственное число, определенное равенством (4.5). Остальные собственные значения этого ЛДО лежат в полуплоскости выделяемой неравенством (4.6). Напомним, что в данном случае собственному числу $\lambda_0 = 0$ ЛДО $A_0(n)$ отвечает собственный элемент (собственная вектор-функция)

$$H(x; n) = H_1(x; n) = \begin{pmatrix} \cos x \\ -2n \sin x \end{pmatrix}.$$

Следовательно, из результатов работ [31, 32] вытекает, что у КЗ (4.8), (4.9) существует одномерное инвариантное многообразие $V_1(\varepsilon, n)$. Решения КЗ (4.8), (4.9) из достаточно малой окрестности нулевого состояния равновесия приближаются к $V_1(\varepsilon, n)$ со скоростью экспоненты. Итак, у вспомогательной КЗ (4.8), (4.9) при $a \approx a_n$ возникает случай близкий к критическому простого нулевого собственного значения.

В таком варианте постановки задачи решения, принадлежащие $V_1(\varepsilon, n)$, можно и целесообразно искать в следующем виде $W(\tau, x) = W(x, z, \varepsilon; n)$, где

$$W(x, z, \varepsilon; n) = \varepsilon^{1/2} z H(x; n) + \varepsilon Q(x, z; n) + \varepsilon^{3/2} P(x, z; n) + \varepsilon^2 R(x, z, \varepsilon; n). \tag{4.10}$$

Здесь $z = z(s)$, $s = \varepsilon\tau$ — «медленное» время. Наконец,

$$P(x, z; n) = \operatorname{colon}\Big(P_1(x, z; n), P_2(x, z; n)\Big), \quad Q(x, z; n) = \operatorname{colon}\Big(Q_1(x, z; n), Q_2(x, z; n)\Big),$$
$$H(x; n) = \operatorname{colon}(\cos x, -2n \sin x), \quad R(x, z, \varepsilon; n) = \operatorname{colon}\Big(R_1(x, z, \varepsilon; n), R_2(x, z, \varepsilon; n)\Big).$$

Компоненты вектор-функций $Q = Q(x, z; n)$, $P = P(x, z; n)$, $R = R(x, z, \varepsilon; n)$ при всех рассматриваемых значениях n достаточно гладко зависят от x, z, ε, удовлетворяют краевым условиям (4.9) и ортогональны вектор-функции $H(x; n)$:

$$\langle Q, H \rangle = \langle P, H \rangle = \langle R, H \rangle = 0 \quad \left(\langle f, H \rangle = \int_0^\pi \Big(f(x), H(x; n)\Big) dx\right).$$

Последние условия вытекают из результатов работ [30–32], т. е. из свойств одномерного инвариантного (центрального) многообразия $V_1(\varepsilon, n)$.

Прежде чем приступить к дальнейшему изложению алгоритма нахождения членов суммы (4.10) напомним одно утверждение из теории ЛДО [29].

Замечание 4. Неоднородная КЗ

$$A_0(n) v(x) = f(x), \quad v_1'(0) = v_1'(\pi) = v_2(0) = v_2(\pi) = 0,$$

где $v(x) = \operatorname{colon}\Big(v_1(x), v_2(x)\Big)$, $f(x) = \operatorname{colon}\Big(f_1(x), f_2(x)\Big)$, имеет решение, если справедливо следующее равенство: $\langle f, H \rangle = 0$ — «условие разрешимости» неоднородной КЗ. Равенство $\langle v, H \rangle = 0$ выделяет одно решение этой КЗ.

Перейдем к непосредственному изложению алгоритма определения правой части равенства (4.10), у которой для дальнейших построений вполне достаточно найти второе и третье слагаемые суммы из правой части (см., например, работы [33, 34]).

Ниже будем считать, что функция $z(s)$ удовлетворяет скалярному дифференциальному уравнению

$$z' = \varphi(z, \varepsilon; n), \tag{4.11}$$

где $\varphi(z, \varepsilon; n)$ достаточно гладко зависит от z, ε в окрестности точки $z = 0$, $\varepsilon = 0$ и $\varphi(0, \varepsilon; n) \equiv 0$. Далее в случаях «общего положения» основную роль будет играть «укороченный» вариант дифференциального уравнения (4.11)

$$z' = \psi(z; n), \quad \psi(z; n) = \varphi(z, 0; n). \tag{4.12}$$

В теории динамических систем уравнение (4.12) принято называть нормальной формой или «укороченной» нормальной формой [35].

Для определения членов правой части суммы (4.10) подставим ее в КЗ (4.8), (4.9) и соберем слагаемые при степенях $\varepsilon^{1/2}$, ε, $\varepsilon^{3/2}$. Отметим, что $\dfrac{dz}{d\tau} = z'\varepsilon$, где штрихом обозначена производная по s.

