МАТЕМАТИКА 2023. Т. 33. Вып. 1. С. 103–118.

УДК 517.977

© *Н. А. Мамадалиев, Х. Я. Мустапокулов, Г. М. Абдуалимова*

МЕТОД РАЗРЕШАЮЩИХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА УПРАВЛЕНИЯ ИГРОКОВ

В данной работе изучаются игровые задачи преследования, описываемые системой уравнений с запаздывающим аргументом при интегральных ограничениях на управления игроков. В предлагаемой схеме используются идеи метода разрешающих функций. Предлагаются модификации методов (то есть первого и так называемого третьего методов) преследования в случае, когда на управления игроков наложены интегральные ограничения. Получены достаточные условия для возможности завершения преследования за конечное время.

Ключевые слова: дифференциальная игра, игра преследования, интегральное ограничение, разрешающая функция, конфликтно-управляемый процесс, многозначное отображение, управление, преследователь, убегающий.

DOI: 10.35634/vm230107

Введение

Теория дифференциальных игр изучает задачи конфликтного управления при наличии двух или более сторон, имеющих свои интересы и располагающих средствами воздействия на динамическую систему, описываемую системой дифференциальных уравнений. Практические задачи из области экономики, экологии, биологии, управления механическими системами, а также военного дела являются лишь некоторыми приложениями теории дифференциальных игр.

Существенный вклад в развитие теории дифференциальных игр внесли отечественные научные школы, и, прежде всего, школы академиков Л. С. Понтрягина [1–3] и Н. Н. Красовского [4–6]. Первой из них разработаны методы изучения игр сближения–уклонения, сходных по своей постановке с задачами управляемости в теории управления. Второй школой построена теория позиционных дифференциальных игр, которые обобщают задачи оптимального управления. Принципиальное отличие задач теории дифференциальных игр от задач оптимального управления состоит в том, что их решение в общем случае необходимо искать в классе стратегий, устроенных по принципу обратной связи или в каких-то других подобных классах (например, в классе кусочно-программных стратегий).

Основные результаты теории дифференциальных игр относятся преимущественно к случаю, когда на управления игроков наложены геометрические ограничения. Стремление к большей адекватности математических моделей практическим задачам обусловило необходимость изучения дифференциальных игр с интегральными и другими ограничениями. Динамические системы с интегральными ограничениями на управления игроков имеют важное прикладное значение. Такие игры неизбежно возникают, если, например, учитывать ограниченность ресурсов в процессе движения динамических объектов. Поэтому все методы в теории дифференциальных игр, которые возникают, как правило, для геометрических ограничений на управления игроков, впоследствии переносятся на случай интегральных ограничений. Изучению дифференциальных игр с интегральными ограничениями посвящено довольно много работ: Б. Н. Пшеничного, Ю. Н. Онопчука [7], В. Н. Ушакова [8], М. С. Никольского [9, 10], Н. Ю. Сатимова [11, 12], А. В. Мезенцева [13], А. А. Азамова, А. Ш. Кучкарова, Б. Т. Саматова [14], М. Тухтасинова [15, 42], Н. А. Мамадалиева [16–19,29–32], А. Я. Азимова [20], А. Я. Азимова, Ф. В. Гусейнова [21], А. А. Чикрия [22], А. А. Чикрия, В. В. Безмагоричного [23], А. А. Чикрия, А. А. Белоусова [24], А. А. Белоусова [25–27], Б. Т. Саматова [28], И. С. Раппопорта [33], Н. Л. Григоренко [34] и др.

В настоящей работе исследуются конфликтно-игровые задачи, описываемые системой линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом с интегральными ограничениями на управления игроков при наличии запаздывания, с точки зрения возможности завершения преследования за конечное время. Надо отметить, что данные задачи в случае без запаздываний рассмотрены в работах [24, 25]. С использованием идей работы [22, 28] получены достаточные условия для завершения преследования из заданной начальной точки. Следует отметить, что если $h = 0$, то из наших результатов следуют результаты работ [24, 25], полученные для модификации первого и третьего методов преследования.

Первый метод Л. С. Понтрягина [1–3] был развит в работах М. С. Никольского на случай интегральных ограничений на управления игроков. Предлагаемая схема использует идеи метода разрешающих функций. Формулируется аналог условия Л. С. Понтрягина, позволяющий получить достаточные условия для разрешимости задачи за некоторое гарантированное время. Данная работа непосредственно примыкает к исследованиям [24–28].

§ 1. Постановка задачи

В пространстве R^n рассматривается линейная дифференциальная игра преследования [16, 17, 39]

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bz(t-h) + Cu(t) - Dv(t), \quad t \geqslant 0, \tag{1.1}$$

где $z(t) \in R^n$, $n \geqslant 1$; A, B, C, D — постоянные матрицы, размерности которых $(n \times n)$, $(n \times n)$, $(n \times p)$, $(n \times q)$ соответственно; h — фиксированное положительное число, то есть величина запаздывания; $u(t) \in R^p$ — управление преследователя, $v(t) \in R^q$ — управление убегающего. Упраления преследующего и убегающего игроков $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ являются измеримыми по Лебегу функциями, которые удовлетворяют интегральным ограничениям вида

$$\int_0^\infty \|u(t)\|^2\, dt \leqslant 1, \tag{1.2}$$

$$\int_0^\infty \|v(t)\|^2\, dt \leqslant 1. \tag{1.3}$$

Измеримые функции $u = u(t)$, $v = v(t)$, $0 \leqslant t < \infty$, удовлетворяющие интегральным ограничениям (1.2), (1.3), назовем *допустимыми управлениями* преследующего и убегающего игроков соответственно.

Начальным положением для преследования (1.1) является n-мерная абсолютно непрерывная функция $\varphi(t)$, определенная на отрезке $[-h, 0]$. Отрезок $-h \leqslant t \leqslant 0$, на котором задано начальное положение (функция), назовем начальным множеством и обозначим через X, то есть

$$\begin{gathered} X = \Big\{\varphi(\cdot) : \varphi(t) \text{ — абсолютно непрерывная функция,} \\ \text{определенная на отрезке } [-h, 0], \quad z(0) = \varphi(0) \in R^n \setminus M\Big\}. \end{gathered} \tag{1.4}$$

I. Пусть в евклидовом протранстве R^n выделено терминальное множество M, имеющее цилиндрический вид $M = M_0 + M_1$, причем M_0 — линейное подпространство пространства R^n, M_1 — выпуклое компактное подмножество подпространства L, L — ортогональное дополнение к подпространству M_0 в R^n.

Преследование начинается из начального положения $\varphi(\cdot) \in X$ и считается законченным в момент времени $t = t(\varphi(\cdot))$, когда фазовая точка $z(t)$ впервые попадает на множество M. Цель убегающего игрока состоит в том, чтобы по возможности оттянуть окончание игры.

Определение 1. Пусть $K(t)$ — единственная матричная функция, обладающая следующими свойствами [39]:

а) $K(t) = \tilde{0}$, $t < 0$, $\tilde{0}$ — нулевая матрица порядка n;

б) $K(0) = E$, где E — единичная матрица порядка n;

в) матричная функция $K(t-h)$ непрерывна на $[0, +\infty)$;

г) $K(t)$ удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению

$$\dot{K}(t) = AK(t) + BK(t-h) \tag{1.5}$$

при $t > 0$.

