МАТЕМАТИКА 2023. Т. 33. Вып. 1. С. 54–65.

УДК 517.929.7, 517.929.8, 517.984

© *Д. Б. Давлетов, О. Б. Давлетов, Р. Р. Давлетова, А. А. Ершов*

О СОБСТВЕННЫХ ЭЛЕМЕНТАХ ДВУМЕРНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТИПА СТЕКЛОВА ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАМЭ

В настоящей работе исследуется двумерная краевая задача типа Стеклова для оператора Ламэ в полуполосе, которая является предельной для сингулярно возмущенной краевой задачи в полуполосе с малым отверстием. Доказана теорема о существовании собственных элементов исследуемой краевой задачи. В частности, получены оценки для собственных значений, выраженные через постоянные Ламэ и параметр, определяющий ширину полуполосы, а также уточнена структура соответствующих собственных вектор-функций, определяющая их поведение при удалении от основания полуполосы. Более того, найдены явные выражения собственных значений предельной краевой задачи с точностью до решения системы алгебраических уравнений. Результаты, полученные в данной работе, позволят построить и строго обосновать асимптотическое разложение собственного значения сингулярно возмущенной краевой задачи в полуполосе с малым отверстием с точностью до степени малого параметра, характеризующего размер отверстия.

Ключевые слова: краевая задача, спектральное условие Стеклова, оператор Ламэ, собственные элементы.

DOI: 10.35634/vm230104

Изучение деформации и колебаний упругих пластин как двумерных объектов имеет давнюю историю [1–7]. Тем не менее, как утверждается в [8], некоторые вопросы, важные как в чисто теоретическом плане, так и для инженерной практики, до сих пор не рассмотрены в полной мере. В первую очередь, это относится к задачам о собственных колебаниях тонких тел, которые во многом заключаются в поиске их собственных элементов.

Для различных постановок задач упругости естественно записывать основные дифференциальные уравнения или полностью в напряжениях, или полностью в перемещениях. Таким образом можно уменьшить число уравнений за счет исключения неизвестных функций. Исключение деформаций и напряжений позволяет получить три дифференциальных уравнения лишь относительно перемещений, которые в совокупности представляют собой векторное уравнение Ламэ. В связи с этим в последнее время интенсивно исследуются собственные значения двумерных и трехмерных краевых задач для оператора Ламэ [9–14]. Эти задачи относятся к более широкому классу задач на исследование собственных значений краевых задач для эллиптических операторов, которые сохраняют актуальность и в настоящее время [15–19].

В настоящей работе исследуется двумерная краевая задача типа Стеклова для оператора Ламэ в полуполосе, которая является предельной для сингулярно возмущенной краевой задачи, рассмотренной в работе [20]. Целью данной работы является доказательство существования собственных элементов рассматриваемой краевой задачи, а также получение некоторых оценок, определяющих асимптотическое поведение собственных значений и соответствующих собственных вектор-функций при бесконечном удалении от основания полуполосы. Эти результаты вместе с результатами работы [20] позволят построить и строго обосновать асимптотическое разложение собственного значения сингулярно возмущенной краевой задачи из [20] с точностью до степени малого параметра, характеризующего размер отверстия в полуполосе. При дальнейшем построении и обосновании асимптотического разложения можно применить метод операторных уравнений, примененный в работе [21], и обобщенный на случай вектор-функций в работе [22], а также метод согласования асимптотических разложений решений краевых задач (см., например, [23–28]).

§ 1. Постановка задачи и формулировка основного результата

Пусть $\Omega = (-b, b)$, $\Pi = \Omega \times (a, +\infty)$, $-\infty < a < 0$, $0 < b < +\infty$, $\Omega_a = \Omega \times \{a\}$, начало координат лежит в Π. Через Δ^* обозначим оператор Ламэ:

$$\Delta^* := \Delta + \alpha\, \nabla \operatorname{div},$$

где $\alpha = (\lambda + \mu)/\mu$, λ, $\mu > 0$ — постоянные Ламэ (см., например, [29, формулы (5.9)]). Рассматривается следующая «предельная» краевая задача на собственные значения (см. работу [20]):

$$\begin{cases} \Delta^* \boldsymbol{\psi}_0 = \mathbf{0}, & \boldsymbol{x} \in \Pi, \\ \boldsymbol{\psi}_0 = \mathbf{0}, & \boldsymbol{x} \in \partial\Pi \setminus \overline{\Omega}_a, \\ \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_0}{\partial \mathbf{n}} = \lambda_0 \boldsymbol{\psi}_0, & \boldsymbol{x} \in \Omega_a, \end{cases} \tag{1.1}$$

где $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль.

Физическая интерпретация краевой задачи следующая. Поскольку задача двумерная, то область Ω можно рассматривать как слой в трехмерном пространстве (аналогично работе [30]). Вектор ψ_0 является вектором перемещений упругой среды относительно ненапряженного состояния с двумя компонентами — сдвигов вдоль осей x и y. Краевые условия на боковых краях слоя соответствуют жесткому закреплению, а на торце осуществлено сложное упругое соединение с возможностью перемещения вещества через границу области Ω.

