МАТЕМАТИКА 2023. Т. 33. Вып. 1. С. 130–140.

УДК 517.977

© *Е. С. Можегова*

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ГРУППОВОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ ВО ВРЕМЕННЫХ ШКАЛАХ

В конечномерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^k$ рассматривается линейная задача преследования группой преследователей одного убегающего, описываемая в заданной временной шкале $\mathbb{T}$ уравнениями вида

$$z_i^{\Delta} = az_i + u_i - v,$$

где z_i^{Δ} — Δ-производная функций z_i во временной шкале $\mathbb{T}$, a — произвольное число, не равное нулю. Множество допустимых управлений для каждого участника представляет собой шар единичного радиуса с центром в начале координат, терминальные множества — заданные выпуклые компакты в $\mathbb{R}^k$. Преследователи действуют согласно контрстратегиям на основе информации о начальных позициях и предыстории управления убегающего. В терминах начальных позиций и параметров игры получено достаточное условие поимки. Для случая задания временной шкалы в виде $\mathbb{T} = \{\tau k \mid k \in \mathbb{Z},\ \tau \in \mathbb{R},\ \tau > 0\}$ найдены достаточные условия разрешимости задач преследования и уклонения. При исследовании в обоих случаях в качестве базового используется метод разрешающих функций.

Ключевые слова: дифференциальная игра, групповое преследование, преследователь, убегающий, временная шкала.

DOI: 10.35634/vm230109

Введение

При исследовании конфликтно управляемых процессов можно выделить методы, направленные на построение оптимальных стратегий [1, 2], с одной стороны, и на гарантированный результат — с другой. К последним относятся, например, метод Л. С. Понтрягина [3] и метод разрешающих функций [4–6], использующий технику многозначных отображений. Метод разрешающих функций, предложенный для исследования линейных дифференциальных игр с геометрическими ограничениями, в настоящее время распространен на линейные дифференциальные игры с интегральными ограничениями [7–9], дифференциальные игры с запаздыванием [10], дифференциальные игры с дробными производными [11–13] и другие классы дифференциальных игр, в том числе игры, описываемые уравнениями во временных шкалах.

В качестве математического объекта временные шкалы впервые были рассмотрены в работах Б. Олбаха и С. Хильгера [14, 15]. Исследования показали, что некоторые результаты, полученные отдельно для теорий дифференциальных и разностных уравнений, можно рассматривать с единых позиций в том случае, если допустить возможность задания динамических систем на произвольных замнутых подмножествах $\mathbb{R}$, названных временными шкалами. Временные шкалы используют при построении математических моделей в различных отраслях наук [16, 17]. Неантагонистическая игра N лиц во временной шкале рассматривалась в работе [18]. Работы [19, 20] посвящены задачам простого преследования во временных шкалах группой преследователей одного и группы жестко скоординированных убегающих соответственно. В работе [21] были найдены достаточные условия разрешимости задачи простого группового преследования двух скоординированных убегающих в заданной временной шкале. Задача о многократной поимке заданного числа убегающих во временных шкалах, при условии что убегающие используют программные стратегии, каждый преследователь ловит не более одного убегащего, движения игроков являются простыми, рассматривалась в [22].

В данной работе рассматривается линейная задача преследования группой преследователей одного убегающего, описываемая в заданной временной шкале системой дифференциальных уравнений. Получены достаточные условия поимки. Рассмотрен частный случай задания временной шкалы, для которого найдены достаточные условия разрешимости задач преследования и уклонения.

§ 1. Постановка задачи

Определение 1. Непустое замкнутое подмножество $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}^1$, такое, что $\sup\limits_{t \in \mathbb{T}} t = +\infty$, называется *временной шкалой*.

Определение 2. Пусть $\mathbb{T}$ — временная шкала. Функция $\sigma\colon \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ вида

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} \mid s > t\}$$

называется *функцией сдвига*.

Определение 3. Пусть $\mathbb{T}$ — временная шкала. Функция $\mu\colon \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ вида

$$\mu(t) = \sigma(t) - t$$

называется *зернистостью* временной шкалы $\mathbb{T}$.

Определение 4. Функция $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}^1$ называется Δ-*дифференцируемой* в точке $t \in \mathbb{T}$, если существует такое число $\gamma \in \mathbb{R}^1$, что для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность W точки t такая, что неравенство

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - \gamma(\sigma(t) - s)| < \varepsilon|\sigma(t) - s|$$

справедливо для всех $s \in \mathbb{T} \cap W$.

Число γ в этом случае называется Δ-*производной* функции f в точке t и обозначается как $f^{\Delta}(t)$.

Более подробную информацию о временных шкалах можно найти, например, в работах [23, 24].

Пусть задана некоторая временная шкала $\mathbb{T}$, $t_0 \in \mathbb{T}$.