Собирая члены при $\varepsilon^{1/2}$, получим равенство, которое выполнено за счет выбора первого слагаемого суммы (4.10) ($A_0(n)H(x; n) = 0$). Выделяя слагаемые при ε и $\varepsilon^{3/2}$, получим две линейные неоднородные КЗ для определения $Q(x, z; n)$ и $P(x, z; n)$.

Так для определения $Q(x, z; n)$ получаем следующую неоднородную КЗ

$$A_0(n)Q(x, z; n) = \Phi(x; n)z^2, \tag{4.13}$$

$$Q_{1x}(0, z; n) = Q_{1x}(\pi, z; n), \quad Q_2(0, z; n) = Q_2(\pi, z; n), \quad \langle Q, H\rangle = 0. \tag{4.14}$$

При этом в правой части уравнения (4.13) вектор-функция

$$\Phi(x; n) = \mathrm{colon}\Big(\Phi_1(x; n), \Phi_2(x; n)\Big),$$

$$\Phi_1(x; n) = (2p + 1)\cos^2 x + 4n^2 \sin^2 x = \frac{(2p + 1) + 4n^2}{2} + \frac{(2p + 1) - 4n^2}{2}\cos 2x,$$

$$\Phi_2(x; n) = -2n \sin 2x.$$

КЗ (4.13), (4.14) однозначно разрешима в соответствующем классе вектор-функций. При этом

$$Q_j(x, z; n) = z^2 Q_j(x; n), \quad j = 1, 2,$$

$$Q_1(x; n) = \Big(q_0(n) + q_1(n)\cos 2x\Big), \quad Q_2(x; n) = q_2(n)\sin 2x.$$

Достаточно стандартные вычисления показывают, что

$$q_0(n) = -\frac{4n^2 + 2p + 1}{4}, \quad q_1(n) = -\frac{2p + 1}{12}(4n^2 - 1), \quad q_2(n) = \frac{p + 2}{6}(4n^2 - 1)n.$$

Выделяя члены при $\varepsilon^{3/2}$, получим линейную неоднородную КЗ для определения вектор-функции $P(x, z; n)$

$$A_0(n)P(x, z; n) = \psi(z; n)H(x; n) - \gamma A_1(n)H(x; n)z + z^3\Theta(x; n) + z^3\chi(x; n), \tag{4.15}$$

$$P_{1x}(0, z; n) = P_{1x}(\pi, z; n) = 0, \; P_2(0, z; n) = P_2(\pi, z; n) = 0, \; \langle P, H\rangle = 0. \tag{4.16}$$

Здесь $\Theta(x;n) = \mathrm{colon}\Big(\Theta_1(x;n), \Theta_2(x;n)\Big)$, $\chi(x;n) = \mathrm{colon}\Big(\chi_1(x;n), \chi_2(x;n)\Big)$,

$$\Theta_1(x;n) = \frac{1}{3}\Big((4p^2-1)\cos^3 x + 12(2p-1)n^2\cos x \sin^2 x\Big),$$
$$\Theta_2(x;n) = -2n(2p-1)\cos^2 x \sin x - 8n^3\sin^3 x,$$
$$\chi_1(x;n) = 2(2p+1)Q_1(x;n)\cos x - 4nQ_2(x;n)\sin x,$$
$$\chi_2(x;n) = 2Q_2(x;n)\cos x - 4nQ_1(x;n)\sin x,$$

а компоненты $Q_1(x;n)$, $Q_2(x;n)$ определены на предыдущем шаге реализации данного алгоритма, как решения КЗ (4.13), (4.14).

Из условий разрешимости неоднородной КЗ (4.15), (4.16) вытекает, что должно быть выполнено равенство, которое после сокращения на $\pi/2$ и преобразований может быть записано в следующем виде

$$(4n^2+1)\psi(z;n) = \gamma a_n(4n^2-1)z + l_0(n,p)z^3,$$

в котором $a_n = 2/(4n^2-1)$, а $l_0(n,p)$ получаем после вычисления интегралов

$$\int\limits_0^\pi \Big(\Theta(x;n), H(x;n)\Big)dx, \qquad \int\limits_0^\pi \Big(\chi(x;n), H(x;n)\Big)dx.$$

Оказалось, что справедливо равенство

$$l_0(n,p) = \frac{4p^2+16p+16}{3}n^2 + \frac{2p^2+5p+2}{3}.$$

Ясно, что $l_0(n,p) > 0$ при всех p и рассматриваемых n ($n = \pm1, \ldots, \pm n_0$).