Основной результат сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Собственные значения краевой задачи* (1.1) *существуют и имеют следующую общую структуру:*

$$0 < \lambda_{0,1} \leqslant \lambda_{0,2} \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{0,k} \leqslant \ldots, \tag{1.2}$$

где каждое собственное значение повторяется столько раз, какова его кратность, причем $\lambda_{0,k}$ *удовлетворяют уравнению*

$$\left(\frac{2\,(\alpha+2)}{\alpha\,\lambda_{0,k}}\right)^2 \cos^4(b\lambda_{0,k}) - \left(\frac{2\,(\alpha+2)}{\alpha\,\lambda_{0,k}}\right)^2 \cos^2(b\lambda_{0,k}) + 4b^2 = 0, \tag{1.3}$$

и верны оценки

$$0 < \lambda_{0,k} \leqslant \frac{\alpha+2}{2\,\alpha\,b}, \qquad k = 1, 2, \ldots. \tag{1.4}$$

Для соответствующих нормированных в $L_2(\Omega_a)$ *собственных вектор-функций* $\boldsymbol{\psi}_{0,k}(\boldsymbol{x})$ *имеют место следующие равенства:*

$$\boldsymbol{\psi}_{0,k}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\upsilon}_k(x_1) \mathrm{e}^{-\sqrt{\zeta_k}(x_2 - a)},$$

где $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$, ζ_k *и* $\boldsymbol{\upsilon}_k(x_1) = (\upsilon_{k,1}(x_1), \upsilon_{k,2}(x_1))^T$ (T *— знак транспонирования) — собственные значения и соответствующие нормированные в* $L_2(\Omega)$ *собственные вектор-функции краевой задачи*

$$\begin{cases} \left(\frac{d^2 \upsilon_{k,1}}{dx_1^2} + \zeta_k \upsilon_{k,1}\right) + \alpha \frac{d^2 \upsilon_{k,1}}{dx_1^2} - \alpha\sqrt{\zeta_k}\frac{d\upsilon_{k,2}}{dx_1} = 0, & x_1 \in \Omega, \\ \left(\frac{d^2 \upsilon_{k,2}}{dx_1^2} + \zeta_k \upsilon_{k,2}\right) - \alpha\sqrt{\zeta_k}\frac{d\upsilon_{k,1}}{dx_1} + \alpha\zeta_k \upsilon_{k,2} = 0, & x_1 \in \Omega, \\ \upsilon_{k,1}(\pm b) = \upsilon_{k,2}(\pm b) = 0. \end{cases} \tag{1.5}$$

Собственные значения краевых задач (1.1) *и* (1.5) *связаны равенством*

$$\lambda_{0,k} = \sqrt{\zeta_k}.$$

§ 2. Вспомогательные утверждения

Определим пространство $H^1(\Pi)$ как пополнение по норме

$$\|\boldsymbol{w}\|_{H^1(\Pi)} = \left(\int_\Pi |\nabla \boldsymbol{w}|^2 \, d\boldsymbol{x} + \int_{\Omega_a} |\boldsymbol{w}|^2 \, dx_1\right)^{1/2} \tag{2.1}$$

вектор-функций из $C^\infty(\overline{\Pi})$, обладающих конечным интегралом Дирихле

$$\int_\Pi |\nabla \boldsymbol{w}|^2 \, d\boldsymbol{x} < \infty,$$

где

$$\int_\Pi |\nabla \boldsymbol{w}|^2 d\boldsymbol{x} := \sum_{i=1}^2 \int_\Pi |\nabla w_i|^2 \, d\boldsymbol{x}.$$

Подмножество вектор-функций из $H^1(\Pi)$, обращающихся в нуль на $\partial\Pi \setminus \overline{\Omega}_a$, обозначим через $H^1(\Pi; \partial\Pi \setminus \overline{\Omega}_a)$.

Обозначим

$$\nabla \boldsymbol{U} \nabla \boldsymbol{V} := \sum_{i=1}^2 \nabla U_i \nabla V_i.$$

Краевую задачу (1.1) будем понимать в обобщенном смысле. То есть, пусть $\boldsymbol{f} \in L_2(\Omega_a)$. Тогда $\boldsymbol{\psi}_0 \in H^1(\Pi; \partial\Pi \setminus \overline{\Omega}_a)$ называется обобщенным решением краевой задачи (1.1), если для любого $\boldsymbol{v} \in H^1(\Pi; \partial\Pi \setminus \overline{\Omega}_a)$ выполняется следующее равенство:

$$\int_\Pi (\nabla \boldsymbol{\psi}_0 \nabla \boldsymbol{v} + \alpha \operatorname{div} \boldsymbol{\psi}_0 \operatorname{div} \boldsymbol{v}) \, d\boldsymbol{x} = \lambda_0 \int_{\Omega_a} \boldsymbol{\psi}_0 \boldsymbol{v} \, dx_1. \tag{2.2}$$

Докажем следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть*

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_1 := \int_\Pi (\nabla \boldsymbol{u} \nabla \boldsymbol{v} + \alpha \operatorname{div} \boldsymbol{u} \operatorname{div} \boldsymbol{v}) \, d\boldsymbol{x} + \int_{\Omega_a} \boldsymbol{u}\boldsymbol{v} \, dx_1. \tag{2.3}$$

Тогда (2.3) *можно принять за скалярное произведение в* $H^1(\Pi)$*, индуцирующее новую норму*

$$\|\boldsymbol{u}\|_1 = \left(\int_\Pi \left(|\nabla \boldsymbol{u}|^2 + \alpha \ |\operatorname{div} \boldsymbol{u}|^2\right) \, d\boldsymbol{x} + \int_{\Omega_a} |\boldsymbol{u}|^2 \, dx_1\right)^{1/2}$$

в $H^1(\Pi)$*, которая будет эквивалентной старой норме* (2.1).