В пространстве $\mathbb{R}^k$ ($k \geqslant 2$) рассматривается дифференциальная игра $\Gamma(n)$ $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и одного убегающего E с законами движения вида

$$x_i^{\Delta} = ax_i + u_i, \quad x_i(t_0) = x_i^0, \quad u_i \in V, \tag{1.1}$$

$$y^{\Delta} = ay + v, \quad y(t_0) = y^0, \quad v \in V, \tag{1.2}$$

где $x_i, y, x_i^0, y^0 \in \mathbb{R}^k$, $a \in R$, $i \in I = \{1, \ldots, n\}$, $V = \{v \in \mathbb{R}^k\colon \|v\| \leqslant 1\}$.

Введем новые переменные $z_i = x_i - y$. Тогда вместо систем (1.1), (1.2) получим систему

$$z_i^{\Delta} = az_i + u_i - v, \quad z_i(t_0) = z_i^0 = x_i^0 - y^0. \tag{1.3}$$

Считаем, что $z_i^0 \notin M_i$, где M_i — заданные выпуклые компакты в $\mathbb{R}^k$. Обозначим $z^0 = \{z_i^0, i \in I\}$ — вектор начальных позиций.

Δ-измеримую функцию $v\colon \mathbb{T} \to R^k$ назовем *допустимой*, если $v(t) \in V$ для всех $t \in \mathbb{T}$. *Предысторией* функции v в момент $t \in \mathbb{T}$ будем называть сужение функции v на $[t_0, t) \cap \mathbb{T}$.

Определение 5. Будем говорить, что задана *квазистратегия* $\widetilde{U}_i$ преследователя P_i, если определено отображение U_i^0, ставящее в соответствие начальным позициям z^0, моменту t, предыстории управления $v_t(\cdot)$ убегающего E допустимую функцию $u_i(t)$.

Определение 6. В игре $\Gamma(n)$ происходит *поимка*, если существуют момент T_0, квазистратегии $\widetilde{U}_1, \ldots, \widetilde{U}_n$ преследователей $P_1, \ldots, P_n$ такие, что для любой Δ-измеримой функции $v(\cdot)$ найдутся момент $\tau \in [t_0, T_0] \cap \mathbb{T}$ и номер $l \in I$, для которых $z_l(\tau) \in M_l$.

Определение 7. В игре $\Gamma(n)$ происходит *уклонение от встречи*, если существует допустимая функция $v(\cdot)$ такая, что для любых траекторий $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ преследователей $P_1, \ldots, P_n$ для всех $i \in I$, $t \in \mathbb{T}$ имеет место $z_i(t) \notin M_i$.

§ 2. Достаточные условия разрешимости задачи преследования

Введем следующие обозначения:

$$e_a(t,s) = \exp\left\{\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(a)\Delta\tau\right\}, \quad \text{где} \ \ \xi_h(z) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+hz)}{h}, & \text{если } h \neq 0; \\ z, & \text{если } h = 0, \end{cases}$$

$$e_{\ominus a}(t,s) = \frac{1}{e_a(t,s)}.$$

Каждому преследователю поставим в соответствие разрешающую функцию

$$\alpha(t,\tau,z_i,v,\gamma(\cdot)) = \max\{\alpha \geqslant 0\colon\ -\alpha z_i \in e_a(t_0,\sigma(\tau))(V-v)\} = e_{\ominus a}(\sigma(\tau),t_0)\alpha(z_i,v),$$

где

$$\alpha(z_i,v) = \max\{\alpha \geqslant 0\colon\ -\alpha z_i \in (V-v)\}.$$

Пусть далее

$$T_n(z) = \min\left\{t \in \mathbb{T} \,\Big|\, t > t_0, \inf_{v(\cdot)} \max_{i\in I} \int_{t_0}^t e_{\ominus a}(\sigma(\tau),t_0)\alpha(z_i,v(\tau))\Delta\tau \geqslant 1\right\}, \tag{2.4}$$

где $z = \{z_i,\ i \in I\}$.

Теорема 1. *Пусть* $M_i = \{0\}$ *для всех* $i \in I$ *и для начального состояния* z^0 *выполнено условие*

$$T_n(z^0) < +\infty.$$

Тогда в игре $\Gamma(n)$ *происходит поимка.*

Доказательство. Пусть $v(\cdot)$ — допустимое управление убегающего. Определим функции

$$h_i(t) = 1 - \int_{t_0}^t e_{\ominus a}(\sigma(s),t_0)\alpha(z_i^0,v(s))\,\Delta s.$$

Предпишем преследователю P_i строить свое управление следующим образом. Если в момент $t \in \mathbb{T}$ выполняется неравенство $h_i(t) \geqslant 0$, то полагаем

$$u_i(t) = v(t) - \alpha(z_i^0,v(t))z_i^0.$$

Если $\tau_i \in \mathbb{T}$ — первый момент времени, для которого $h_i(\tau_i) = 0$, то считаем, что $\alpha(z_i^0, v(t)) = 0$ для всех $t \in \mathbb{T}$, $t > \tau_i$. Тогда из (1.3) получаем [17]:

$$z_i(t) = e_a(t, t_0) z_i^0 \left(1 - \int_{t_0}^{t} e_{\ominus a}(\sigma(s), t_0) \alpha(z_i^0, v(s))\, \Delta s\right) = e_a(t, t_0) z_i^0 h_i(t),$$

и поэтому $z_i(\tau_i) = 0$.