В результате этих вычислений получаем, что нормальная форма (4.12) приобретает следующий вид

$$z' = \frac{2\gamma}{4n^2+1}z + l(n,p)z^3, \tag{4.17}$$

где $l(n,p) = l_0(n,p)/(4n^2+1)$.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 3. *Дифференциальное уравнение* (4.17) *имеет два неустойчивых ненулевых состояния равновесия, если* $\gamma = -1$:

$$S_+(n,p)\colon z_+ = z_+(n,p) = \sqrt{-\frac{2\gamma}{l_0(n,p)}}, \qquad S_-(n,p)\colon z_- = z_-(n,p) = -\sqrt{-\frac{2\gamma}{l_0(n,p)}}.$$

При таком γ *асимптотически устойчиво нулевое состояние равновесия. Если* $\gamma = 1$ *или* $\gamma = 0$*, то нетривиальные состояния равновесия отсутствуют. При этих* γ *нулевое состояние равновесия неустойчиво.*

Отметим, что состояния равновесия в нашем случае следует искать как корни кубического уравнения

$$F(z) = \frac{1}{4n^2+1}\Big(2\gamma z + l_0(n,p)z^3\Big) = 0.$$

Устойчивость состояний равновесия можно при $\gamma \neq 0$ определить, используя известную теорему об устойчивости по первому (линейному) приближению, т. е. знаку $F'(z_*)$, где z_* — один из корней уравнения $F(z) = 0$.

При $\gamma = 0$ получим частный случай дифференциального уравнения (4.17)

$$z' = l(n,p)z^3, \qquad l(n,p) = \frac{l_0(n,p)}{4n^2+1} > 0.$$

Неустойчивость нулевого решения вытекает из теоремы Четаева, если взять в качестве функции Четаева $V(z) = z^2 > 0$. Тогда ее производная в силу последнего уравнения $D_xV(t) = 2l(n,p)z^4 > 0$, если, конечно, $z \neq 0$. Производная в силу уравнения функции $V(z)$ положительна, т. е. решение $z = 0$ неустойчиво.

Из результатов работ [24, 25, 33, 34], а также [31, 32], вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 2. *Существует положительная постоянная $\varepsilon_0(n)$ такая, что при всех значениях $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0(n))$ и $\gamma = -1$ у КЗ (4.8), (4.9) при выбранном значении параметра n существует два неустойчивых состояния равновесия*

$$E_+(\varepsilon,n)\colon W_+(x,\varepsilon;n) = \varepsilon^{1/2}z_+H(x;n) + \varepsilon z_+^2Q(x;n) + o(\varepsilon), \tag{4.18}$$

$$E_-(\varepsilon,n)\colon W_-(x,\varepsilon;n) = \varepsilon^{1/2}z_-H(x;n) + \varepsilon z_-^2Q(x;n) + o(\varepsilon), \tag{4.19}$$

соответствующих состояниям равновесия $S_+(n,p), S_-(n,p)$ нормальной формы (4.17).

Замечание 5. Достаточно стандартным способом можно показать что справедливо равенство

$$W_+(x+\pi,\varepsilon,z_-;n) = W_-(x,\varepsilon,z_+;n). \tag{4.20}$$

Действительно, одновременная замена $z \to -z$, $x \to \pi + x$ в первом слагаемом суммы (4.10) оставляет его неизменным. С другой стороны, остальные слагаемые этой суммы определяются однозначно после выбора ее первого слагаемого. Следовательно, $W_+(x+\pi,-z,\varepsilon;n) = W_-(x,z,\varepsilon;n)$ для всех решений на инвариантном многообразии. Но, с другой стороны, $z_- = -z_+$. Эти два замечания обосновывают справедливость равенства (4.20).

Возвратимся теперь к анализу КЗ (4.2), (4.3). Нетрудно заметить, что решения (4.18), (4.19) КЗ (4.8), (4.9) удовлетворяют и КЗ (4.2), (4.3), если в последней КЗ выбрать a с помощью равенства (4.1). Подчеркнем, что уравнения в обеих КЗ одинаковы. Вместе с тем функции, определенные равенствами (4.18), (4.19), имеют по переменной x период 2π, если их рассматривать при всех $x \in \mathbb{R}$. Более того, решения КЗ (4.2), (4.3) обладают тем свойством, которое часто называют «трансляционной» инвариантностью. Суть этого свойства состоит в том, что если КЗ (4.2), (4.3) имеет какое-либо решение $W(\tau,x,\varepsilon)$, то функция $W(\tau,x+h,\varepsilon)$ также будет решением этой КЗ. В нашем случае это означает, что вектор-функции $W_+(x+\varphi_+,\varepsilon;n)$ и $W_-(x+\varphi_-,\varepsilon;n)$ также будут решениями той же КЗ (4.2), (4.3) при любых действительных φ_+ и φ_-. В силу равенства (4.20) достаточно ограничиться рассмотрением семейства решений $W_+(x+\varphi_+,\varepsilon;n)$.