Матричная функция $K(t)$ удовлетворяющая условиям а)–г), может быть получена обычным методом последовательного интегрирования уравнения (1.5).

Для системы с запаздыванием вида (1.1) в силу формулы Коши [39] имеет место представление

$$z(t) = K(t)\varphi(0) + \int_{-h}^{0} K(t-s-h)B\varphi(s)\,ds + \int_0^t K(t-s)\Big[Cu(s) - Dv(s)\Big]\,ds. \tag{1.6}$$

Определение 2. Будем говорить, что в игре (1.1)–(1.3) из начального положения $\varphi(\cdot) \in X$ возможно завершение преследования за время $T = T(\varphi(\cdot))$, $0 \leqslant T < +\infty$, если существует функция $u(t,v)$, $0 \leqslant t < +\infty$, $v \in R^q$, $u(t,v) \in R^p$, такая, что для произвольной суммируемой с квадратом функции $v(t)$, $0 \leqslant t < +\infty$, $v(t) \in R^q$, удовлетворяющей неравенству $\|v(\cdot)\|_{L_2[0,+\infty)} \leqslant 1$, функция $u(t) = u(t, v(t))$, $0 \leqslant t < +\infty$, является функцией с суммируемым квадратом, удовлетворяет неравенству $\|u(\cdot)\|_{L_2[0,+\infty)} \leqslant 1$ и траектория $z(t)$, $0 \leqslant t < +\infty$, соответствующая управлениям $u(t)$, $v(t)$ уравнения (1.1) с учетом начального условия (1.4) попадает на терминальное множество M при некотором $t = t^* \in [0, T]$, то есть удовлетворяет включению $z(t^*) \in M$.

Требуется найти начальные положения $\varphi(\cdot) \in X$, из которых в игре (1.1)–(1.3) возможно завершение преследования за конечное время T.

Сформулируем предположение на параметры игры (1.1)–(1.3), которое можно называть аналогом условия Л. С. Понтрягина [1,3] для дифференциальных игр с интегральными ограничениями на управления игроков при наличии запаздывания.

Обозначим через π матрицу оператора ортогонального проектирования из R^n на L, $\pi\colon R^n \to L$. Пусть τ — произвольное положительное число и $t \in [0, \tau]$.

Предположение 1. Существует число α, $0 \leqslant \alpha < 1$, такое, что для всех положительных t выполняется включение

$$\pi K(t)DV \subset \alpha\pi K(t)CU,$$

где $U = \{u \in R^p\colon \|u(\cdot)\|_{L_2[0,\infty)} \leqslant 1\}$ и $V = \{v \in R^q\colon \|v(\cdot)\|_{L_2[0,\infty)} \leqslant 1\}$ — единичные шары в пространствах управлений.

Далее полагаем, что это предположение на параметры игры выполнено. Зафиксируем некоторое начальное положение $\varphi(\cdot) \in X$. Положим

$$\xi[\tau, \varphi(\cdot)] = \pi K(\tau)\varphi(0) + \int_{-h}^{0} \pi K(\tau - t - h)B\varphi(t)\, dt.$$

Введем вспомогательное многозначное отображение вида [24]:

$$\begin{gathered}\widehat{W}(\tau, t, v) = \Big\{\lambda \in R\colon \Big[\lambda\Big(M_1 - \xi\big[\tau, \varphi(\cdot)\big]\Big) + \\ + \pi K(\tau - t)Dv\Big] \bigcap \sqrt{(1-\alpha)\lambda + \alpha\|v\|^2} \cdot \pi K(\tau - t)CU \neq \emptyset\Big\},\end{gathered} \tag{1.7}$$

где $(t, \tau, v) \in [0, \infty) \times [0, \infty) \times R^q$.

Теперь с помощью вспомогательного многозначного отображения (1.7) определим так называемую разрешающую функцию следующим образом [24, 28]:

$$\lambda(\tau, t, v, \varphi(\cdot)) = \sup \widehat{W}(\tau, t, v),$$

здесь в качестве супремума берется точная верхняя грань элемента множества $\widehat{W}(\tau, t, v)$.

Исследуем свойства вспомогательного многозначного отображения (1.7) и функцию $\lambda(\tau, t, v, \varphi(\cdot))$ [24, 28]:

Лемма 1. *Имеют место соотношения:*

(а) $\lambda(\tau, t, v, \varphi(\cdot)) \geqslant 0$ *для всех* $(\tau, t, v) \in [0, \infty) \times [0, \infty) \times R^q$;

(б) $\lambda(\tau, t, v, \varphi(\cdot)) = +\infty$ *при* $\xi[\tau, \varphi(\cdot)] \in M_1$ *для всех* $(t, v) \in [0, \infty) \times R^q$;

(в) $\lambda(\tau, t, v, \varphi(\cdot)) < \infty$ *при* $\xi[\tau, \varphi(\cdot)] \notin M_1$ *для любых* $(t, v) \in [0, \infty) \times R^q$.

Лемма 2. *Интервал* $[0, \lambda(\tau, t, v, \varphi(\cdot))) \subset \widehat{W}(\tau, t, v)$ *для всех* $(\tau, t, v) \in [0, \infty) \times [0, \infty) \times R^q$.

Лемма 3. *При* $\xi[\tau, \varphi(\cdot)] \notin M_1$ *верхняя грань в определении* $\lambda(\tau, t, v, \varphi(\cdot))$ *достигается. Функция* $\lambda(\tau, t, v, \varphi(\cdot))$ *измерима по Борелю по совокупности переменных* $(\tau, t, v) \in \in [0, \infty) \times [0, \infty) \times R^q$.

Доказательства этих лемм вполне аналогичны доказательствам из [24].

Теперь сформулируем достаточное условие гарантированного приведения решения уравнения (1.1)–(1.3) на терминальное множество M из начального положения $\varphi(\cdot) \in X$.

Теорема 1. *Полагаем, что выполнено предположение 1 на параметры игры (1.1)–(1.3). Предположим, что существует момент времени* $T = \tau_1(\varphi(\cdot))$ *такой, что для всех допустимых управлений* $v(\cdot)$ *выполняется неравенство*

$$1 - \inf\left\{\int_0^{\tau_1} \lambda(\tau_1, \tau_1 - t, v(t), \varphi(\cdot))\, dt\colon \int_0^{\tau_1} \|v(t)\|^2\, dt \leqslant 1\right\} \leqslant 0. \tag{1.8}$$

Тогда в игре (1.1) при ограничениях (1.2), (1.3) возможно завершение преследования за время $T = \tau_1(\varphi(\cdot))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем момент времени T, удовлетворяющий условиям теоремы 1. Проанализируем сначала случай $\xi[T,\varphi(\cdot)] \notin M_1$.

Рассмотрим многозначное отображение вида

$$F(t,v) = \Big\{m_1 \in M_1\colon \lambda(T,T-t,v(t),\varphi(\cdot))\big(m_1 - \xi[\tau,\varphi(\cdot)]\big) + \pi K(T-t)Dv \in \\ \in R(T,t,v(t),\alpha)\cdot \pi K(T-t)CU\Big\},$$

где $R(T,t,v,\alpha) = \sqrt{(1-\alpha)\lambda(T,t,v,\varphi(\cdot)) + \alpha\|v\|^2}$.