Пусть $\tau_i \in \mathbb{T}$ — первый момент времени, для которого $h_i(\tau_i) < 0$, а для всех $t \in \mathbb{T}$, $t < \tau_i$ выполняется неравенство $h_i(t) > 0$. Определим число

$$\tau_i^* = \sup\{t \in \mathbb{T} \mid h_i(t) > 0\}.$$

Тогда $(\tau_i^*, \tau_i) \cap \mathbb{T} = \varnothing$. Действительно, если бы существовал момент $\tau \in (\tau_i^*, \tau_i) \cap \mathbb{T}$, то выполнялось бы неравенство $h_i(\tau) > 0$, что невозможно в силу определения числа τ_i^*. Полагаем в этом случае

$$u_i(\tau_i) = v(\tau_i) - \alpha^*(z_i^0, v(\tau_i)) z_i^0, \quad \text{где } \alpha^*(z_i^0, v(\tau_i)) = \frac{e_a(\sigma(\tau_i^*), t_0) h_i(\tau_i^*)}{\sigma(\tau_i^*) - \tau_i^*} = \frac{e_a(\tau_i, t_0) h_i(\tau_i^*)}{\tau_i - \tau_i^*}.$$

Отметим, что в данном случае $\alpha^*(z_i^0, v(\tau_i)) \leqslant \alpha(z_i^0, v(\tau_i))$ и поэтому $u_i(\tau) \in V$. Тогда

$$z_i(\tau_i) = e_a(\tau_i, t_0) z_i^0 \left(1 - \int_{t_0}^{\tau_i^*} e_{\ominus a}(\sigma(s), t_0) \alpha(z_i^0, v(s)) \Delta s - \int_{\tau_i^*}^{\tau_i} e_{\ominus a}(\sigma(s), t_0) \alpha^*(z_i^0, v(s)) \Delta s\right) =$$

$$= e_a(\tau_i, t_0) z_i^0 \left(h_i(\tau_i^*) - \int_{\tau_i^*}^{\tau_i} \frac{e_{\ominus a}(\sigma(s), t_0) e_a(\tau_i, t_0) h_i(\tau_i^*)}{(\tau_i - \tau_i^*)} \Delta s\right) = 0.$$

В силу конечности момента $T_n(z^0)$ для каждой допустимой Δ-измеримой функции $v(\cdot)$ найдутся момент $\tau \in \mathbb{T}$, $\tau \leqslant T_n(z^0)$, и номер $l \in I$, для которых $h_l(\tau) \leqslant 0$. Поэтому из доказанного выше следует, что для каждой такой функции $v(\cdot)$ найдутся момент $\tau_0 \in \mathbb{T}$, $\tau_0 \leqslant T_n(z^0)$, и номер $l \in I$, для которых $z_l(\tau_0) = 0$. Это и означает, что в игре $\Gamma(n)$ происходит поимка. Таким образом, теорема доказана. $\square$

Обозначим через $\operatorname{Int} A$, $\operatorname{co} A$ соответственно внутренность и выпуклую оболочку множества $A \subset \mathbb{R}^k$.

Лемма 1 (см. [6, с. 44]). *Пусть* $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{R}^k$. *Тогда*

$$0 \in \operatorname{Int} \operatorname{co} \{z_1, \ldots, z_n\}$$

в том и только в том случае, когда

$$\delta = \min_{v \in V} \max_{i \in I} \alpha(z_i, v) > 0.$$

Следствие 1 (см. [19, теорема 3]). *Пусть* $a = 0$, *множества* $M_i = \{0\}$ *для всех* $i \in I$, $0 \in \operatorname{Int} \operatorname{co} \{z_1^0, \ldots, z_n^0\}$. *Тогда в игре* $\Gamma(n)$ *происходит поимка.*

Доказательство. Так как $a = 0$, то для всех $t \in \mathbb{T}$ справедливо равенство $e_{\ominus a}(\sigma(t), t_0) = 1$ и поэтому

$$T_n(z) = \min\left\{t \in \mathbb{T} \,\middle|\, t > t_0, \inf_{v(\cdot)} \max_{i \in I} \int_{t_0}^{t} \alpha(z_i, v(\tau)) \Delta\tau \geqslant 1\right\}.$$

В силу условия следствия и леммы 3 [19] величина $T_n(z^0)$ конечна. Поэтому по теореме 1 в игре происходит поимка. $\square$

Следствие 2 (см. [25]). *Пусть* $a \leqslant 0$, *множества* $M_i = \{0\}$ *для всех* $i \in I$, $\mathbb{T} = \mathbb{R}^1$, $0 \in \operatorname{Int} \operatorname{co} \{z_1^0, \ldots, z_n^0\}$. *Тогда в игре* $\Gamma(n)$ *происходит поимка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В данном случае

$$T_n(z) = \min \left\{ t \in \mathbb{R}^1 \,\middle|\, t > t_0, \inf_{v(\cdot)} \max_{i \in I} \int_{t_0}^{t} e^{-a(\tau - t_0)} \alpha(z_i, v(\tau))\, d\tau \geqslant 1 \right\}.$$