§ 5. Основной результат

Построения и утверждения предыдущих разделов позволяют подвести итог анализа бифуркаций одномодовых состояний равновесия

$$M_1(h,n)\colon u(t,x) = u_n(x) = \eta_n \exp(inx + ih),$$
$$n = 0, \pm 1, \ldots, \pm n_0, \quad \eta_n = (1 - dn^2)^{1/(2p)}, \quad h \in \mathbb{R}.$$

Пусть выбрано какое-либо m из этого набора и $a = a_m(1-\varepsilon)$ или в ином варианте записи

$$d_m(\varepsilon, p) = \frac{pa_m(1-\varepsilon)}{1+pm^2a_m(1-\varepsilon)} = \frac{2p(1-\varepsilon)}{4m^2-1+2pm^2(1-\varepsilon)}.$$

Подчеркнем, что при достаточно малых ε справедливо неравенство $d_m(\varepsilon,p) < 1/m^2$. Итак, справедливо утверждение.

Теорема 3. *Существует положительная постоянная $\varepsilon_0(n)$ такая, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0(n))$ и всех $d = d_m(\varepsilon)$ КЗ (1.1), (1.2) имеет:*

(1) *однопараметрическое семейство одномодовых решений $M_1(h, m, \varepsilon)$:*

$$u = u_m(x, \varepsilon) = \eta_m \exp(imx + ih), \quad h \in \mathbb{R},$$

где $\eta_m = \eta_m(\varepsilon, p) = \Big(1 - m^2 d_m(\varepsilon, p)\Big)^{1/(2p)}$;

(2) *двупараметрическое семейство состояний равновесия $V_2(\varepsilon, m) = V_2(\varepsilon, m, h_1, h_2)$, принадлежащее достаточно малой окрестности $M_1(h, m, \varepsilon)$.*

Двумерное инвариантное многообразие $V_2(\varepsilon, m)$ сформировано решениями следующего вида

$$u(x, \varepsilon; m) = \eta_m(\varepsilon) \exp(imx + ih_1)\Big(1 + w(x, h_2, \varepsilon; m)\Big), \tag{5.1}$$

где h_1, h_2 — произвольные действительные постоянные, $w(x, h_2, \varepsilon; m) = w_1(x, h_2, \varepsilon; m) + iw_2(x, h_2, \varepsilon; m)$. В свою очередь, w_1, w_2 — компоненты решения $W_+(x + h_2, \varepsilon; m)$ КЗ (4.2), (4.3). В более детальной записи равенства (5.1) можно переписать следующим образом

$$\begin{aligned} u(x, \varepsilon; m) = \eta_m(\varepsilon) \exp(imx + ih_1)\Big[1 + \varepsilon^{1/2} z_+\Big(\cos(x + h_2) - 2im \sin(x + h_2)\Big) + \\ + \varepsilon z_+^2 \Big(q_0(m) + q_1(m) \cos(2x + 2h_2) + iq_2(m) \sin(2x + 2h_2)\Big) + o(\varepsilon)\Big], \end{aligned} \tag{5.2}$$

где коэффициенты $q_0(m)$, $q_1(m)$, $q_2(m)$ были определены в разделе 5.

(3) *Двумерное инвариантное многообразие $V_2(\varepsilon, m)$ неустойчиво (седловое). В частности, это означает, что решения, принадлежащие ему (т. е. двупараметрическому семейству решений (5.2)) неустойчивы.*

Заключение

В работе изучен вопрос о локальных бифуркациях у периодической КЗ для обобщенного вариационного уравнения Гинзбурга–Ландау в случае, когда нелинейность имеет степень $2p + 1$. Как уже отмечалось, такая КЗ уже рассматривалась в варианте постановки задачи, когда $p = 1$, а также при $p = 2$.

Так при $p = 1$ получаем, что $l = l(n, 1) = 3$ и, следовательно, ляпуновская величина не зависит от номера одномодового решения. При $p = 2$ получаем, что в данном случае $l = l(n, 2) = (64n^2 + 20)/(12n^3 + 3)$, т. е. ляпуновская величина уже зависит от номера одномодового состояния равновесия.

Тем не менее уместно отметить, что результаты анализа локальных бифуркаций при $p = 1, 2$ и в случае произвольного $p \in \mathbb{N}$ достаточно похожи. Например, при всех p реализуется жесткий, докритический вариант рождения двумерных инвариантных многообразий. Вместе с тем количественные характеристики основных бифуркационных величин зависят от p. В частности, $d_n(p)$ и $l(n, p)$ возрастают с ростом p.