Из того что, в силу леммы 2 [28], разрешающая функция $\lambda(\tau,t,v(t),\varphi(\cdot))$ полунепрерывна сверху по переменным t и v, следует, что и многозначные отображения

$$\lambda(T,T-\tau,v(\tau),\varphi(\cdot))\big(\xi[\tau,\varphi(\cdot)] - M_1\big) + \pi K(T-t)Dv, \qquad R(T,t,v(t),\alpha)\cdot \pi K(T-t)CU,$$

будут полунепрерывными сверху по переменным t и v. Тогда согласно лемме 1.7.5 работы [35] получаем, что многозначное отображение $F(t,v)$ является измеримым. Поскольку в силу леммы 3, разрешающая функция $\lambda(\tau,t,v(t),\varphi(\cdot))$ является измеримой по Борелю, то для всех $(t,v) \in [0,\infty)\times R^q$ выполняется следущее включение

$$\pi K(T-t)Dv \in \bigcup_{u\in U} R(T,t,v(t),\alpha)\pi K(T-t)CU - \lambda(T,T-t,v(t),\varphi(\cdot))\big(M_1 - \xi[\tau,\varphi(\cdot)]\big). \tag{1.9}$$

Ясно, что это включение, измеримое по Борелю, зависит от (t,v) и непрерывно по $u\in U$.

Из теоремы об измеримом выборе [40, 41] следует, что у включения (1.9) существует однозначный измеримый по Борелю селектор $w(t,v)\in U$ такой, что имеет место включение

$$R(T,t,v(t),\alpha)\pi K(T-t)Cw(t,v) - \pi K(T-t)Dv \in \lambda(T,T-t,v(t),\varphi(\cdot))\big(M_1 - \xi[\tau,\varphi(\cdot)]\big), \tag{1.10}$$

для всех $(t,v)\in R^+\times R^q$, где $R^+ = [0,\infty)$. Следовательно, исходя из этой же теоремы, можно сказать, что существует однозначный измеримый по Борелю селектор $\widetilde{w}(t,v)\in U$ такой, что имеет место равенство

$$\sqrt{\alpha\|v(t)\|^2}\pi K(T-t)C\widetilde{w}(t,v) - \pi K(T-t)Dv = 0 \tag{1.11}$$

при всех $(t,v)\in R^+\times R^q$.

Предположим, что убегающий игрок использует на отрезке $[0,T]$ произвольное измеримое по Лебегу управление $v(t)$, которое удовлетворяет интегральному ограничению

$$\int_0^T \|v(t)\|^2\,dt \leqslant 1.$$

Согласно предположению (1.8), существует момент времени $T^* = T^*(\varphi(\cdot))$ такой, что

$$\int_0^{T^*} \lambda(T,T-t,v(t),\varphi(\cdot))\,dt = 1.$$

Тогда преследующему игроку рекомендуется применять управление $u(t) = u(t,v(t))$, $0\leqslant t\leqslant T$, в виде

$$u(t) = \begin{cases} \sqrt{(1-\alpha)\lambda(T,T-t,v(t),\varphi(\cdot)) + \alpha\|v(t)\|^2}\cdot w(T-t,v(t)) & \text{при } t\in[0,T^*], \\ \sqrt{\alpha\|v(t)\|^2}\cdot \widetilde{w}(T-t,v(t)) & \text{при } t\in(T^*,T]. \end{cases} \tag{1.12}$$

Отметим, что построенное таким образом управление $u(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, (см. (1.12)), а также суперпозиция $u(t, v(t))$, $0 \leqslant t \leqslant T$, функции $u(t, v)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $v \in R^q$, будет измеримой по Лебегу функцией для произвольной измеримой функции $v = v(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $v(t) \in R^q$ [35].

Вначале убедимся, что выбранное таким образом управление $u(t) = u(t, v(t))$, $0 \leqslant t \leqslant T$, (см. (1.12)) удовлетворяет интегральному ограничению (1.2). Действительно, в силу неравенства Коши–Буняковского [36] имеем

$$\int_0^T \|u(t)\|^2\,dt = \int_0^{T^*} \left[(1-\alpha)\lambda(T, T-t, v(t), \varphi(\cdot)) + \alpha\|v(t)\|^2\right]\|w(T-t, v(t))\|^2\,dt +$$
$$+ \int_{T^*}^T \alpha\|v(t)\|^2\|\widetilde{w}(T-t, v(t))\|^2\,dt \leqslant$$
$$\leqslant (1-\alpha)\int_0^{T^*} \lambda(T, T-t, v(t), \varphi(\cdot))\,dt + \alpha\int_0^T \|v(t)\|^2\,dt \leqslant 1,$$

что и означает допустимость управления $u(t) = u(t, v(t))$, $0 \leqslant t \leqslant T$.

Покажем, что применяя описанный способ управления $u(t, v(t))$, $0 \leqslant t \leqslant T$, (см. (1.12)) преследователь, при произвольном допустимом управлении $v = v(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, может завершить преследование за время T. Действительно, пусть $z(t) \notin M$ на отрезке $[0, T]$. Для этого рассмотрим следующую задачу Коши

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bz(t-h) - Cu(t, v(t)) + Dv(t), \quad z(t) = \varphi(t), \quad t \in [-h, 0].$$

Тогда по формуле Коши (см. (1.6)) для решения $z(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, уравнения (1.1), с учетом начального условия (1.4) и учитывая (1.10), (1.11) и (1.12), после его проектирования на L, находим

$$\pi z(T) =$$
$$= \pi K(T)\varphi(0) + \int_{-h}^0 \pi K(T-t-h)B\varphi(t)\,dt + \int_0^T \pi K(T-t)\big[Cu(t, v(t)) - Dv(t)\big]\,dt =$$
$$= K(T)\varphi(0) + \int_{-h}^0 K(T-t-h)B\varphi(t)\,dt + \int_0^{T^*} \pi K(T-t)Cu(t, v(t))\,dt +$$
$$+ \int_{T^*}^T \pi K(T-t)Cu(t, v(t))\,dt - \int_0^T \pi K(T-t)Dv(t)\,dt =$$
$$= \xi[T, \varphi(\cdot)] + \int_0^{T^*} R(T, t, v(t), \alpha)\pi K(T-t)Cw(T-t, v(t))\,dt +$$
$$+ \int_{T^*}^T \sqrt{\alpha\|v(t)\|^2}\pi K(T-t)C\widetilde{w}(T-t, v(t))\,dt - \int_0^T \pi K(T-t)Dv(t)\,dt \in$$
$$\in \xi[T, \varphi(\cdot)] + \int_0^{T^*} \big[\lambda(T, T-t, v(t), \varphi(\cdot))\big(M_1 - \xi[\tau, \varphi(\cdot)]\big) + \pi K(T-t)Dv(t)\big]\,dt +$$
$$+ \int_{T^*}^T \pi K(T-t)Dv(t)\,dt - \int_0^T \pi K(T-t)Dv(t)\,dt =$$
$$= \xi[T, \varphi(\cdot)] + \int_0^{T^*} \lambda(T, T-t, v(t), \varphi(\cdot))\big(M_1 - \xi[\tau, \varphi(\cdot)]\big)\,dt +$$
$$+ \int_0^{T^*} \pi K(T-t)Dv(t)\,dt + \int_{T^*}^T \pi K(T-t)Dv(t)\,dt - \int_0^T \pi K(T-t)Dv(t)\,dt =$$
$$= \xi[T, \varphi(\cdot)] + \int_0^{T^*} \lambda(T, T-t, v(t), \varphi(\cdot))\big(M_1 - \xi[\tau, \varphi(\cdot)]\big)\,dt + 0.$$

Так как

$$\xi[T,\varphi(\cdot)] - \int_0^{T^*} \lambda(T,T-t,v(t),\varphi(\cdot))\xi[T,\varphi(\cdot)]\,dt = \\ = \big[1 - \int_0^{T^*} \lambda(T,T-t,v(t),\varphi(\cdot))\,dt\big]\xi[T,\varphi(\cdot)] = 0,$$

получаем

$$\pi z(T) \in \int_0^{T^*} \lambda(T,T-t,v(t),\varphi(\cdot))M_1\,dt = M_1.$$

Следовательно, $\pi z(T) \in M_1$, что эквивалентно включению $z(T) \in M$, вопреки нашему допущению.