Доказательство. Для установления справедливости леммы 1 (см., например, [31, гл. 4, § 2, п. 4]) достаточно показать существование констант $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$ таких, что неравенства

$$C_1^2 \|\boldsymbol{u}\|^2_{H^1(\Pi)} \leqslant \|\boldsymbol{u}\|_1^2, \qquad \|\boldsymbol{u}\|_1^2 \leqslant C_2^2 \|\boldsymbol{u}\|^2_{H^1(\Pi)} \tag{2.4}$$

имеют место для всех $\boldsymbol{u} \in H^1(\Pi)$. Предварительно приведем очевидное неравенство:

$$\left(\sum_{i=1}^2 a_i\right)^2 \leqslant 2 \sum_{i=1}^2 a_i^2. \tag{2.5}$$

С учетом (2.1), (2.5) последовательно получаем:

$$\|\boldsymbol{u}\|_1^2 = \int_\Pi \left(|\nabla \boldsymbol{u}|^2 + \alpha\,|\operatorname{div}\boldsymbol{u}|^2\right)\,d\boldsymbol{x} + \int_{\Omega_a} |\boldsymbol{u}|^2\,dx_1 =$$
$$= \int_\Pi |\nabla \boldsymbol{u}|^2\,d\boldsymbol{x} + \alpha\int_\Pi |\operatorname{div}\boldsymbol{u}|^2\,d\boldsymbol{x} + \int_{\Omega_a} |\boldsymbol{u}|^2\,dx_1 \leqslant \|\boldsymbol{u}\|^2_{H^1(\Pi)} + 2\alpha\int_\Pi \sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)^2 d\boldsymbol{x} \leqslant$$
$$\leqslant \|\boldsymbol{u}\|^2_{H^1(\Pi)} + 2\alpha\int_\Pi |\nabla \boldsymbol{u}|^2\,d\boldsymbol{x} \leqslant \|\boldsymbol{u}\|^2_{H^1(\Pi)} + 2\alpha\|\boldsymbol{u}\|^2_{H^1(\Pi)} = (1+2\alpha)\,\|\boldsymbol{u}\|^2_{H^1(\Pi)}.$$

Таким образом, выполняется второе из неравенств в (2.4) при $C_2^2 = 1 + 2\alpha > 0$.

Покажем теперь, что выполняется первое из неравенств в (2.4). В самом деле, с учетом (2.1) имеем:

$$\|\boldsymbol{u}\|_1^2 = \int_\Pi \left(|\nabla \boldsymbol{u}|^2 + \alpha\,|\operatorname{div}\boldsymbol{u}|^2\right)\,d\boldsymbol{x} + \int_{\Omega_a} |\boldsymbol{u}|^2\,dx_1 =$$
$$= \int_\Pi |\nabla \boldsymbol{u}|^2\,d\boldsymbol{x} + \alpha\int_\Pi |\operatorname{div}\boldsymbol{u}|^2\,d\boldsymbol{x} + \int_{\Omega_a} |\boldsymbol{u}|^2\,dx_1 \geqslant \int_\Pi |\nabla \boldsymbol{u}|^2\,d\boldsymbol{x} + \int_{\Omega_a} |\boldsymbol{u}|^2\,dx_1 = \|\boldsymbol{u}\|^2_{H^1(\Pi)}.$$

Таким образом, выполняется первое из неравенств в (2.4) при $C_1^2 = 1$. □

Лемма 2. *Краевая задача* (1.1) *равносильна следующему операторному уравнению:*

$$\boldsymbol{\psi}_0 = (\lambda_0 + 1)\,A\boldsymbol{\psi}_0, \quad \boldsymbol{\psi}_0 \in H^1(\Pi; \partial\Pi \setminus \overline{\Omega}_a),$$

где A — это самосопряженный, положительный и компактный оператор из $H^1(\Pi; \partial\Pi\setminus\overline{\Omega}_a)$ в $H^1(\Pi; \partial\Pi \setminus \overline{\Omega}_a)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. С учетом (2.3) равенство (2.2) перепишется в виде

$$(\boldsymbol{\psi}_0, \boldsymbol{v})_1 = (\lambda_0 + 1)\int_{\Omega_a} \boldsymbol{\psi}_0\boldsymbol{v}\,dx_1. \tag{2.6}$$

При любом фиксированном $\boldsymbol{\psi}_0 \in L_2(\Omega_a)$ интеграл $\int_{\Omega_a} \boldsymbol{\psi}_0\boldsymbol{v}\,dx_1$ в правой части (2.6) является линейным ограниченным функционалом в $H^1(\Pi; \partial\Pi\setminus\overline{\Omega}_a)$. Тогда в силу леммы 1 и теоремы Рисса (см., например, [31, гл. 2, § 3, п. 2, теорема 1]) существует единственный элемент $\boldsymbol{\Psi}_0 \in H^1(\Pi; \partial\Pi \setminus \overline{\Omega}_a)$, такой что

$$\|\boldsymbol{\Psi}_0\|_1 \leqslant C\|\boldsymbol{\psi}_0\|_{L_2(\Omega_a)} \tag{2.7}$$

и верно равенство

$$\int_{\Omega_a} \boldsymbol{\psi}_0\boldsymbol{v}\,dx_1 = (\boldsymbol{\Psi}_0, \boldsymbol{v})_1$$

для любого $\boldsymbol{v} \in H^1(\Pi; \partial\Pi \setminus \overline{\Omega}_a)$. Это означает, что на $L_2(\Omega_a)$ задан линейный оператор A, такой что $A\boldsymbol{\psi}_0 = \boldsymbol{\Psi}_0$, для которого выполняется равенство:

$$(\boldsymbol{\psi}_0, \boldsymbol{v})_{L_2(\Omega_a)} = (A\boldsymbol{\psi}_0, \boldsymbol{v})_1, \tag{2.8}$$

для любого $\boldsymbol{v} \in H^1(\Pi; \partial\Pi \setminus \overline{\Omega}_a)$. Из неравенства (2.7) следует, что оператор A из $L_2(\Omega_a)$ в $H^1(\Pi; \partial\Pi \setminus \overline{\Omega}_a)$ ограничен. С другой стороны, из (2.8) следует, что оператор A из