Полученные результаты основывались на методах теории бесконечномерных динамических систем: методе интегральных многообразий и нормальных форм. Но все же основным моментом следует считать, что задачу о бифуркациях в случае близком к критическому трехкратного нулевого собственного значения удалось свести к более простой задаче: задаче о бифуркациях Тьюринга–Пригожина.

Результаты данной статьи составили основу доклада автора работы на Всероссийской конференции с международным участием «Теория управления и математическое моделирование» (Ижевск, 2022).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kuramoto Y., Tsuzuki T. On the formation of dissipative structures in reaction–diffusion systems: Reductive perturbation approach // Progress of Theoretical Physics. 1975. Vol. 54. Issue 3. P. 687–699. https://doi.org/10.1143/PTP.54.687
2. Kuramoto Y. Chemical oscillations, waves, and turbulence. Berlin: Springer, 1984. https://doi.org/10.1007/978-3-642-69689-3
3. Малинецкий Г. Г., Потапов А. Б., Подлазов А. В. Нелинейная динамика. Подходы, результаты, надежды. М.: КомКнига, 2006.
4. Aronson I. S., Kramer L. The world of the complex Ginzburg–Landau equation // Reviews of Modern Physics. 2002. Vol. 74. Issue 1. P. 99–143. https://doi.org/10.1103/RevModPhys.74.99
5. Elmer F. J. Nonlinear and nonlocal dynamics of spatially extended systems: Stationary states, bifurcations and stability // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1988. Vol. 30. Issue 3. P. 321–342. https://doi.org/10.1016/0167-2789(88)90024-3
6. Duan Jinqiao, Ly Hung Van, Titi E. S. The effect of nonlocal interactions on the dynamics of the Ginzburg–Landau equation // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. 1996. Vol. 47. Issue 3. P. 432–455. https://doi.org/10.1007/BF00916648
7. Bartuccelli M., Constantin P., Doering C. R., Gibbon J. D., Gisselfält M. On the possibility of soft and hard turbulence in the complex Ginzburg–Landau equation // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1990. Vol. 44. Issue 3. P. 421–444. https://doi.org/10.1016/0167-2789(90)90156-J
8. Doering C. R., Gibbon J. D., Levermore C. D. Weak and strong solutions of the complex Ginzburg–Landau equation // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1994. Vol. 71. Issue 3. P. 285–318. https://doi.org/10.1016/0167-2789(94)90150-3
9. Doering C. R., Gibbon J. D., Holm D. D., Nicolaenko B. Low-dimensional behaviour in the complex Ginzburg–Landau equation // Nonlinearity. 1988. Vol. 1. No. 2. P. 279–309. https://doi.org/10.1088/0951-7715/1/2/001
10. Kukavica I. On the number of determining nodes for the Ginzburg–Landau equation // Nonlinearity. 1992. Vol. 5. No. 5. P. 997–1006. https://doi.org/10.1088/0951-7715/5/5/001
11. Temam R. Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. New York: Springer, 1997. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0645-3
12. Kulikov A., Kulikov D. Invariant varieties of the periodic boundary value problem of the nonlocal Ginzburg–Landau equation // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2021. Vol. 44. Issue 15. P. 11985–11997. https://doi.org/10.1002/mma.7103
13. Куликов А. Н., Куликов Д. А. Инвариантные многообразия, глобальный аттрактор интегро-дифференциального уравнения Гинзбурга–Ландау // Дифференциальные уравнения. 2022. Т. 58. № 11. С. 1500–1514. https://elibrary.ru/item.asp?id=49728008
14. Kudryashov N. A. First integrals and general solution of the complex Ginzburg–Landau equation // Applied Mathematics and Computation. 2022. Vol. 386. 125407. https://doi.org/10.1016/j.amc.2020.125407
15. Elmandouh A. A. Bifurcation and new traveling wave solutions for the 2D Ginzburg–Landau equation // The European Physical Journal Plus. 2020. Vol. 135. Issue 8. Article number: 648. https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-020-00675-3