В силу условия следствия и теоремы работы [25] величина $T_n(z^0)$ конечна. Поэтому по теореме 1 в игре происходит поимка. □

§ 3. Задача группового преследования в дискретной временной шкале

Рассмотрим игру $\Gamma(n)$, заданную в § 1, во временной шкале $\mathbb{T} = \{\tau k \mid k \in \mathbb{Z}\}$, где $\tau \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$. Тогда для произвольной точки $t \in \mathbb{T}$ $\sigma(t) = t + \tau$, $\mu(t) = \tau$, а система (1.3) приобретает вид

$$\frac{z_i(t+\tau) - z_i(t)}{\tau} = a z_i(t) + u_i(t) - v(t), \quad z_i(t_0) = z_i^0,$$

преобразуя которую, окончательно получаем

$$z_i(t+\tau) = (1 + a\tau) z_i(t) + (u_i(t) - v(t))\tau, \quad z_i(t_0) = z_i^0. \tag{3.5}$$

Будем считать, что $M_i = \{0\}$ и $z_i^0 \neq 0$ для всех $i \in I$.

Очевидно, что в случае $1 + a\tau = 0$ один преследователь P_i осуществит поимку убегающего E, полагая $u_i(t) = v(t)$, $i \in I$, $t \in \mathbb{T}$.

Решение (3.5), как решение неоднородного линейного реккурентного уравнения, определяется следующей формулой [26, с. 41]:

$$z_i(t_l) = z_i^0 (1 + a\tau)^l + \sum_{k=0}^{l-1} (1 + a\tau)^{l-1-k} \left(u_i(t_k) - v(t_k) \right) \tau, \tag{3.6}$$

где $l = \dfrac{t - t_0}{\tau}$, причем $l \in \mathbb{Z}^+$, $t_k = t_0 + \tau k$ и $t_k \in \mathbb{T}$ для всех $k \in \mathbb{Z}^+$.

Предположение 1. Для любого $\tau \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$, число a удовлетворяет условию регрессивности, т. е. $1 + \tau a \neq 0$, и $\sum\limits_{k=0}^{l} (1 + a\tau)^{-k-1} \neq 0$ для любого натурального l.

Теорема 2. *Пусть выполнено предположение* 1 *и* $0 \notin \operatorname{Int} \operatorname{co} \{z_1^0, \ldots, z_n^0\}$. *Тогда в игре* $\Gamma(n)$ *происходит уклонение от встречи.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия теоремы следует, что существует вектор $v^0 \in V$, $\|v^0\| = 1$, такой, что $(z_i^0, v^0) \leqslant 0$ для всех i. Зададим управление убегающего E, полагая, что $v(t_k) = v^0$ для всех $k \in \mathbb{Z}^+$. Пусть $u_i(\cdot)$ — произвольные функции на $[t_0, t_k] \cap \mathbb{T}$ для всех k и такие, что $\|u_i(t_k)\| \leqslant 1$.

Введем обозначение

$$A = 1 + a\tau, \tag{3.7}$$

тогда из (3.6) получаем

$$z_i(t_l) = z_i^0 A^l + \sum_{k=0}^{l-1} A^{l-1-k} \left(u_i(t_k) - v^0 \right) \tau. \tag{3.8}$$

Обозначим $M^l = \sum\limits_{k=0}^{l-1} \dfrac{\tau}{A^{k+1}}$. Тогда из (3.8) получим

$$z_i(t_l) = A^l \left(z_i^0 + \sum_{k=0}^{l-1} \frac{u_i(t_k)}{A^{k+1}} \tau - v^0 M^l \right). \tag{3.9}$$

Так как $M^l = \tau A \sum\limits_{k=0}^{l} \dfrac{1}{A^{k+1}}$, то согласно предположению 1 $M^l \neq 0$ для всех $l \in \mathbb{N}$. Определим функции $\widehat{u}_i(t_l) = \dfrac{1}{M^l} \sum\limits_{k=0}^{l-1} \dfrac{u_i(t_k)}{A^{k+1}} \tau$. Тогда $\|\widehat{u}_i(t_l)\| \leqslant 1$. Из (3.9) получаем

$$z_i(t_l) = A^l \left(z_i^0 + M^l \widehat{u}_i(t_l) - v^0 M^l \right).$$

Следовательно,

$$\|z_i(t_l)\| \geqslant |A^l| \left(\|z_i^0 - v^0 M^l\| - |M^l| \right) =$$
$$= |A^l| \cdot \left(\sqrt{\|z_i^0\|^2 - 2|M^l|(z_i^0, v^0) + |M^l|^2} - |M^l| \right) > |A^l| \left(|M^l| - |M^l| \right) = 0,$$