Таким образом, игра (1.1) из начального положения $\varphi(\cdot) \in X$ завершается за конечное время T.

Аналогично рассматривается случай $\xi[T,\varphi(\cdot)] \in M_1$. В этом случае управление преследователя на промежутке $[0,T]$ имеет вид

$$u(t) = \sqrt{\alpha\|v(t)\|^2}\widetilde{w}(T-t,v(t)). \tag{1.13}$$

Покажем, что в этом случае с помощью управления (1.13) игра (1.1) из точки $\varphi(\cdot) \in X$ так же завершается за время T (для любого допустимого управления $v(t)$) и управление $u(t)$ удовлетворяет интегральному ограничению (1.2).

$$\pi z(T) = \pi K(T)\varphi(0) + \int_{-h}^{0} \pi K(T-t-h)B\varphi(t)\,dt + \\ + \int_0^T \pi K(T-t)Cu(t,v(t))\,dt - \int_0^T \pi K(T-t)Dv(t)\,dt = \\ = \xi[T,\varphi(\cdot)] + \int_0^T \sqrt{\alpha\|v(t)\|^2}\pi K(T-t)C\widetilde{w}(T-t,v(t))\,dt - \int_0^T \pi K(T-t)Dv(t)\,dt = \\ = \xi[T,\varphi(\cdot)] + \int_0^T \pi K(T-t)Dv(t)\,dt - \int_0^T \pi K(T-t)Dv(t)\,dt = \xi[T,\varphi(\cdot)] \in M_1.$$

Покажем, что выбранное управление (1.13) удовлетворяет неравенству (1.2). Имеем

$$\int_0^T \|u(t)\|^2\,dt = \alpha\int_0^T \|v(t)\|^2\widetilde{w}(T-t,v(t))\|^2\,dt \leqslant \alpha < 1.$$

Таким образом, игра (1.1)–(1.3) из начальной точки $\varphi(\cdot) \in X$ при указанном выше способе управления $u(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, (см. (1.12)) завершается за конечное время T. Теорема 1 доказана полностью. □

Теперь приводим задачу, которая является частным случаем задачи рассматриваемой в разделе I. Ниже сформулированная теорема является следствием теоремы 1.

Расматривается линейная дифференциальная игра преследования с интегральными ограничениями (1.2), (1.3) на управляющие параметры (1.1), раздел I.

Пусть терминальное множество M является линейным подпространством пространства R^n.

Положим

$$\eta[\tau,\varphi(\cdot)] = \begin{cases} \frac{\xi[\tau,\varphi(\cdot)]}{|\xi[\tau,\varphi(\cdot)]|} & \text{при } \xi[\tau,\varphi(\cdot)] \neq 0, \\ \eta^0 & \text{при } \xi[\tau,\varphi(\cdot)] = 0, \end{cases}$$

где η^0 — произвольный единичный вектор из L, вектор-функция $\xi[T,\varphi(\cdot)]$ определена в разделе I.

Введем вспомогательное многозначное отображение [24, 28] вида:

$$\begin{gathered} \widehat{W}(\tau,t,v) = \big\{\lambda \in R\colon \lambda\eta[\tau,\varphi(\cdot)] + \\ + \pi K(t)Dv \in \sqrt{(1-\alpha)|\xi[\tau,\varphi(\cdot)]|^{-1}\lambda + \alpha\|v\|^2}\cdot \pi K(t)CU\big\}, \end{gathered} \tag{1.14}$$

где $(\tau,t,v) \in [0,\infty)\times[0,\infty)\times R^q$.

Далее, рассмотрим вспомогательную функцию, так называемую разрешающую функцию [24, 28]:

$$\lambda(\tau,t,v,\varphi(\cdot)) = \sup \widehat{W}(\tau,t,v),$$

здесь в качестве супремума берется точная верхняя грань элементов множества $\widehat{W}(\tau,t,v)$.

Исследуем свойства вспомогательного многозначного отображения (1.14) и функцию $\lambda(\tau,t,v,\varphi(\cdot))$ [24, 28]:

Лемма 4. *Имеют место соотношения:*

(а) $\lambda(\tau,t,v,\varphi(\cdot)) \geqslant 0$ *для всех* $(\tau,t,v) \in [0,\infty)\times[0,\infty)\times R^q$;

(б) $\lambda(\tau,t,v,\varphi(\cdot)) = +\infty$ *при* $\xi[\tau,\varphi(\cdot)] = 0$ *для всех* $(t,v) \in [0,\infty)\times R^q$;

(в) $\lambda(\tau,t,v,\varphi(\cdot)) < \infty$ *при* $\xi[\tau,\varphi(\cdot)] \neq 0$ *для любых* $(t,v) \in [0,\infty)\times R^q$.

Лемма 5. *Промежуток* $[0,\lambda(\tau,t,v,\varphi(\cdot))) \subset \widehat{W}(\tau,t,v)$ *для всех* $(\tau,t,v) \in [0,\infty)\times[0,\infty)\times R^q$.

Лемма 6. *При* $\xi[\tau,\varphi(\cdot)] \neq 0$ *верхняя грань в определении* $\lambda(\tau,t,v,\varphi(\cdot))$ *достигается. Функция* $\lambda(\tau,t,v,\varphi(\cdot))$ *измерима по Борелю по совокупности переменных* $(\tau,t,v) \in [0,\infty)\times\times[0,\infty)\times R^q$.

Доказательства этих лемм вполне аналогичны доказательствам из [24].

Теорема 2. *Полагаем, что выполнено предположение 1 на параметры игры (1.1)–(1.3). Предположим, что существует момент времени* $T = \tau_2(\varphi(\cdot))$ *такой, что для всех допустимых управлений* $v(\cdot)$ *выполняется неравенство*

$$\big|\xi[\tau_2,\varphi(\cdot)]\big| - \inf\left\{\int_0^{\tau_2} \lambda(\tau_2,\tau_2-t,v(t),\varphi(\cdot))\,dt\colon \int_0^{\tau_2}\|v(t)\|^2\,dt \leqslant 1\right\} \leqslant 0.$$

Тогда в игре (1.1) при ограничениях (1.2), (1.3) возможно завершение преследования за время $T = \tau_1(\varphi(\cdot))$.

II. Через $M(t) \subset L$, $0 \leqslant t \leqslant \tau$, обозначим произвольное измеримое компактнозначное многозначное отображение, удовлетворяющее условию [12, 16–19]

$$\int_0^\tau M(t)\,dt \subset M_1.$$

За многозначное отображение $M(t)$ можно брать $\frac{1}{\tau}M_1$, $\frac{2t}{\tau^2}M_1$, $\frac{3t^2}{\tau^3}M_1$, $\frac{e^t}{e^\tau-1}M_1$, $0 \leqslant t \leqslant \tau$, и т. д.