$H^1(\Pi;\partial\Pi\setminus\overline{\Omega}_a)$ в $H^1(\Pi;\partial\Pi\setminus\overline{\Omega}_a)$ положителен и является самосопряженным, так как для любого ненулевого $\boldsymbol{\psi}_0\in H^1(\Pi;\partial\Pi\setminus\overline{\Omega}_a)$ выполняются соотношения

$$(A\boldsymbol{\psi}_0,\boldsymbol{\psi}_0)_1=(\boldsymbol{\psi}_0,\boldsymbol{\psi}_0)_{L_2(\Omega_a)}=\|\boldsymbol{\psi}_0\|^2_{L_2(\Omega_a)}>0,$$
$$(A\boldsymbol{\psi}_0,\boldsymbol{v})_1=(\boldsymbol{\psi}_0,\boldsymbol{v})_{L_2(\Omega_a)}=\overline{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\psi}_0)_{L_2(\Omega_a)}}=\overline{(A\boldsymbol{v},\boldsymbol{\psi}_0)_1}=(\boldsymbol{\psi}_0,A\boldsymbol{v})_1\,.$$

Покажем, что оператор A из $H^1(\Pi;\partial\Pi\setminus\overline{\Omega}_a)$ в $H^1(\Pi;\partial\Pi\setminus\overline{\Omega}_a)$ является компактным.

Обозначим $\Pi(R):=\Omega\times(a,R)$, где $R>0$ — произвольное достаточно большое число. Так как (см., например, [31, гл. III, § 5, п. 6, теорема 5])

$$\|\boldsymbol{\psi}_0\|_{W_2^1(\Pi(R))}\leqslant C(R)\|\boldsymbol{\psi}_0\|_{H^1(\Pi(R))},\qquad \|\boldsymbol{\psi}_0\|_{H^1(\Pi(R))}\leqslant\|\boldsymbol{\psi}_0\|_{H^1(\Pi)},$$

то

$$\|\boldsymbol{\psi}_0\|_{W_2^1(\Pi(R))}\leqslant C(R)\|\boldsymbol{\psi}_0\|_{H^1(\Pi)},\tag{2.9}$$

где $C(R)$ — константа, зависящая от выбора R. Из (2.9) следует, что множество вектор-функций из $H^1(\Pi)$, обращающихся в нуль на $\partial\Pi\setminus\overline{\Omega}_a$, содержащихся в $W_2^1(\Pi(R))$ является ограниченным и поэтому является компактным в $L_2(\Omega_a)$ (см., например, [31, гл. III, § 5, п. 4, теорема 3]). Тогда из любого его бесконечного подмножества можно выбрать фундаментальную в $L_2(\Omega_a)$ последовательность вектор-функций $\boldsymbol{\psi}_0^s$, $s=1,2,\ldots$. Так как оператор A из $L_2(\Omega_a)$ в $H^1(\Pi;\partial\Pi\setminus\overline{\Omega}_a)$ ограничен и, следовательно, компактен, то последовательность $A\boldsymbol{\psi}_0^s$, $s=1,2,\ldots$, фундаментальна в $H^1(\Pi;\partial\Pi\setminus\overline{\Omega}_a)$.

В свою очередь, из (2.6) и (2.8) следует, что $\boldsymbol{\psi}_0=(\lambda_0+1)\,A\boldsymbol{\psi}_0$.

Таким образом, лемма 2 полностью доказана. □

§ 3. Доказательство теоремы 1

Докажем теперь теорему 1. Из леммы 2 вытекает (см., например, [31, гл. II, § 5]), что собственные значения краевой задачи (1.1) существуют и имеют общую структуру (1.2), где каждое собственное значение повторяется столько раз, какова его кратность.

Применим к краевой задаче (1.1) метод разделения переменных. Соответствующие собственным значениям $\lambda_{0,k}$, нормированные в $L_2(\Omega_a)$ собственные вектор-функции $\boldsymbol{\psi}_{0,k}(\boldsymbol{x})$ краевой задачи (1.1), представим в виде:

$$\boldsymbol{\psi}_{0,k}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{v}_k(x_1)\mathrm{e}^{-\sqrt{\zeta_k}(x_2-a)},\tag{3.1}$$

где $\boldsymbol{x}=(x_1;x_2)$ и $\boldsymbol{v}_k(x_1):=(\upsilon_{k,1}(x_1),\upsilon_{k,2}(x_1))^T$, T — знак транспонирования. Подставляя (3.1) в (1.1), получаем краевую задачу (1.5). При этом собственные значения краевых задач (1.1) и (1.5) будут связаны равенством

$$\lambda_{0,k}=\sqrt{\zeta_k}.$$

Общее решение системы дифференциальных уравнений в (1.5) запишем в виде следующей системы:

$$\begin{cases}\upsilon_{k,1}(x_1)=C_1\sin\left(\sqrt{\zeta_k}x_1\right)+C_2\cos\left(\sqrt{\zeta_k}x_1\right)+\\ \qquad\qquad+C_3x_1\sin\left(\sqrt{\zeta_k}x_1\right)+C_4x_1\cos\left(\sqrt{\zeta_k}x_1\right),\\ \upsilon_{k,2}(x_1)=C_1\cos\left(\sqrt{\zeta_k}x_1\right)-C_2\sin\left(\sqrt{\zeta_k}x_1\right)+\\ \qquad\qquad+C_3\left(x_1\cos\left(\sqrt{\zeta_k}x_1\right)+\dfrac{2+\alpha}{\alpha\sqrt{\zeta_k}}\sin\left(\sqrt{\zeta_k}x_1\right)\right)+\\ \qquad\qquad+C_4\left(-x_1\sin\left(\sqrt{\zeta_k}x_1\right)+\dfrac{2+\alpha}{\alpha\sqrt{\zeta_k}}\cos\left(\sqrt{\zeta_k}x_1\right)\right),\end{cases}\tag{3.2}$$