что и требовалось доказать. □

Лемма 2. *Пусть* $A \in (0; 1]$ *и* $0 \in \operatorname{Int} \operatorname{co} \{z_1^0, \ldots, z_n^0\}$. *Тогда существует момент* $t_s \in \mathbb{T}$ *такой, что для любой допустимой функции* $v(\cdot)$ *найдется номер* $p \in I$, *для которого*

$$\sum_{k=0}^{s-1} \frac{1}{A^{k+1}} \alpha \left(z_p^0, v(t_k) \right) \tau \geqslant 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $v(\cdot)$ — произвольное допустимое управление убегающего. Для любых неотрицательных чисел γ_k $(k \in K)$ имеет место неравенство

$$\max_{k \in K} \gamma_k \geqslant \frac{1}{|K|} \sum_{k \in K} \gamma_k.$$

Поэтому

$$\max_{i \in I} \sum_{k=0}^{l-1} \frac{1}{A^{k+1}} \alpha \left(z_i^0, v(t_k) \right) \tau \geqslant \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{l-1} \sum_{i \in I} \frac{1}{A^{k+1}} \alpha \left(z_i^0, v(t_k) \right) \tau \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{l-1} \max_{i \in I} \left(\frac{1}{A^{k+1}} \alpha \left(z_i^0, v(t_k) \right) \tau \right).$$

В силу леммы 1 для всех $v \in V$ справедливо неравенство

$$\max_{i \in I} \alpha(z_i^0, v) \geqslant \delta > 0.$$

Следовательно, получаем

$$\max_{i \in I} \sum_{k=0}^{l-1} \frac{1}{A^{k+1}} \alpha \left(z_i^0, v(t_k) \right) \tau \geqslant \frac{\delta \tau}{n} \sum_{k=0}^{l-1} \frac{1}{A^{k+1}}. \tag{3.10}$$

Поскольку $A \in (0,1]$, то сумма $\sum\limits_{k=0}^{l-1} \dfrac{1}{A^{k+1}} \geqslant \sum\limits_{k=0}^{l-1} \dfrac{1}{A} = \dfrac{l}{A}$. Тогда из неравенства (3.10) следует неравенство

$$\max_{i\in I} \sum_{k=0}^{l-1} \frac{1}{A^{k+1}} \alpha\left(z_i^0, v(t_k)\right)\tau \geqslant \frac{\delta\tau l}{nA}.$$

Значит, существует момент $t_s \in \mathbb{T}$, $t_s \leqslant t_0 + \dfrac{An}{\delta}$, для которого выполнено неравенство

$$\max_{i\in I} \sum_{k=0}^{s-1} \frac{1}{A^{k+1}} \alpha\left(z_i^0, v(t_k)\right)\tau \geqslant 1,$$

откуда следует справедливость утверждения леммы. □

В соответствии с (2.4) определим число

$$T_0 = \min\{t_s \in \mathbb{T} \mid \inf_{v(\cdot)} \max_{i\in I} \sum_{k=0}^{s-1} \frac{1}{A^{k+1}} \alpha\left(z_i^0, v(t_k)\right)\tau \geqslant 1\}.$$

Теорема 3. *Пусть* $A \in (0;1]$ *и* $0 \in \operatorname{Int}\operatorname{co}\{z_1^0, \ldots, z_n^0\}$. *Тогда в игре* $\Gamma(n)$ *происходит поимка.*

Доказательство. Пусть $v(\cdot)$ — допустимое управление убегающего. Определим функции

$$h_i(t_l) = 1 - \sum_{k=0}^{l-1} \frac{1}{A^{k+1}} \alpha\left(z_i^0, v(t_k)\right)\tau, \quad \text{где } l \in Z^+, \text{ причем } h_i(t_0) = 1.$$

Предпишем преследователю P_i строить свое управление следующим образом. Если в момент $t_l \in \mathbb{T}$ выполняется неравенство $h_i(t_l) \geqslant 0$, то полагаем

$$u_i(t_l) = v(t_l) - \alpha(z_i^0, v(t_l))z_i^0.$$

Если $t_s \in \mathbb{T}$ — первый момент времени, для которого $h_i(t_s) = 0$, то считаем, что $\alpha(z_i^0, v(t_r)) = 0$ для всех $r \in Z^+$, $r > s$. Тогда из (3.6) с учетом (3.7) получаем

$$z_i(t_l) = z_i^0 A^l \left(1 - \sum_{k=0}^{l-1} \frac{1}{A^{k+1}} \alpha\left(z_i^0, v(t_k)\right)\tau\right) = z_i^0 A^l h_i(t_l),$$

и поэтому $z_i(t_s) = 0$.