Введем следующее вспомогательное многозначное отображение [24, 28] вида:

$$\widehat{W}(\tau, t, v) = \big\{\lambda \in R\colon \lambda\eta[t, \varphi(\cdot)] + \\ + \pi K(\tau)Dv \in \big[M(t) + \sqrt{(1-\alpha)|\xi[\tau, \varphi(\cdot)]|^{-1}\lambda + \alpha\|v(\cdot)\|^2} \cdot \pi K(\tau)CU\big]\big\}, \tag{1.15}$$

где $(t, \tau, v) \in [0, \infty) \times [0, \infty) \times R^q$.

Далее, рассмотрим вспомогательную функцию, так называемую разрешающую функцию [22]:

$$\lambda(\tau, t, v, \varphi(\cdot)) = \sup \widehat{W}(\tau, t, v),$$

здесь в качестве супремума берется точная верхняя грань элементов множества $\widehat{W}(\tau, t, v)$.

Исследуем свойства вспомогательного многозначного отображения (1.15) и функцию $\lambda(\tau, t, v, \varphi(\cdot))$:

Лемма 7. *Имеют место соотношения:*

(а) $\lambda(\tau, t, v, \varphi(\cdot)) \geqslant 0$ *для всех* $(\tau, t, v) \in [0, \infty) \times [0, \infty) \times R^q$;

(б) $\lambda(\tau, t, v, \varphi(\cdot)) = +\infty$ *при* $\xi[\tau, \varphi(\cdot)] = 0$ *для всех* $(t, v) \in [0, \infty) \times R^q$;

(в) $\lambda(\tau, t, v, \varphi(\cdot)) < \infty$ *при* $\xi[\tau, \varphi(\cdot)] \neq 0$ *для любых* $(t, v) \in [0, \infty) \times R^q$.

Лемма 8. *Промежуток* $[0, \lambda(\tau, t, v, \varphi(\cdot))) \subset \widehat{W}(\tau, t, v)$ *для всех* $(\tau, t, v) \in [0, \infty) \times [0, \infty) \times R^q$.

Лемма 9. *При* $\xi[\tau, \varphi(\cdot)] \neq 0$ *верхняя грань в определении* $\lambda(\tau, t, v, \varphi(\cdot))$ *достигается. Функция* $\lambda(\tau, t, v, \varphi(\cdot))$ *измерима по Борелю по совокупности переменных* $(\tau, t, v) \in [0, \infty) \times \times [0, \infty) \times R^q$.

Доказательство этих лемм вполне аналогично доказательстам из [24].

Предположение 2. Существуют положительное число $\tau_3(\varphi(\cdot))$ и многозначное отображение $M(t) \subset L$, $0 \leqslant t \leqslant \tau_3$, такие, что:

а) суперпозиция $\lambda(\tau_3, t, v(t), \varphi(\cdot))$, $0 \leqslant t \leqslant \tau_3$, функции $\lambda(\tau_3, t, v, \varphi(\cdot))$, $0 \leqslant t \leqslant \tau_3$, $v \in R^q$, и произвольной суммируемой с квадратом функции $v = v(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \tau_3$, для которой $\|v(\cdot)\| \leqslant \sigma$, является суммируемой;

б) справедливо неравенство

$$\big|\xi[\tau_3, \varphi(\cdot)]\big| - \inf\left\{\int_0^{\tau_3} \lambda(\tau_3, \tau_3 - t, v(t), \varphi(\cdot))\,dt\colon \int_0^{\tau_3} \|v(t)\|^2\,dt \leqslant 1\right\} \leqslant 0.$$

Теорема 3. *Пусть для конфликтно-управляемого процесса* (1.1)–(1.3) *выполнено предположение* 2. *Тогда в игре* (1.1) *при ограничениях* (1.2), (1.3) *возможно завершение преследования за время* $T = \tau_3(\varphi(\cdot))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По-прежнему условимся писать вместо $\tau_3(\varphi(\cdot))$ момент времени T. Аналогично п. 1 зафиксируем момент времени T, удовлетворяющий предположениям теоремы 3. Согласно лемме 3 разрешающая функция $\lambda(\tau, t, v, \varphi(\cdot))$ является измеримой по Борелю и для всех $(t, v) \in [0, \infty) \times R^q$ выполняется следущее включение

$$\lambda(T, T-t, v(t), \varphi(\cdot))\eta[T, \varphi(\cdot)] + \pi K(T-t)Dv \in$$
$$\in M(t) + R(T, t, v(t), \alpha)\pi K(T-t)CU.$$

Ясно, что это включение является измеримым по Борелю, зависит от (t, v) и непрерывно по $u \in U$.

Из теоремы об измеримом селекторе [40,41] следует, что у включения (1.15) существует однозначный измеримый по Борелю селектор $w(t, v) \in U$ и $m(t) \in M(t)$ такой, что имеет место равенство

$$\begin{aligned} \lambda(T, T-t, v(t), \varphi(\cdot))\eta[T, \varphi(\cdot)] + \pi K(T-t)Dv = \\ = m(t) + R(T, t, v(t), \alpha)\pi K(T-t)Cw(t, v) \end{aligned} \tag{1.16}$$

для всех $(t, v) \in R^+ \times R^q$, где $m(t) \in M(t)$, $R^+ = [0, \infty)$. Следовательно, исходя из этой же теоремы можно сделать заключение, что существует однозначный измеримый по Борелю селектор $\widetilde{w}(t, v) \in U$ такой, что имеет место равенство

$$\pi K(T-t)Dv = m(t) + \sqrt{\alpha \|v(t)\|^2}\pi K(T-t)C\widetilde{w}(t, v) \tag{1.17}$$

при всех $(t, v) \in R^+ \times R^q$.

Предположим, что убегающий игрок использует на интервале $[0, T]$ произвольное измеримое по Лебегу управление $v(t)$, которое удовлетворяет интегральному ограничению

$$\int_0^\infty \|v(t)\|^2 \, dt \leqslant 1.$$

В силу п. б) предположения 2 существует момент времени $T = T^*(\varphi(\cdot))$ такой, что

$$\int_0^{T^*} \lambda(T, T-t, v(t), \varphi(\cdot)) \, dt = 1.$$

Тогда управление преследователя на промежутке $[0, T]$ рекомендуется в виде управления (1.11). Тогда по формуле Коши (см. (1.6)) для решения $z(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, уравнения (1.1), с учетом начального условия (1.4), учитывая (1.11), (1.16) и (1.17), после его проектирования на L, находим