16. Tzaneteas T., Sigal I. M. On Abrikosov lattice solutions of the Ginzburg–Landau equations // Mathematical Modelling of Natural Phenomena. 2013. Vol. 8. No. 5. P. 190–205. https://doi.org/10.1051/mmnp/20138512
17. Xu Guoan, Zhang Yi, Li Jibin. Exact solitary wave and periodic-peakon solutions of the complex Ginzburg–Landau equation: Dynamical system approach // Mathematics and Computers in Simulation. 2022. Vol. 191. P. 157–167. https://doi.org/10.1016/j.matcom.2021.08.007
18. Liu Wenjun, Yu Weitian, Yang Chunyu, Liu Mengli, Zhang Yujia, Lei Ming. Analytic solutions for the generalized complex Ginzburg–Landau equation in fiber lasers // Nonlinear Dynamics. 2017. Vol. 89. Issue 4. P. 2933–2939. https://doi.org/10.1007/s11071-017-3636-5
19. Li Xiaolin, Li Shuling. A linearized element-free Galerkin method for the complex Ginzburg–Landau equation // Computers and Mathematics with Applications. 2021. Vol. 90. P. 135–147. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2021.03.027
20. Cong Hongzi, Gao Meina. Quasi-periodic solutions for the generalized Ginzburg–Landau equation with derivatives in the nonlinearity // Journal of Dynamics and Differential Equations. 2011. Vol. 23. Issue 4. P. 1053–1074. https://doi.org/10.1007/s10884-011-9229-y
21. Куликов А. Н., Куликов Д. А. Локальные бифуркации плоских бегущих волн обобщенного кубического уравнения Шрёдингера // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46. № 9. С. 1290–1299. https://elibrary.ru/item.asp?id=15524720
22. Куликов А. Н., Куликов Д. А. Локальные бифуркации и глобальный аттрактор двух версий слабодиссипативного уравнения Гинзбурга–Ландау // Теоретическая и математическая физика. 2022. Т. 212. № 1. С. 40–61. https://doi.org/10.4213/tmf10259
23. Kulikov A. N., Rudy A. S. States of equilibrium of condensed matter within Ginzburg–Landau Ψ^4-model // Chaos, Solitons and Fractals. 2003. Vol. 15. Issue 1. P. 75–85. https://doi.org/10.1016/S0960-0779(02)00091-7
24. Куликов А. Н., Куликов Д. А. Состояния равновесия вариационного уравнения Гинзбурга–Ландау // Вестник национального исследовательского ядерного университета «МИФИ». 2017. Т. 6. № 6. С. 496–502. https://doi.org/10.1134/S2304487X17060074
25. Куликов Д. А. Обобщенный вариант вариационного уравнения Гинзбурга–Ландау // Вестник национального исследовательского ядерного университета «МИФИ». 2020. Т. 9. № 4. С. 329–337. https://doi.org/10.1134/S2304487X20040045
26. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Ленинград: ЛГУ, 1950.
27. Соболевский П. Е. Об уравнениях параболического типа в банаховом пространстве // Труды Московского математического общества. 1961. Т. 10. С. 297–350. https://www.mathnet.ru/rus/mmo123
28. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967.
29. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
30. Kelley A. The stable, center-stable, center, center-unstable, unstable manifolds // Journal of Differential Equations. 1967. Vol. 3. Issue 4. P. 546–570. https://doi.org/10.1016/0022-0396(67)90016-2
31. Marsden J. E., McCracken M. The Hopf bifurcation and its applications. New York: Springer, 1976. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-6374-6
32. Куликов А. Н. О гладких инвариантных многообразиях полугруппы нелинейных операторов в банаховом пространстве // Исследования по устойчивости и теории колебаний. Ярославль: ЯрГУ, 1976. С. 114–129.
33. Куликов А. Н., Куликов Д. А. Формирование волнообразных наноструктур на поверхности плоских подложек при ионной бомбардировке // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2012. Т. 52. № 5. С. 930–945. https://www.mathnet.ru/rus/zvmmf9720
34. Куликов А. Н., Куликов Д. А. Локальные бифуркации в уравнениях Кана–Хилларда, Курамото–Сивашинского и их обобщениях // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2019. Т. 59. № 4. С. 670–683. https://doi.org/10.1134/S0044466919040082

35. Guckenheimer J., Holmes P. Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields. New York: Springer, 1983. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1140-2

Поступила в редакцию 11.01.2023

Принята к публикации 10.03.2023

Куликов Дмитрий Анатольевич, к. ф.-м. н., доцент, кафедра дифференциальных уравнений, Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, 150003, Россия, г. Ярославль, ул. Советская, 14.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6307-0941
E-mail: kulikov_d_a@mail.ru

Цитирование: Д. А. Куликов. Устойчивость и локальные бифуркации одномодовых состояний равновесия вариационного уравнения Гинзбурга–Ландау // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2023. Т. 33. Вып. 2. С. 240–258.

VESTNIK UDMURTSKOGO UNIVERSITETA. MATEMATIKA. MEKHANIKA. KOMP'YUTERNYE NAUKI

MATHEMATICS 2023. Vol. 33. Issue 2. Pp. 240–258.

D. A. Kulikov

Stability and local bifurcations of single-mode equilibrium states of the Ginzburg–Landau variational equation

Keywords: Ginzburg–Landau variational equation, boundary value problem, stability, bifurcations, asymptotic formulas.