Пусть $t_s \in \mathbb{T}$ — первый момент времени, для которого $h_i(t_s) < 0$, а для всех $t_r \in \mathbb{T}$, $r < s$, выполняется неравенство $h_i(t_r) > 0$. Определим число

$$s^* = \sup\{r \in Z^+ \mid \ h_i(t_r) > 0\}.$$

Тогда $(t_{s^*}, t_s) \cap \mathbb{T} = \varnothing$. Действительно, если бы существовал момент t_r, $s^* < r < s$, то выполнялось бы неравенство $h_i(t_r) > 0$, что невозможно в силу определения числа s^*. Полагаем в этом случае

$$u_i(t_s) = v(t_s) - \alpha^*(z_i^0, v(t_s))z_i^0, \text{ где } \alpha^*(z_i^0, v(t_s)) = \begin{cases} \dfrac{A^s(1-A)h_i(t_{s^*})}{\tau(1-A^{s-s^*})}, & \text{если } A \in (0;1); \\ \dfrac{h_i(t_{s^*})}{\tau(s-s^*)}, & \text{если } A = 1. \end{cases}$$

Отметим, что $\alpha^*(z_i^0, v(t_s)) \leqslant \alpha(z_i^0, v(t_s))$ и поэтому $u_i(t_s) \in V$.

Пусть $A \in (0;1)$. Тогда

$$z_i(t_s) = z_i^0 A^s \left(1 - \sum_{k=0}^{s^*-1} \frac{1}{A^{k+1}} \alpha\left(z_i^0, v(t_k)\right)\tau - \sum_{k=s^*}^{s-1} \frac{1}{A^{k+1}} \alpha^*\left(z_i^0, v(t_k)\right)\tau\right) =$$

$$= z_i^0 A^s \left(h_i(t_{s^*}) - \sum_{k=s^*}^{s-1} \frac{A^s(1-A)h_i(t_{s^*})}{A^{k+1}(1-A^{s-s^*})}\right) = 0.$$

В случае $A = 1$ получим соответственно

$$z_i(t_s) = z_i^0 \left(h_i(t_{s^*}) - \sum_{k=s^*}^{s-1} \frac{h_i(t_{s^*})}{(s-s^*)}\right) = 0.$$

Из леммы 2 следует, что для каждой допустимой функции $v(\cdot)$ и для любого значения $A \in (0;1]$ найдутся момент $t_{s_*} \in \mathbb{T}$, $t_{s_*} \leqslant T_0$, и номер $p \in I$, для которых $h_p(t_{s_*}) \leqslant 0$. Поэтому из доказанного выше следует, что для каждой такой функции $v(\cdot)$, момента $t_{s_*} \in \mathbb{T}$, $t_{s_*} \leqslant T_0$, и номера $p \in I$ будет выполнено $z_p(t_{s_*}) = 0$. Это и означает, что в игре $\Gamma(n)$ происходит поимка. Теорема доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
2. Субботин А. И., Ченцов А. Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981.
3. Понтрягин Л. С. Избранные научные труды. Т. 2. М.: Наука, 1988.
4. Чикрий А. А. Конфликтно управляемые процессы. Киев: Наукова думка, 1992.
5. Григоренко Н. Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во МГУ, 1990.
6. Благодатских А. И., Петров Н. Н. Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: Изд-во Удмурт. ун-та, 2009.
7. Rilwan J., Kumam P., Ibragimov G., Badakaya A. J., Ahmed I. A differential game problem of many pursuers and one evader in the Hilbert space ℓ_2 // Differential Equations and Dynamical Systems. 2020. https://doi.org/10.1007/s12591-020-00545-5
8. Саматов Б. Т. Задача преследования–убегания при интегрально-геометрических ограничениях на управления преследователя // Автоматика и телемеханика. 2013. Вып. 7. С. 17–28. https://www.mathnet.ru/rus/at5465
9. Саматов Б. Т. П-стратегия в дифференциальной игре с линейными ограничениями по управлению // Прикладная математика и механика. 2014. Т. 78. № 3. С. 369–377. https://elibrary.ru/item.asp?id=21727041
10. Мамадалиев Н. Линейные дифференциальные игры преследования с интегральными ограничениями при наличии запаздывания // Математические заметки. 2012. Т. 91. № 5. С. 750–760. https://doi.org/10.4213/mzm6346
11. Matychyn I. I., Onyshchenko V. V. Differential games of fractional order with impulse effect // Journal of Automation and Information Sciences. 2015. Vol. 47. Issue 4. P. 43–53. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v47.i4.50
12. Чикрий А. А., Чикрий Г. Ц. Матричные разрешающие функции в игровых задачах динамики // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20. № 3. С. 324–333. https://www.mathnet.ru/rus/timm1103
13. Nakonechnyi A. G., Kapustyan E. A., Chikriy A. A. Control of impulse systems in conflict situation // Journal of Automation and Information Sciences. 2019. Vol. 51. Issue 9. P. 1–11. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v51.i9.10