где коэффициенты C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные и вещественные. Подчиняя функции из (3.2) краевым условиям из (1.5), приходим к следующей однородной системе линейных уравнений относительно неизвестных C_1, C_2, C_3, C_4:

$$\begin{cases} -C_1\sin\left(\sqrt{\zeta_k}b\right)+C_2\cos\left(\sqrt{\zeta_k}b\right)+C_3 b\sin\left(\sqrt{\zeta_k}b\right)-C_4 b\cos\left(\sqrt{\zeta_k}b\right)=0,\\ C_1\sin\left(\sqrt{\zeta_k}b\right)+C_2\cos\left(\sqrt{\zeta_k}b\right)+C_3 b\sin\left(\sqrt{\zeta_k}b\right)+C_4 b\cos\left(\sqrt{\zeta_k}b\right)=0,\\ C_1\cos\left(\sqrt{\zeta_k}b\right)+C_2\sin\left(\sqrt{\zeta_k}b\right)+C_3\left(-b\cos\left(\sqrt{\zeta_k}b\right)-\dfrac{2+\alpha}{\alpha\sqrt{\zeta_k}}\sin\left(\sqrt{\zeta_k}b\right)\right)+\\ \qquad\qquad +C_4\left(-b\sin\left(\sqrt{\zeta_k}b\right)+\dfrac{2+\alpha}{\alpha\sqrt{\zeta_k}}\cos\left(\sqrt{\zeta_k}b\right)\right)=0,\\ C_1\cos\left(\sqrt{\zeta_k}b\right)-C_2\sin\left(\sqrt{\zeta_k}b\right)+C_3\left(b\cos\left(\sqrt{\zeta_k}b\right)+\dfrac{2+\alpha}{\alpha\sqrt{\zeta_k}}\sin\left(\sqrt{\zeta_k}b\right)\right)+\\ \qquad\qquad +C_4\left(-b\sin\left(\sqrt{\zeta_k}b\right)+\dfrac{2+\alpha}{\alpha\sqrt{\zeta_k}}\cos\left(\sqrt{\zeta_k}b\right)\right)=0. \end{cases} \tag{3.3}$$

Хорошо известно, что для того, чтобы однородная система линейных уравнений имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы определитель матрицы системы был равен нулю. Поэтому, приравняв определитель матрицы системы (3.3) к нулю, приходим к уравнению (1.3), где $\lambda_{0,k}=\sqrt{\zeta_k}$.

Обозначим

$$\beta := \frac{2\,(\alpha+2)}{\alpha\ \lambda_{0,k}} > 0, \tag{3.4}$$

где $\alpha=(\lambda+\mu)/\mu$, λ, $\mu>0$ — постоянные Ламэ. С учетом (3.4) равенство (1.3) перепишется в виде:

$$\beta^2\cos^4\left(b\lambda_{0,k}\right)-\beta^2\cos^2\left(b\lambda_{0,k}\right)+4b^2=0, \tag{3.5}$$

Применив в левой части (3.5) формулу понижения порядка, приходим к следующему уравнению:

$$\cos\left(4b\lambda_{0,k}\right)=\frac{\beta^2-32b^2}{\beta^2}.$$

Так как

$$\left|\cos\left(4b\lambda_{0,k}\right)\right|\leqslant 1,$$

то

$$-1\leqslant\frac{\beta^2-32b^2}{\beta^2}\leqslant 1. \tag{3.6}$$

Решая систему, состоящую из неравенств (3.4) и (3.6), получаем

$$\beta\geqslant 4b. \tag{3.7}$$

Подставляя (3.4) в левую часть неравенства (3.7) и учитывая положительность $\lambda_{0,k}$, приходим к оценкам (1.4). Теорема 1 полностью доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lamé G. Mémoire sur les surfaces isothermes dans les corps solides homogènes en équilibre de température // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. Serie 1. 1837. Vol. 2. P. 147–183. http://www.numdam.org/item/JMPA_1837_1_2__147_0/
2. Morgenstern D. Herleitung der Plattentheorie aus der dreidimensionalen Elastizitätstheorie // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1959. Vol. 4. Issue 1. P. 145–152. https://doi.org/10.1007/BF00281383