MSC2020: 37L10, 37L15

DOI: 10.35634/vm230204

One of the versions of the generalized variational Ginzburg–Landau equation is considered, supplemented by periodic boundary conditions. For such a boundary value problem, the question of existence, stability, and local bifurcations of single-mode equilibrium states is studied. It is shown that in the case of a nearly critical threefold zero eigenvalue, in the problem of stability of single-mode spatially inhomogeneous equilibrium states, subcritical bifurcations of two-dimensional invariant tori filled with spatially inhomogeneous equilibrium states are realized.

The analysis of the stated problem is based on such methods of the theory of infinite-dimensional dynamical systems as the theory of invariant manifolds and the apparatus of normal forms. Asymptotic formulas are obtained for the solutions that form invariant tori.

REFERENCES

1. Kuramoto Y., Tsuzuki T. On the formation of dissipative structures in reaction–diffusion systems: Reductive perturbation approach, *Progress of Theoretical Physics*, 1975, vol. 54, issue 3, pp. 687–699. https://doi.org/10.1143/PTP.54.687
2. Kuramoto Y. *Chemical oscillations, waves, and turbulence*, Berlin: Springer, 1984. https://doi.org/10.1007/978-3-642-69689-3
3. Malinetskii G. G., Potapov A. B., Podlazov A. V. *Nelineinaya dinamika. Podkhody, rezul'taty, nadezhdy* (Nonlinear dynamics. Approaches, results, hopes), Moscow: KomKniga, 2006.
4. Aronson I. S., Kramer L. The world of the complex Ginzburg–Landau equation, *Reviews of Modern Physics*, 2002, vol. 74, issue 1, pp. 99–143. https://doi.org/10.1103/RevModPhys.74.99
5. Elmer F. J. Nonlinear and nonlocal dynamics of spatially extended systems: Stationary states, bifurcations and stability, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1988, vol. 30, issue 3, pp. 321–342. https://doi.org/10.1016/0167-2789(88)90024-3
6. Duan Jinqiao, Ly Hung Van, Titi E. S. The effect of nonlocal interactions on the dynamics of the Ginzburg–Landau equation, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 1996, vol. 47, issue 3, pp. 432–455. https://doi.org/10.1007/BF00916648
7. Bartuccelli M., Constantin P., Doering C. R., Gibbon J. D., Gisselfält M. On the possibility of soft and hard turbulence in the complex Ginzburg–Landau equation, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1990, vol. 44, issue 3, pp. 421–444. https://doi.org/10.1016/0167-2789(90)90156-J
8. Doering C. R., Gibbon J. D., Levermore C. D. Weak and strong solutions of the complex Ginzburg–Landau equation, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1994, vol. 71, issue 3, pp. 285–318. https://doi.org/10.1016/0167-2789(94)90150-3
9. Doering C. R., Gibbon J. D., Holm D. D., Nicolaenko B. Low-dimensional behaviour in the complex Ginzburg–Landau equation, *Nonlinearity*, 1988, vol. 1, no. 2, pp. 279–309. https://doi.org/10.1088/0951-7715/1/2/001
10. Kukavica I. On the number of determining nodes for the Ginzburg–Landau equation, *Nonlinearity*, 1992, vol. 5, no. 5, pp. 997–1006. https://doi.org/10.1088/0951-7715/5/5/001
11. Temam R. *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics*, New York: Springer, 1997. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0645-3
12. Kulikov A., Kulikov D. Invariant varieties of the periodic boundary value problem of the nonlocal Ginzburg–Landau equation, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2021, vol. 44, issue 15, pp. 11985–11997. https://doi.org/10.1002/mma.7103