14. Aulbach B., Hilger S. Linear dynamic processes with inhomogeneous time scale // Nonlinear Dynamics and Quantum Dynamical Systems: Contributions to the International Seminar ISAM-90, held in Gaussing (GDR), March 19–23, 1990. De Gruyter, 1990. P. 9–20. https://doi.org/10.1515/9783112581445-002
15. Hilger S. Analysis on measure chains — a unified approach to continuous and discrete calculus // Results in Mathematics. 1990. Vol. 18. Issues 1–2. P. 18–56. https://doi.org/10.1007/BF03323153
16. Benchohra M., Henderson J., Ntouyas S. Impulsive differential equations and inclusions. Hindawi Publishing Corporation, 2006. https://doi.org/10.1155/9789775945501
17. Bohner M., Peterson A. Advances in dynamic equations on time scales. Boston: Birkhäuser, 2003. https://doi.org/10.1007/978-0-8176-8230-9
18. Martins N., Torres D. F. M. Necessary conditions for linear noncooperative N-player delta differential games on time scales // Discussiones Mathematicae. Differential Inclusions, Control and Optimization. 2011. Vol. 31. No. 1. P. 23–37. https://doi.org/10.7151/dmdico.1126
19. Петров Н. Н. Задача простого группового преследования с фазовыми ограничениями во временных шкалах // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Т. 30. Вып. 2. С. 249–258. https://doi.org/10.35634/vm200208
20. Петров Н. Н. Об одной задаче преследования группы убегающих во временных шкалах // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2021. Т. 27. № 3. С. 163–171. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2021-27-3-163-171
21. Петров Н. Н., Можегова Е. С. Об одной задаче простого преследования во временных шкалах двух скоординированных убегающих // Челябинский физико-математический журнал. 2022. Т. 7. Вып. 3. С. 277–286. https://doi.org/10.47475/2500-0101-2022-17302
22. Petrov N. N. Multiple capture of a given number of evaders in the problem of simple pursuit with phase restrictions on timescales // Dynamic Games and Applications. 2022. Vol. 12. Issue 2. P. 632–642. https://doi.org/10.1007/s13235-021-00387-y
23. Guseinov G. Sh. Integration on time scales // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2003. Vol. 285. Issue 1. P. 107–127. https://doi.org/10.1016/S0022-247X(03)00361-5
24. Cabada A., Vivero D. R. Expression of the Lebesgue Δ-integral on time scales as a usual Lebesgue integral; application to the calculus of Δ-antiderivatives // Mathematical and Computer Modelling. 2006. Vol. 43. Issues 1–2. P. 194–207. https://doi.org/10.1016/j.mcm.2005.09.028
25. Пшеничный Б. Н., Раппопорт И. С. Об одной задаче группового преследования // Кибернетика. 1979. № 6. С. 145–146.
26. Бобровски Д. Введение в теорию динамических систем с дискретным временем. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2006.

Поступила в редакцию 21.12.2022

Принята к публикации 23.01.2023

Можегова Елена Сергеевна, аспирант, кафедра дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: mozhegovalena@yandex.ru

Цитирование: Е. С. Можегова. Об одной задаче группового преследования во временных шкалах // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2023. Т. 33. Вып. 1. С. 130–140.

VESTNIK UDMURTSKOGO UNIVERSITETA. MATEMATIKA. MEKHANIKA. KOMP'UTERNYE NAUKI
MATHEMATICS 2023. Vol. 33. Issue 1. Pp. 130–140.

E. S. Mozhegova

On a group pursuit problem on time scales

Keywords: differential game, group pursuit, pursuer, evader, time scale.

MSC2020: 49N79, 49N70, 91A24

DOI: 10.35634/vm230109

In a finite-dimensional Euclidean space $\mathbb{R}^k$, we consider a linear problem of pursuit of one evader by a group of pursuers, which is described on the given time scale $\mathbb{T}$ by equations of the form

$$z_i^{\Delta} = az_i + u_i - v,$$

where z_i^{Δ} is the Δ-derivative of the functions z_i on the time scale $\mathbb{T}$, a is an arbitrary number not equal to zero. The set of admissible controls for each participant is a unit ball centered at the origin, the terminal sets are given convex compact sets in $\mathbb{R}^k$. The pursuers act according to the counter-strategies based on the information about the initial positions and the evader control history. In terms of initial positions and game parameters, a sufficient capture condition has been obtained. For the case of setting the time scale in the form $\mathbb{T} = \{\tau k \mid k \in \mathbb{Z},\ \tau \in \mathbb{R},\ \tau > 0\}$ sufficient pursuit and evasion problems solvability conditions have been found. In the study, in both cases, the resolving function method is used as basic one.