3. Шойхет Б. А. Об асимптотически точных уравнениях тонких плит сложной структуры // Прикладная математика и механика. 1973. Т. 37. Вып. 5. С. 914–924.
4. Ciarlet P. G., Kesavan S. Two-dimensional approximations of three-dimensional eigenvalue problems in plate theory // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1981. Vol. 26. Issue 2. P. 145–172. https://doi.org/10.1016/0045-7825(81)90091-8
5. Destuynder Ph. Comparaison entre les modèles tridimensionnels et bidimensionnels de plaques en élasticité // RAIRO. Analyse numérique. 1981. Vol. 15. No. 4. P. 331–369. http://www.numdam.org/item/M2AN_1981__15_4_331_0/
6. Зорин И. С., Назаров С. А. Краевой эффект при изгибе тонкой трехмерной пластины // Прикладная математика и механика. 1989. Т. 53. Вып. 4. С. 642–650.
7. Destuynder Ph., Gruais I. Error estimation for the linear three-dimensional elastic plate model // Asymptotic Methods for Elastic Structures: Proceedings of the International Conference, Lisbon, Portugal, October 4–8, 1993. Berlin–New York: De Gruyter, 1995. P. 75–88. https://doi.org/10.1515/9783110873726.75
8. Назаров С. А. Об асимптотике спектра задачи теории упругости для тонкой пластины // Сибирский математический журнал. 2000. Т. 41. № 4. С. 895–912. http://mi.mathnet.ru/rus/smj1577
9. Borcea J., Shapiro B. Root asymptotics of spectral polynomials for the Lamé operator // Communications in Mathematical Physics. 2007. Vol. 282. Issue 2. P. 323–337. https://doi.org/10.1007/s00220-008-0551-0
10. Haese-Hill W. A., Hallnäs M. A., Veselov A. P. On the spectra of real and complex Lamé operators // Symmetry Integrability and Geometry: Methods and Applications. 2017. Vol. 13. 049. https://doi.org/10.3842/SIGMA.2017.049
11. Volkmer H. Eigenvalue problems for Lamé's differential equation // Symmetry Integrability and Geometry: Methods and Applications. 2018. Vol. 14. 131. https://doi.org/10.3842/SIGMA.2018.131
12. Chen Zhijie, Fu Erjuan, Lin Chang-Shou. Spectrum of the Lamé operator and application, I: Deformation along $\operatorname{Re}\tau = \dfrac{1}{2}$ // Advances in Mathematics. 2021. Vol. 383. Article 107699. https://doi.org/10.1016/J.AIM.2021.107699
13. Chen Zhijie, Lin Chang-Shou. Spectrum of the Lamé Operator and Application, II: When an endpoint is a cusp // Communications in Mathematical Physics. 2020. Vol. 378. Issue 1. P. 335–368. https://doi.org/10.1007/s00220-020-03818-w
14. Nadeem Anjam Yasir, Ali Akhtar. On singularities of solution of the elasticity system in a bounded domain with angular corner points // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2022. Vol. 45. Issue 5. P. 3124–3143. https://doi.org/10.1002/mma.7980
15. Назаров С. А. Спектральные свойства тонкого слоя с двоякопериодическим семейством истончений // Теоретическая и математическая физика. 2013. Т. 174. № 3. С. 398–415. https://doi.org/10.4213/tmf8376
16. Алгазин С. Д. Вычислительные эксперименты в задаче на собственные значения для оператора Лапласа в многоугольной области // Математическое моделирование. 2013. Т. 25. № 4. С. 65–73. https://www.mathnet.ru/rus/mm3352
17. Gryshchuk S., Lanza de Cristoforis M. Simple eigenvalues for the Steklov problem in a domain with a small hole. A functional analytic approach // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2014. Vol. 37. Issue 12. P. 1755–1771. https://doi.org/10.1002/mma.2933
18. Allaoui M. Continuous spectrum of Steklov nonhomogeneous elliptic problem // Opuscula Mathematica. 2015. Vol. 35. No. 6. P. 853–866. https://doi.org/10.7494/OpMath.2015.35.6.853
19. Chiadò Piat V., Nazarov S. A. Mixed boundary value problems in singularly perturbed two-dimensional domains with the Steklov spectral condition // Journal of Mathematical Sciences. 2020. Vol. 251. Issue 5. P. 655–695. https://doi.org/10.1007/s10958-020-05122-3
20. Давлетов Д. Б., Давлетов О. Б., Давлетова Р. Р., Ершов А. А. Сходимость собственных элементов краевой задачи типа Стеклова для оператора Ламэ // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2021. Т. 27. № 1. С. 37–47. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2021-27-1-37-47

21. Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Асимптотические разложения собственных чисел краевых задач для оператора Лапласа в областях с малыми отверстиями // Известия Академии наук СССР. Серия математическая. 1984. Т. 48. № 2. С. 347–371. https://www.mathnet.ru/rus/im1449
22. Давлетов Д. Б. Асимптотика собственного значения двумерной краевой задачи Дирихле для оператора Ламе в области с малым отверстием // Математические заметки. 2013. Т. 93. Вып. 4. С. 537–548. https://doi.org/10.4213/mzm9023
23. Ильин А. М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.
24. Ильин А. М. Краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка в области с узкой щелью. 2. Область с малым отверстием // Математический сборник (новая серия). 1977. Т. 103 (145). № 2 (6). С. 265–284. http://mi.mathnet.ru/msb2810
25. Гадыльшин Р. Р. Расщепление кратного собственного значения задачи Дирихле для оператора Лапласа при сингулярном возмущении граничного условия // Математические заметки. 1992. Т. 52. Вып. 4. С. 42–55. http://mi.mathnet.ru/mz4754
26. Гадыльшин Р. Р. О собственных частотах тел с тонкими отростками. II. Асимптотики // Математические заметки. 1994. Т. 55. Вып. 1. С. 20–34. http://mi.mathnet.ru/mz2121
27. Камоцкий И. В., Назаров С. А. Спектральные задачи в сингулярно возмущенных областях и самосопряженные расширения дифференциальных операторов // Труды Санкт-Петербургского математического общества. Новосибирск: Научная книга, 1998. Т. 6. С. 151–212.
28. Давлетов Д. Б. Асимптотика собственных значений краевой задачи Дирихле оператора Ламэ в трехмерной области с малой полостью // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2008. Т. 48. № 10. С. 1847–1858. http://mi.mathnet.ru/zvmmf99
29. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика (в 10 т.). Том 7: Теория упругости. М.: Физматлит, 2003.
30. Назаров С. А. Асимптотический анализ задачи теории упругости в слое с позиций проблемы О. А. Олейник // Доклады РАН. 1997. Т. 352. № 2. С. 172–175. https://www.mathnet.ru/rus/dan3889
31. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976.

Поступила в редакцию 13.09.2022

Принята к публикации 21.02.2023

Давлетов Дмитрий Борисович, к. ф.-м. н., доцент, кафедра искусственного интеллекта и перспективных математических исследований, Уфимский университет науки и технологий, 450000, Россия, г. Уфа, ул. К. Маркса, 12;
доцент, кафедра математики и статистики, Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы, 450008, Россия, г. Уфа, ул. Октябрьской революции, 3А.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8128-6159
E-mail: davletovdb@mail.ru

Давлетов Олег Борисович, старший преподаватель, кафедра механики и конструирования машин, Институт нефтегазового инжиниринга и цифровых технологий, Уфимский государственный нефтяной технический университет, 450044, Россия, г. Уфа, ул. Матвея Пинского, 4.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0675-9670
E-mail: davolegus@mail.ru

Давлетова Рузалина Разгатовна, преподаватель, ПЦК «Математики и информатики», Уфимский филиал Финансового университета при Правительстве Российской Федерации, 450005, Россия, г. Уфа, ул. Революционная, 169/1.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7952-7918
E-mail: ruzal89@mail.ru

Ершов Александр Анатольевич, к. ф.-м. н., научный сотрудник, отдел динамических систем, Институт математики и механики УрО РАН, 620108, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16;
доцент, кафедра математического анализа, Институт естественных наук и математики, Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9685-9711
E-mail: ale10919@yandex.ru

Цитирование: Д. Б. Давлетов, О. Б. Давлетов, Р. Р. Давлетова, А. А. Ершов. О собственных элементах двумерной краевой задачи типа Стеклова для оператора Ламэ // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2023. Т. 33. Вып. 1. С. 54–65.