$$\begin{aligned}
z(T) = K(T)\varphi(0) + \int_{-h}^0 K(T-t-h)B\varphi(t)\, dt - \int_0^T K(T-t)\big[Cu(t, v(t)) - Dv(t)\big]\, dt = \\
= K(T)\varphi(0) + \int_{-h}^0 K(T-t-h)B\varphi(t)\, dt - \int_0^{T^*} \pi K(T-t)Cu(t, v(t))\, dt - \\
- \int_{T^*}^T \pi K(T-t)Cu(t, v(t))dt + \int_0^T \pi K(T-t)Dv(t)\, dt = \\
= \xi[T, \varphi(\cdot)] - \int_0^{T^*} R(T, t, v(t), \alpha)\pi K(T-t)Cw(T-t, v(t))dt - \\
- \int_{T^*}^T \sqrt{\alpha\|v(t)\|^2}\pi K(T-t)C\widetilde{w}(T-t, v(t))\, dt + \int_0^T \pi K(T-t)Dv(t)\, dt = \\
= \xi[T, \varphi(\cdot)] - \int_0^{T^*} \big[\lambda(T, T-t, v(t), \varphi(\cdot))\eta[T, \varphi(\cdot)] + \pi K(T-t)Dv(t) - m(t)\big]\, dt - \\
- \int_{T^*}^T \big[\pi K(T-t)Dv(t) - m(t)\big]\, dt + \int_0^T \pi K(T-t)Dv(t)\, dt =
\end{aligned}$$

$$
= \xi[T, \varphi(\cdot)] - \int_0^{T^*} \lambda(T, T-t, v(t), \varphi(\cdot))\eta[T, \varphi(\cdot)]\, dt + \int_0^{T^*} m(t)\, dt -
$$
$$
- \int_0^{T^*} \pi K(T-t)Dv(t)\, dt - \int_{T^*}^{T} \pi K(T-t)Dv(t)\, dt + \int_{T^*}^{T} m(t)\, dt + \int_0^{T} \pi K(T-t)Dv(t)\, dt.
$$

Так как

$$
\xi[T, \varphi(\cdot)] - \int_0^{T^*} \lambda(T, T-t, v(t), \varphi(\cdot))\eta[T, \varphi(\cdot)]\, dt =
$$
$$
= \Big[\big|\xi[T, \varphi(\cdot)]\big| - \int_0^{T^*} \lambda(T, T-t, v(t), \varphi(\cdot))\, dt\Big]\eta[T, \varphi(\cdot)] = 0,
$$

получаем

$$
\pi z(T) = \int_0^{T^*} m(t)\, dt \in \int_0^{T^*} M(t)\, dt \subset M_1.
$$

Следовательно, $\pi z(T) \in M_1$, что эквивалентно включению $z(T) \in M$. Таким образом, возможность завершения преследования в игре (1.1)–(1.3) доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Понтрягин Л. С. Избранные научные труды. Т. 2. М.: Наука, 1988.
2. Понтрягин Л. С. К теории дифференциальных игр // Успехи математических наук. 1966. Т. 21. Вып. 4 (130). С. 219–274. https://www.mathnet.ru/rus/rm5903
3. Понтрягин Л. С. Линейные дифференциальные игры преследования // Математический сборник (новая серия). 1980. Т. 112 (154). № 3 (7). С. 307–330. https://www.mathnet.ru/rus/sm2728
4. Красовский Н. Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970.
5. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
6. Красовский Н. Н. Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. М.: Наука, 1985.
7. Пшеничный Б. Н., Онопчук Ю. Н. Линейные дифференциальные игры с интегральными ограничениями // Известия Академии наук СССР. Техническая кибернетика. 1968. № 1. С. 13–22.
8. Ушаков В. Н. Экстремальные стратегии в дифференциальных играх с интегральными ограничениями // Прикладная математика и механика. 1972. Т. 36. Вып. 1. С. 15–23. https://elibrary.ru/item.asp?id=32817114
9. Никольский М. С. Прямой метод в линейных дифференциальных играх с общими интегральными ограничениями // Дифференциальные уравнения. 1972. Т. 8. № 6. С. 964–971. https://www.mathnet.ru/rus/de1576
10. Никольский М. С. Линейные дифференциальные игры преследования с интегральными ограничениями // Дифференциальные уравнения. 1992. Т. 28. № 2. С. 219–223. https://www.mathnet.ru/rus/de7716
11. Сатимов Н. Ю., Фазылов А. З., Хамдамов А. А. О задачах преследования и уклонения в дифференциальных и дискретных играх многих лиц с интегральными ограничениями // Дифференциальные уравнения. 1984. Т. 20. № 8. С. 1388–1396. https://www.mathnet.ru/rus/de5253
12. Сатимов Н. Ю. Методы решения задачи преследования в теории дифференциальных игр. Ташкент: Национальная библиотека Узбекистана имени Алишера Навои, 2019.
13. Мезенцев А. В. Дифференциальные игры с интегральными ограничениями на управления. М.: Изд-во МГУ, 1988.
14. Азамов А., Кучкаров А. Ш., Саматов Б. Т. О связи между задачами преследования, управляемости и устойчивости в целом в линейных системах с разнотипными ограничениями // Прикладная математика и механика. 2007. Т. 71. № 2. С. 259–263. https://elibrary.ru/item.asp?id=9486344

15. Тухтасинов М. Линейная дифференциальная игра преследования с импульсными и интегрально-ограниченными управлениями игроков // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22. № 3. С. 273–282. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2016-22-3-273-282
16. Мамадалиев Н. Об одной задаче преследования с интегральными ограничениями на управления игроков // Сибирский математический журнал. 2015. Т. 56. № 1. С. 129–148. https://www.mathnet.ru/rus/smj2627
17. Мамадалиев Н. Об одной линейной задаче преследования при наличии запаздывания // Сибирский журнал индустриальной математики. 2010. Т. 13. № 3 (43). С. 86–100. https://www.mathnet.ru/rus/sjim627
18. Мамадалиев Н. О задаче преследования для линейных дифференциальных игр с различными ограничениями на управления игроков // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48. № 6. С. 860–873. https://elibrary.ru/item.asp?id=17745834
19. Мамадалиев Н. А. О задачах преследования в линейных дифференциальных играх при наличии запаздываний // Известия высших учебных заведений. Математика. 2010. № 6. С. 16–22. https://www.mathnet.ru/rus/ivm6941
20. Азимов А. Я. Об одном способе преследования в линейных дифференциальных играх с общими интегральными ограничениями // Известия Академии наук СССР. Техническая кибернетика. 1974. № 2. С. 31–35.
21. Азимов А. Я., Гусейнов Ф. В. О некоторых классах дифференциальных игр с общими интегральными ограничениями // Известия Академии наук СССР. Техническая кибернетика. 1972. № 3. С. 9–16.
22. Чикрий А. А. Конфликтно управляемые процессы. Киев: Наукова думка, 1992.
23. Чикрий А. А., Безмагоричный В. В. Метод разрешающих функций для линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями // Автоматика. 1993. № 4. С. 26–30.
24. Чикрий А. А., Белоусов А. А. О линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15. № 4. С. 290–301. https://www.mathnet.ru/rus/timm444
25. Белоусов А. А. Метод разрешающих функций для дифференциальных игр с интегральными ограничениями // Теорія оптимальних рішень. 2010. № 9. С. 10–16. http://nbuv.gov.ua/UJRN/Tor_2010_9_3
26. Белоусов А. А. Дифференциальные игры с интегральными ограничениями на управления в норме L_1 // Теорія оптимальних рішень. 2011. № 10. С. 3–8. http://nbuv.gov.ua/UJRN/Tor_2011_10_3
27. Белоусов А. А. Дифференциальные игры с интегральными ограничениями и импульсными управлениями // Доклады Национальной академии наук Украины. 2013. № 11. С. 37–42.
28. Саматов Б. А. Метод разрешающих функций для решения задачи преследования при интегральных ограничениях на управления // Проблемы управления и информатики. 2013. № 4. С. 16–32.
29. Мамадалиев Н. Линейные дифференциальные игры преследования с интегральными ограничениями при наличии запаздывания // Математические заметки. 2012. Т. 91. Вып. 5. С. 750–760. https://doi.org/10.4213/mzm6346
30. Мамадалиев Н. Задача преследования для линейных игр с интегральными ограничениями на управления игроков // Известия высших учебных заведений. Математика. 2020. № 3. С. 12–28. https://doi.org/10.26907/0021-3446-2020-3-12-28
31. Мамадалиев Н. А., Ибайдуллаев Т. Т. Модификация третьего метода преследования для дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа // Известия высших учебных заведений. Математика. 2021. № 11. С. 21–33. https://doi.org/10.26907/0021-3446-2021-11-21-33
32. Мамадалиев Н. А., Хайиткулов Б. Х. Полное решение одного класса дифференциальных игр преследования с интегральным ограничением и импульсным управлением // Известия высших учебных заведений. Математика. 2022. № 3. С. 28–37. https://doi.org/10.26907/0021-3446-2022-3-28-37
33. Раппопорт И. С. К решению задачи преследования с интегральными ограничениями на управления // Теорія оптимальних рішень. 2018. № 17. С. 10–18. http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/144965