REFERENCES

1. Krasovskii N. N., Subbotin A. I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry* (Positional differential games), Moscow: Nauka, 1974.
2. Subbotin A. I., Chentsov A. G. *Optimizatsiya garantii v zadachakh upravleniya* (Guarantee optimization in control problems), Moscow: Nauka, 1981.
3. Pontryagin L. S. *Izbrannye nauchnye trudy. Tom 2* (Selected scientific works. Vol. 2), Moscow: Nauka, 1988.
4. Chikrii A. A. *Conflict-controlled processes*, Dordrecht: Springer, 1997. https://doi.org/10.1007/978-94-017-1135-7
5. Grigorenko N. L. *Matematicheskie metody upravleniya neskol'kimi dinamicheskimi protsessami* (Mathematical methods for controlling of several dynamic processes), Moscow: Moscow State University, 1990.
6. Blagodatskikh A. I., Petrov N. N. *Konfliktnoe vzaimodeistvie grupp upravlyaemykh ob"ektov* (Conflict interaction of managed objects groups), Izhevsk: Udmurt State University, 2009.
7. Rilwan J., Kumam P., Ibragimov G., Badakaya A. J., Ahmed I. A differential game problem of many pursuers and one evader in the Hilbert space ℓ_2, *Differential Equations and Dynamical Systems*, 2020. https://doi.org/10.1007/s12591-020-00545-5
8. Samatov B. T. The pursuit-evasion problem under integral-geometric constraints on pursuer controls, *Automation and Remote Control*, 2013, vol. 74, issue 7, pp. 1072–1081. https://doi.org/10.1134/S0005117913070023
9. Samatov B. T. The Π-strategy in a differential game with linear control constraints, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, vol. 78, issue 3, pp. 258–263. https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2014.09.008
10. Mamadaliev N. Linear differential pursuit games with integral constraints in the presence of delay, *Mathematical Notes*, 2012, vol. 91, issue 5, pp. 704–713. https://doi.org/10.1134/S0001434612050124
11. Matychyn I. I., Onyshchenko V. V. Differential games of fractional order with impulse effect, *Journal of Automation and Information Sciences*, 2015, vol. 47, issue 4, pp. 43–53. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v47.i4.50
12. Chikrii A. A., Chikrii G. Ts. Matrix resolving functions in game problems of dynamics, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2015, vol. 291, issue 1, pp. 56–65. https://doi.org/10.1134/S0081543815090047

13. Nakonechnyi A. G., Kapustyan E. A., Chikriy A. A. Control of impulse systems in conflict situation, *Journal of Automation and Information Sciences*, 2019, vol. 51, issue 9, pp. 1–11. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v51.i9.10
14. Aulbach B., Hilger S. Linear dynamic processes with inhomogeneous time scale, *Nonlinear Dynamics and Quantum Dynamical Systems: Contributions to the International Seminar ISAM-90, held in Gaussing (GDR), March 19–23, 1990*, De Gruyter, 1990, pp. 9–20. https://doi.org/10.1515/9783112581445-002
15. Hilger S. Analysis on measure chains — a unified approach to continuous and discrete calculus, *Results in Mathematics*, 1990, vol. 18, issues 1–2, pp. 18–56. https://doi.org/10.1007/BF03323153
16. Benchohra M., Henderson J., Ntouyas S. *Impulsive differential equations and inclusions*, Hindawi Publishing Corporation, 2006. https://doi.org/10.1155/9789775945501
17. Bohner M., Peterson A. *Advances in dynamic equations on time scales*, Boston: Birkhäuser, 2003. https://doi.org/10.1007/978-0-8176-8230-9
18. Martins N., Torres D. F. M. Necessary conditions for linear noncooperative N-player delta differential games on time scales, *Discussiones Mathematicae. Differential Inclusions, Control and Optimization*, 2011, vol. 31, issue 1, pp. 23–37. https://doi.org/10.7151/dmdico.1126
19. Petrov N. N. The problem of simple group pursuit with phase constraints in time scales, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2020, vol. 30, issue 2, pp. 249–258 (in Russian). https://doi.org/10.35634/vm200208
20. Petrov N.N. On a problem of pursuing a group of evaders in time scales, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, issue 3, pp. 163–171 (in Russian). https://doi.org/10.21538/0134-4889-2021-27-3-163-171
21. Petrov N. N., Mozhegova E. S. On a simple pursuit problem on time scales of two coordinated evaders, *Chelyabinskii Fiziko-Matematicheskii Zhurnal*, 2022, vol. 7, issue 3, pp. 277–286 (in Russian). https://doi.org/10.47475/2500-0101-2022-17302
22. Petrov N. N. Multiple capture of a given number of evaders in the problem of simple pursuit with phase restrictions on timescales, *Dynamic Games and Applications*, 2022, vol. 12, issue 2, pp. 632–642. https://doi.org/10.1007/s13235-021-00387-y
23. Guseinov G. Sh. Integration on time scales, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2003, vol. 285, issue 1, pp. 107–127. https://doi.org/10.1016/S0022-247X(03)00361-5
24. Cabada A., Vivero D. R. Expression of the Lebesgue Δ-integral on time scales as a usual Lebesgue integral; application to the calculus of Δ-antiderivatives, *Mathematical and Computer Modelling*, 2006, vol. 43, issues 1–2, pp. 194–207. https://doi.org/10.1016/j.mcm.2005.09.028
25. Pshenichnyi B. N., Rappoport I. S. A problem of group pursuit, *Cybernetics*, 1979, vol. 15, no. 6, pp. 939–940. https://zbmath.org/0469.90100
26. Bobrovski D. *Vvedenie v teoriyu dinamicheskikh sistem s diskretnym vremenem* (Introduction to the theory of dynamical systems with discrete time), Moscow–Izhevsk: Institute of Computer Research, 2006.

Received 21.12.2022

Accepted 23.01.2023

Elena Sergeevna Mozhegova, Post-Graduate Student, Department of Differential Equations, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: mozhegovalena@yandex.ru

Citation: E. S. Mozhegova. On a group pursuit problem on time scales, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2023, vol. 33, issue 1, pp. 130–140.