MATHEMATICS 2023. Vol. 33. Issue 1. Pp. 54–65.

D. B. Davletov, O. B. Davletov, R. R. Davletova, A. A. Ershov

On eigenelements of a two-dimensional Steklov-type boundary value problem for the Lamé operator

Keywords: boundary value problem, Steklov spectral condition, Lamé operator, eigenelements.

MSC2020: 35J25, 35P20

DOI: 10.35634/vm230104

In this paper, we study a two-dimensional Steklov-type boundary value problem for the Lamé operator in a half-strip, which is the limiting problem for a singularly perturbed boundary-value problem in a half-strip with a small hole. A theorem on the existence of eigenelements of the boundary value problem under study is proved. In particular, we obtain estimates for the eigenvalues expressed in terms of the Lamé constants and a parameter that determines the width of the half-strip, and refine the structure of the corresponding eigenfunctions, which determines their behavior as their argument move away from the base of the half-strip. Moreover, explicit expressions for the eigenvalues of the limiting boundary value problem are found up to the solution of a system of algebraic equations. The results obtained in this paper will make it possible to construct and rigorously justify an asymptotic expansion of the eigenvalue of a singularly perturbed boundary value problem in a half-strip with a small round hole in powers of a small parameter that determines the diameter of the hole.

REFERENCES

1. Lamé G. Mémoire sur les surfaces isothermes dans les corps solides homogènes en équilibre de température, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. Serie 1*, 1837, vol. 2, pp. 147–183 (in French). http://www.numdam.org/item/JMPA_1837_1_2__147_0/
2. Morgenstern D. Herleitung der Plattentheorie aus der dreidimensionalen Elastizitätstheorie, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1959, vol. 4, issue 1, pp. 145–152. https://doi.org/10.1007/BF00281383
3. Shoikhet B. A. On asymptotically exact equations of thin plates of complex structure, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1973, vol. 37, issue 5, pp. 867–877. https://doi.org/10.1016/0021-8928(73)90016-6
4. Ciarlet P. G., Kesavan S. Two-dimensional approximations of three-dimensional eigenvalue problems in plate theory, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1981, vol. 26, issue 2, pp. 145–172. https://doi.org/10.1016/0045-7825(81)90091-8
5. Destuynder Ph. Comparaison entre les modèles tridimensionnels et bidimensionnels de plaques en élasticité, *RAIRO. Analyse numérique*, 1981, vol. 15, no. 4, pp. 331–369 (in French). http://www.numdam.org/item/M2AN_1981__15_4_331_0/
6. Zorin I. S., Nazarov S. A. Edge effect in the bending of a thin three-dimensional plate, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1989, vol. 53, issue 4, pp. 500–507. https://doi.org/10.1016/0021-8928(89)90059-2
7. Destuynder Ph., Gruais I. Error estimation for the linear three-dimensional elastic plate model, *Asymptotic Methods for Elastic Structures: Proceedings of the International Conference, Lisbon, Portugal, October 4–8, 1993*, Berlin–New York: De Gruyter, 1995, pp. 75–88. https://doi.org/10.1515/9783110873726.75
8. Nazarov S. A. On the asymptotics of the spectrum of a thin plate problem of elasticity, *Siberian Mathematical Journal*, 2000, vol. 41, issue 4, pp. 744–759. https://doi.org/10.1007/BF02679699
9. Borcea J., Shapiro B. Root asymptotics of spectral polynomials for the Lamé operator, *Communications in Mathematical Physics*, 2007, vol. 282, issue 2, pp. 323–337. https://doi.org/10.1007/s00220-008-0551-0
10. Haese-Hill W. A., Hallnäs M. A., Veselov A. P. On the spectra of real and complex Lamé operators, *Symmetry Integrability and Geometry: Methods and Applications*, 2017, vol. 13, 049. https://doi.org/10.3842/SIGMA.2017.049