34. Григоренко Н. Л. О структуре одного класса дифференциальных игр с общими интегральными ограничениями // Управляемые системы. 1974. Вып. 12. С. 46–53.
https://www.mathnet.ru/rus/da1119
35. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977.
36. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972.
37. Петров Н. Н. Квазилинейные конфликтно-управляемые процессы с дополнительными ограничениями // Прикладная математика и механика. 1993. Т. 57. Вып. 6. С. 61–68.
https://elibrary.ru/item.asp?id=24759610
38. Петров Н. Н. Об одной задаче преследования со многими убегающими // Вестник Удмуртского университета. Математика. 2000. Вып. 1. С. 131–136.
39. Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967.
40. Куратовский К. Топология. Т. 2. М.: Мир, 1969.
41. Kisielewicz M. Differential inclusions and optimal control. Boston: Kluwer Academic Publ., 1991.
42. Tukhtasinov M., Mustapokulov Kh. Ya. ε-positional strategies in theory of differential pursuit games and invariance of constant multivalued mappings in heat-conductivity problems // Journal of Mathematical Sciences. 2022. Vol. 265. Issue 1. P. 117–128.
https://doi.org/10.1007/s10958-022-06049-7

Поступила в редакцию 12.09.2022

Принята к публикации 13.02.2023

Мамадалиев Нуманжон Алимджанович, д. ф.-м. н., профессор, факультет математики, Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека, 100174, Узбекистан, г. Ташкент, ул. Университетская, 4;
Институт математики им. В. И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан, 100174, Узбекистан, г. Ташкент, ул. Университетская, 9.
E-mail: m_numana59@mail.ru

Мустапокулов Хамдам Янгибоевич, к. ф.-м. н., доцент, факультет математики, Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека, 100174, Узбекистан, г. Ташкент, ул. Университетская, 4;
Ташкентский государственный технический университет им. И. Каримова, 100174, Узбекистан, г. Ташкент, ул. Университетская, 2.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5764-0314
E-mail: m_hamdam@mail.ru

Абдуалимова Гулзурахон Мирзакомиловна, Андижанский государственный университет, 170100, Узбекистан, г. Андижан, ул. Университетская, 129.
E-mail: abduolimova81@inbox.ru

Цитирование: Н. А. Мамадалиев, Х. Я. Мустапокулов, Г. М. Абдуалимова. Метод разрешающих функций для решения задачи преследования с интегральными ограничениями на управления игроков // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2023. Т. 33. Вып. 1. С. 103–118.

VESTNIK UDMURTSKOGO UNIVERSITETA. MATEMATIKA. MEKHANIKA. KOMP'YUTERNYE NAUKI
MATHEMATICS 2023. Vol. 33. Issue 1. Pp. 103–118.

N. A. Mamadaliev, Kh. Ya. Mustapokulov, G. M. Abdualimova

The method of resolving functions for solving a pursuit problem with integral constraints on player controls

Keywords: differential game, pursuit game, integral constraint, resolving function, conflict-controlled process, multivalued mapping, control, pursuer, evader.

MSC2020: 35F46, 35K51, 35R12, 49N25, 93C20

DOI: 10.35634/vm230107

In this paper, we study pursuit game problems described by a system of equations with a retarded argument under integral constraints on the players' controls. The proposed scheme uses the ideas of the method of resolving functions. Modifications of methods (i. e., the first and so-called third methods) [1,3,12] of pursuit are proposed in the case when integral constraints are imposed on the players' controls. Sufficient conditions are obtained for the possibility of completing the pursuit in a finite time.

REFERENCES

1. Pontryagin L. S. *Izbrannye nauchnye trudy. Tom 2* (Selected scientific works. Vol. 2), Moscow: Nauka, 1988.
2. Pontryagin L. S. On the theory of differential games, *Russian Mathematical Surveys*, 1966, vol. 21, no. 4, pp. 193–246. https://doi.org/10.1070/RM1966v021n04ABEH004171
3. Pontrjagin L. S. Linear differential games of pursuit, *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1981, vol. 40, no. 3, pp. 285–303. https://doi.org/10.1070/SM1981v040n03ABEH001815
4. Krasovskii N. N. *Igrovye zadachi o vstreche dvizhenii* (Game problems on the encounter of motions), Moscow: Nauka, 1970. https://zbmath.org/0246.90060
5. Krasovskii N. N., Subbotin A. I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry* (Positional-differential games), Moscow: Nauka, 1974. https://zbmath.org/0298.90067
6. Krasovskii N. N. *Upravlenie dinamicheskoi sistemoi. Zadacha o minimume garantirovannogo rezul'tata* (Control of a dynamical system: Problem on the minimum of guaranteed result), Moscow: Nauka, 1985.
7. Pshenichnyi B. N., Onopchuk Yu. N. Linear differential games with integral constraints, *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Tekhnicheskaya Kibernetika*, 1968, no. 1, pp. 13–22 (in Russian). https://zbmath.org/0155.29103
8. Ushakov V. N. Extremal strategies in differential games with integral constraints, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1972, vol. 36, issue 1, pp. 12–19. https://doi.org/10.1016/0021-8928(72)90076-7
9. Nikol'skii M. S. A direct method in linear differential games with general integral constraints, *Differentsial'nye Uravneniya*, 1972, vol. 8, no. 6, pp. 964–971 (in Russian). https://www.mathnet.ru/eng/de1576
10. Nikol'skii M. S. Linear differential pursuit games with integral constraints, *Differentsial'nye Uravneniya*, 1992, vol. 28, no. 2, pp. 219–223 (in Russian). https://www.mathnet.ru/eng/de7716
11. Satimov N. Yu., Fazylov A. Z., Khamdamov A. A. Problems of pursuit and evasion in differential and discrete n-person games with integral constraints, *Differentsial'nye Uravneniya*, 1984, vol. 20, no. 8, pp. 1388–1396 (in Russian). https://www.mathnet.ru/eng/de5253
12. Satimov N. Yu. *Metody resheniya zadachi presledovaniya v teorii differentsial'nykh igr* (Methods for solving the pursuit problem in the theory of differential games), Tashkent: National Library of Uzbekistan named after Alisher Navoi, 2019.
13. Mezentsev A. V. *Differentsial'nye igry s integral'nymi ogranicheniyami na upravleniya* (Differential games with integral constraints on controls), Moscow: Moscow State University, 1988.
14. Azamov A. A., Kuchkarov A. Sh., Samatov B. The relation between problems of pursuit, controllability and stability in the large in linear systems with different types of constraints, *Journal of Applied*