13. Kulikov A. N., Kulikov D. A. Invariant manifolds and global attractor of the Ginzburg–Landau integro-differential equation, *Differential Equations*, 2022, vol. 58, issue 11, pp. 1499–1513. https://doi.org/10.1134/S00122661220110064
14. Kudryashov N. A. First integrals and general solution of the complex Ginzburg–Landau equation, *Applied Mathematics and Computation*, 2022, vol. 386, 125407. https://doi.org/10.1016/j.amc.2020.125407
15. Elmandouh A. A. Bifurcation and new traveling wave solutions for the 2D Ginzburg–Landau equation, *The European Physical Journal Plus*, 2020, vol. 135, issue 8, article number: 648. https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-020-00675-3
16. Tzaneteas T., Sigal I. M. On Abrikosov lattice solutions of the Ginzburg–Landau equations, *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*, 2013, vol. 8, no. 5, pp. 190–205. https://doi.org/10.1051/mmnp/20138512
17. Xu Guoan, Zhang Yi, Li Jibin. Exact solitary wave and periodic-peakon solutions of the complex Ginzburg–Landau equation: Dynamical system approach, *Mathematics and Computers in Simulation*, 2022, vol. 191, pp. 157–167. https://doi.org/10.1016/j.matcom.2021.08.007
18. Liu Wenjun, Yu Weitian, Yang Chunyu, Liu Mengli, Zhang Yujia, Lei Ming. Analytic solutions for the generalized complex Ginzburg–Landau equation in fiber lasers, *Nonlinear Dynamics*, 2017, vol. 89, issue 4, pp. 2933–2939. https://doi.org/10.1007/s11071-017-3636-5
19. Li Xiaolin, Li Shuling. A linearized element-free Galerkin method for the complex Ginzburg–Landau equation, *Computers and Mathematics with Applications*, 2021, vol. 90, pp. 135–147. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2021.03.027
20. Cong Hongzi, Gao Meina. Quasi-periodic solutions for the generalized Ginzburg–Landau equation with derivatives in the nonlinearity, *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 2011, vol. 23, issue 4, pp. 1053–1074. https://doi.org/10.1007/s10884-011-9229-y
21. Kulikov A. N., Kulikov D. A. Local bifurcations of plane running waves for the generalized cubic Schrödinger equation, *Differential Equations*, 2010, vol. 46, issue 9, pp. 1299–1308. https://doi.org/10.1134/S0012266110090065
22. Kulikov A. N., Kulikov D. A. Local bifurcations and a global attractor for two versions of the weakly dissipative Ginzburg–Landau equation, *Theoretical and Mathematical Physics*, 2022, vol. 212, issue 1, pp. 925–943. https://doi.org/10.1134/S0040577922070042
23. Kulikov A. N., Rudy A. S. States of equilibrium of condensed matter within Ginzburg–Landau Ψ^4-model, *Chaos, Solitons and Fractals*, 2003, vol. 15, issue 1, pp. 75–85. https://doi.org/10.1016/S0960-0779(02)00091-7
24. Kulikov A. N., Kulikov D. A. Equilibrium states of the variational Ginzburg–Landau equation, *Vestnik Natsional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta "MIFI"*, 2017, vol. 6, no. 6, pp. 496–502 (in Russian). https://doi.org/10.1134/S2304487X17060074
25. Kulikov D. A. Generalized variant of the variational Ginzburg–Landau equation, *Vestnik Natsional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta "MIFI"*, 2020, vol. 9, no. 4, pp. 329–337 (in Russian). https://doi.org/10.1134/S2304487X20040045
26. Sobolev S. L. *Nekotorye primeneniya funktsional'nogo analiza v matematicheskoi fizike* (Some applications of functional analysis in mathematical physics), Leningrad: Leningrad State University, 1950.
27. Sobolevskii P. E. Equations of parabolic type in a Banach space, *Trudy Moskovskogo Matematicheskogo Obshchestva*, 1961, vol. 10, pp. 297–350 (in Russian). https://www.mathnet.ru/eng/mmo123
28. Krein S. G. *Lineinye differentsial'nye uravneniya v banakhovom prostranstve* (Linear differential equations in a Banach space), Moscow: Nauka, 1967.
29. Naimark M. *Lineinye differentsial'nye operatory* (Linear differential operators), Moscow: Nauka, 1969.
30. Kelley A. The stable, center-stable, center, center-unstable, unstable manifolds, *Journal of Differential Equations*, 1967, vol. 3, issue 4, pp. 546–570. https://doi.org/10.1016/0022-0396(67)90016-2
31. Marsden J. E., McCracken M. *The Hopf bifurcation and its applications*, New York: Springer, 1976. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-6374-6

32. Kulikov A. N. On smooth invariant manifolds of the semigroup of nonlinear operators in a Banach space, *Issledovaniya po ustoichivosti i teorii kolebanii*, Yaroslavl: Yaroslavl State University, 1976, pp. 114–129 (in Russian).
33. Kulikov A. N., Kulikov D. A. Formation of wavy nanostructures on the surface of flat substrates by ion bombardment, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2012, vol. 52, issue 5, pp. 800–814. https://doi.org/10.1134/S0965542512050132
34. Kulikov A. N., Kulikov D. A. Local bifurcations in the Cahn–Hilliard and Kuramoto–Sivashinsky equations and in their generalizations, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2019, vol. 59, issue 4, pp. 630–643. https://doi.org/10.1134/S0965542519040080
35. Guckenheimer J., Holmes P. *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*, New York: Springer, 1983. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1140-2

Received 11.01.2023

Accepted 10.03.2023

Dmitrii Anatol'evich Kulikov, Candidate of Phisics and Mathematics, Associate Professor, Department of Differential Equations, Demidov Yaroslavl State University, ul. Sovetskaya, 14, Yaroslavl, 150003, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6307-0941
E-mail: kulikov_d_a@mail.ru

Citation: D. A. Kulikov. Stability and local bifurcations of single-mode equilibrium states of the Ginzburg–Landau variational equation, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2023, vol. 33, issue 2, pp. 240–258.