11. Volkmer H. Eigenvalue problems for Lamé's differential equation, *Symmetry Integrability and Geometry: Methods and Applications*, 2018, vol. 14, 131. https://doi.org/10.3842/SIGMA.2018.131
12. Chen Zhijie, Fu Erjuan, Lin Chang-Shou. Spectrum of the Lamé operator and application, I: Deformation along $\mathrm{Re}\,\tau = \dfrac{1}{2}$, *Advances in Mathematics*, 2021, vol. 383, article 107699. https://doi.org/10.1016/J.AIM.2021.107699
13. Chen Zhijie, Lin Chang-Shou. Spectrum of the Lamé Operator and Application, II: When an endpoint is a cusp, *Communications in Mathematical Physics*, 2020, vol. 378, issue 1, pp. 335–368. https://doi.org/10.1007/s00220-020-03818-w
14. Nadeem Anjam Yasir, Ali Akhtar. On singularities of solution of the elasticity system in a bounded domain with angular corner points, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2022, vol. 45, issue 5, pp. 3124–3143. https://doi.org/10.1002/mma.7980
15. Nazarov S. A. Spectral properties of a thin layer with a doubly periodic family of thinning regions, *Theoretical and Mathematical Physics*, 2013, vol. 174, issue 3, pp. 343–359. https://doi.org/10.1007/s11232-013-0031-3
16. Algazin S. D. Computational experiments in the problem on eigenvalues for the Laplace operator in the polygonal domain, *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2013, vol. 5, issue 6, pp. 520–526. https://doi.org/10.1134/S2070048213060021
17. Gryshchuk S., Lanza de Cristoforis M. Simple eigenvalues for the Steklov problem in a domain with a small hole. A functional analytic approach, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2014, vol. 37, issue 12, pp. 1755–1771. https://doi.org/10.1002/mma.2933
18. Allaoui M. Continuous spectrum of Steklov nonhomogeneous elliptic problem, *Opuscula Mathematica*, 2015, vol. 35, no. 6, pp. 853–866. https://doi.org/10.7494/OpMath.2015.35.6.853
19. Chiadò Piat V., Nazarov S. A. Mixed boundary value problems in singularly perturbed two-dimensional domains with the Steklov spectral condition, *Journal of Mathematical Sciences*, 2020, vol. 251, issue 5, pp. 655–695. https://doi.org/10.1007/s10958-020-05122-3
20. Davletov D. B., Davletov O. B., Davletova R. R., Ershov A. A. Convergence of eigenelements in a Steklov type boundary value problem for the Lamé operator, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 1, pp. 37–47 (in Russian). https://doi.org/10.21538/0134-4889-2021-27-1-37-47
21. Maz'ya V. G., Nazarov S. A., Plamenevskiĭ B. A. Asymptotic expansions of the eigenvalues of boundary value problems for the Laplace operator in domains with small holes, *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 1985, vol. 24, no. 2, pp. 321–345. https://doi.org/10.1070/IM1985v024n02ABEH001237
22. Davletov D. B. Asymptotics of eigenvalues of the two-dimensional Dirichlet boundary-value problem for the Lamé operator in a domain with a small hole, *Mathematical Notes*, 2013, vol. 93, issue 4, pp. 545–555. https://doi.org/10.1134/S000143461303022X
23. Il'in A. M. *Matching of asymptotic expansions of solutions of boundary value problems*, Providence, R. I.: American Mathematical Society, 1992.
Original Russian text published in Il'in A. M. *Soglasovanie asimptoticheskikh razlozhenii reshenii kraevykh zadach*, Moscow: Nauka, 1989.
24. Il'in A. M. A boundary value problem for the second order elliptic equation in a domain with a narrow slit. 2. Domain with a small cavity, *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1977, vol. 32, no. 2, pp. 227–244. https://doi.org/10.1070/SM1977v032n02ABEH002380
25. Gadyl'shin R. R. Ramification of a multiple eigenvalue of the Dirichlet problem for the Laplacian under singular perturbation of the boundary condition, *Mathematical Notes*, 1992, vol. 52, issue 4, pp. 1020–1029. https://doi.org/10.1007/BF01210435
26. Gadyl'shin R. R. On eigenfrequencies of bodies with thin branches. II. Asymptotics, *Mathematical Notes*, 1994, vol. 55, issue 1, pp. 14–23. https://doi.org/10.1007/BF02110759
27. Kamotskii I. V., Nazarov S. A. Spectral problems in singularly perturbed domains and selfadjoint extensions of differential operators, *American Mathematical Society Translations: Series 2*, Providence, R. I.: American Mathematical Society, 2000, vol. 199, pp. 151–212. https://mathscinet.ams.org/mathscinet-getitem?mr=1768332

28. Davletov D. B. Asymptotics of eigenvalues of the Dirichlet boundary value problem for the Lamé operator in a three-dimensional domain with a small cavity, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2008, vol. 48, issue 10, pp. 1811–1822. https://doi.org/10.1134/S0965542508100072
29. Landau L. D., Lifshitz E. M. *Course of Theoretical Physics. Vol. 7: Theory of Elasticity*, Oxford: Butterworth-Heinemann, 1986.
30. Nazarov S. A. Asymptotic analysis of the problem of elasticity theory in a layer from the point of view of the problem of O. A. Olejnik, *Doklady Mathematics*, 1997, vol. 55, no. 1, pp. 46–49. https://zbmath.org/?q=an:0982.74509
31. Mikhailov V. P. *Differentsial'nye uravneniya v chastnykh proizvodnykh* (Differential equations in partial derivatives), Moscow: Nauka, 1977.

Received 13.09.2022

Accepted 21.02.2023

Dmitrii Borisovich Davletov, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Artificial Intelligence and Promising Mathematical Research, Ufa University of Science and Technology, ul. K. Marksa, 12, Ufa, 450000, Russia;
Associate Professor, Department of Mathematics and Statistics, Akmulla Bashkir State Pedagogical University, ul. Oktyabr'skoi Revolyutsii, 3A, Ufa, 450000, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8128-6159
E-mail: davletovdb@mail.ru

Oleg Borisovich Davletov, Senior Lecturer, Department of Mechanics and Machine Design, Institute of Oil and Gas Engineering and Digital Technologies, Ufa State Petroleum Technological University, ul. Matveya Pinskogo, 4, Ufa, 450044, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0675-9670
E-mail: davolegus@mail.ru

Ruzalina Razgatovna Davletova, Lecturer, Course-cycle Commission "Mathematics and Informatics", Ufa Branch of the Financial University under the Government of the Russian Federation, ul. Revolyutsionnaya, 169/1, Ufa, 450005, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7952-7918
E-mail: ruzal89@mail.ru

Aleksandr Anatol'evich Ershov, Candidate of Physics and Mathematics, Researcher, Department of Dynamical Systems, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620108, Russia;
Associate Professor, Department of Mathematical Analysis, Institute of Natural Sciences and Mathematics, Ural Federal University, ul. Mira, 19, Yekaterinburg, 620002, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9685-9711
E-mail: ale10919@yandex.ru

Citation: D. B. Davletov, O. B. Davletov, R. R. Davletova, A. A. Ershov. On eigenelements of a two-dimensional Steklov-type boundary value problem for the Lamé operator, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2023, vol. 33, issue 1, pp. 54–65.