Mathematics and Mechanics, 2007, vol. 71, issue 2, pp. 229–233.
https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2007.06.006

15. Tukhtasinov M.A linear differential game of pursuit with impulse and integrally constrained controls of the players, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2016, vol. 22, no. 3. pp. 273–282 (in Russian). https://doi.org/10.21538/0134-4889-2016-22-3-273-282
16. Mamadaliev N. On a pursuit problem with integral constraints on the players' controls, *Siberian Mathematical Journal*, 2015, vol. 56, issue 1, pp. 107–124.
https://doi.org/10.1134/S0037446615010115
17. Mamadaliev N. On a linear pursuit-evasion problem with delay, *Sibirskii Zhurnal Industrial'noi Matematiki*, 2010, vol. 13, no. 3 (43), pp. 86–100 (in Russian). https://www.mathnet.ru/eng/sjim627
18. Mamadaliev N. On the pursuit problem for linear differential games with distinct constraints on the players' controls, *Differential Equations*, 2012, vol. 48, no. 6, pp. 867–880.
https://doi.org/10.1134/S0012266112060109
19. Mamadaliev N. A. Pursuit problems in linear differential games with delay, *Russian Mathematics*, 2010, no. 6, pp. 13–18. https://doi.org/10.3103/S1066369X10060022
20. Azimov A. Ya. On one method of pursuit in linear differential games with general integral constraints, *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Tekhnicheskaya Kibernetika*, 1974, no. 2, pp. 31–35 (in Russian).
https://zbmath.org/0277.90104
21. Azimov A. Ya., Guseinov F. V. On some classes of differential games with general integral constraints, *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Tekhnicheskaya Kibernetika*, 1972, no. 3, pp. 9–16 (in Russian). https://zbmath.org/0236.90073
22. Chikrii A. *Conflict-controlled processes*, Dordrecht: Springer, 1997.
https://doi.org/10.1007/978-94-017-1135-7
23. Chikrii A. A., Bezmagorichnyi V. V. Resolving function method for linear differential games with integral constraints, *Automation*, 1993, no. 4, pp. 26–30 (in Russian).
24. Chikrii A. A., Belousov A. A. On linear differential games with integral constraints, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2010, vol. 269, issue 1, pp. 69–80.
https://doi.org/10.1134/S0081543810060076
25. Belousov A. A. Method of resolving functions for differential games with integral constraints, *Teoriya optimal'nykh reshenii*, 2010, no. 9, pp. 10–16 (in Russian). http://nbuv.gov.ua/UJRN/Tor_2010_9_3
26. Belousov A. A. Differential games with integral constraints on controls in the L_1 norm, *Teoriya optimal'nykh reshenii*, 2011, no. 10, pp. 3–8 (in Russian). http://nbuv.gov.ua/UJRN/Tor_2011_10_3
27. Belousov A. A. Differential games with integral constraints and impulse controls, *Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine*, 2013, no. 11, pp. 37–42 (in Russian).
28. Samatov B. A. The method of resolving functions for solving the pursuit problem under integral constraints on controls, *Journal of Automation and Information Sciences*, 2013, no. 4, pp. 16–32 (in Russian).
29. Mamadaliev N. Linear differential pursuit games with integral constraints in the presence of delay, *Mathematical Notes*, 2012, vol. 91, issue 5, pp. 704–713 (in Russian).
https://doi.org/10.1134/S0001434612050124
30. Mamadaliev N. A. The pursuit problem for linear games with integral constraints on players' controls, *Russian Mathematics*, 2020, vol. 64, issue 3, pp. 9–24. https://doi.org/10.3103/S1066369X20030020
31. Mamadaliev N. A., Ibaydullaev T. T. On the modified third method in the pursuit problem for differential-difference equations of neutral type, *Russian Mathematics*, 2021, vo. 65, issue 11, pp. 18–28. https://doi.org/10.3103/S1066369X21110037
32. Mamadaliev N. A., Khayitkulov B. Kh. Complete solution of a class of differential pursuit games with integral constraint and impulse control, *Russian Mathematics*, 2022, vol. 66, issue 3, pp. 22–29.
https://doi.org/10.3103/S1066369X22030069
33. Rappoport I. S. To the decision of pursuit problem under integral constrains on controls, *Teoriya optimal'nykh reshenii*, 2018, no. 17, pp. 10–18 (in Russian).
http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/144965
34. Grigorenko N. L. On the structure of a class of differential games with general integral constraints,

Upravlyaemye Systemy, 1974, issue 12, pp. 46–53 (in Russian). https://www.mathnet.ru/eng/da1119
35. Warga J. *Optimal control of differential and functional equations*, Academic Press, 1972. https://doi.org/10.1016/C2013-0-11669-8
36. Kolmogorov A. N., Fomin S. V. *Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza* (Elements of the theory of functions and functional analysis), Moscow: Nauka, 1972.
37. Petrov N. N. Quasilinear conflict-controlled processes with additional restrictions, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1993, vol. 57, issue 6, pp. 1015–1021. https://doi.org/10.1016/0021-8928(93)90079-2
38. Petrov N. N. On one problem of pursuit with many evaders, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika*, 2000, issue 1, pp. 131–136 (in Russian).
39. Bellman R., Cooke K. L. *Differential-difference equations*, Santa Monica: RAND Corporation, 1963.
40. Kuratowski K. *Topology. Vol. 2*, Academic Press, 1968.
41. Kisielewicz M. Differential inclusions and optimal control. Boston: Kluwer Academic Publ., 1991.
42. Tukhtasinov M., Mustapokulov Kh. Ya. ε-positional strategies in theory of differential pursuit games and invariance of constant multivalued mappings in heat-conductivity problems, *Journal of Mathematical Sciences*, 2022, vol. 265, issue 1, pp. 117–128. https://doi.org/10.1007/s10958-022-06049-7

Received 12.09.2022

Accepted 13.02.2023

Numanjon Alimdzhonovich Mamadaliev, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Faculty of Mathematics, National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, ul. Universitetskaya, 4, Tashkent, 100174, Uzbekistan;
Institute of Mathematics named after V. I. Romanovsky of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, ul. Universitetskaya, 9, Tashkent, 100174, Uzbekistan.
E-mail: m_numana59@mail.ru

Khamdam Yangiboyevich Mustapokulov, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Faculty of Mathematics, National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, ul. Universitetskaya, 4, Tashkent, 100174, Uzbekistan;
Tashkent State Technical University named after I. Karimov, ul. Universitetskaya, 4, Tashkent, 100174, Uzbekistan.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5764-0314
E-mail: m_hamdam@mail.ru

Gulzurakhon Mirzakomilovna Abdualimova, Andijan State University, ul. Universitskaya, 129, Andijan, 170100, Uzbekistan.
E-mail: abduolimova81@inbox.ru

Citation: N. A. Mamadaliev, Kh. Ya. Mustapokulov, G. M. Abdualimova. The method of resolving functions for solving a pursuit problem with integral constraints on player controls, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2023, vol. 33, issue 1, pp. 103–118.