МАТЕМАТИКА 2023. Т. 33. Вып. 1. С. 3–16.

УДК 517.55, 517.57

© *Б. И. Абдуллаев, Х. К. Камолов*

# ТЕОРИЯ ПОТЕНЦИАЛА НА АНАЛИТИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Работа посвящена теории плюрипотенциала на аналитических поверхностях. Теория плюрипотенциала в комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$, а также на штейновом комплексном многообразии $X \subset \mathbb{C}^N$ (без особого множества) изучена достаточно подробно. В этой работе мы предлагаем новую технологию для изучения основных объектов теории потенциала на аналитическом множестве с непустым особым (критическим) множеством.

*Ключевые слова*: аналитическое множество, плюрисубгармоническая функция, плюриполярное множество, $\mathcal{P}$-мера, максимальная функция.

DOI: 10.35634/vm230101

Теория плюрипотенциала, построенная в классе плюрисубгармонических функций, была разработана в цикле работ Э. Бедфорда и Б. А. Тэйлора [2] и А. Садуллаева [16]. На протяжении нескольких лет это теория была развита многими специалистами и нашла многочисленные важные применения в различных областях современной науки (см. например, [2, 11, 14, 18, 20–22]). $\mathcal{P}$-мера, $\mathcal{P}$-емкость, экстремальные функции и дифференциальные операторы, соответствующие им, составляют основу теории плюрипотенциалов. Успешное применение теории плюрипотенциала в задачах современной науки привело к развитию исследований плюрисубгармонических функций на различных подмногообразиях и аналитических подмножества комплексных пространств. Например, потенциальные свойства плюрисубгармонических функций на кэлеровых многообразиях исследованы в работах [4, 8, 9, 19]. В работах [3, 7] изучены плюрисубгармонические продолжения функций с аналитических подмногообразий. Целью настоящей работы является исследование основы плюрипотенциала на аналитических поверхностях. Основной трудностью изучения плюрисубгармонических функций и построения теория потенциала на аналитической поверхности является наличие особых множеств $X \setminus X^0$ аналитической поверхности $X$. Такие трудности появляются например, в доказательствах принципа максимума и фундаментальной леммы Хартогса в классе плюрисубгармонических функций § 1. В нашей работе эти трудности преодолеваются применением свойств аналитического накрытия. Далее, в § 4, для плюрисубгармонических функций дано доказательство принципа сравнения, который является фундаментальным результатом в построении теории потенциала. Здесь очень важно доказательство ограниченности оператора $(dd^c u^*)^n$ вблизи особого множества $X \setminus X^0$. В доказательстве этого факта используется один фундаментальный результат А. Зериахи.

Плюрисубгармонические функции на аналитических множествах впервые исследованы, пожалуй, в работе А. Садуллаева (см. [15]), в связи с нахождением локального критерия алгебраичности ростка аналитического множества. Некоторые потенциальные свойства класса плюрисубгармонических функций на аналитических множествах изучены также в работе А. Зериахи (см. [22]). Здесь мы изучаем некоторые важные свойства плюрисубгармонических и экстремально плюрисубгармонических функций на аналитических поверхностях и определяем основные понятия теории плюрипотенциала на аналитических поверхностях.

Авторы выражают искреннее благодарность профессору А. Садуллаеву за многочисленные обсуждения результатов и полезные комментарии.

## § 1. Плюрисубгармонические функции на аналитических поверхностях

Рассмотрим неприводимое аналитическое множество $X \subset \mathbb{C}^N$, размерности $\dim X = n$, $n \leqslant N$, причем множество $X$ компактно вложено в комплексное пространство $\mathbb{C}^N$, т.е. $X \cap B(0,r) \subset\subset X$ для любого шара $B(0,r) \subset \mathbb{C}^N$. Такое аналитическое множество называется аналитической поверхностью.

Введем на $X$ понятие плюрисубгармонических функций. Обозначим через $X^0 \subset X$ — совокупность обыкновенных точек множества $X$. Тогда множество критических точек $X \backslash X^0$ является аналитическим множеством меньшей размерности, $\dim X \backslash X^0 < n$. $X \backslash X^0$ не разбивает $X$ и множество $X^0$ является комплексным $n$-мерным подмногообразием в $\mathbb{C}^N$ (см. [6, 10, 13]).

**Определение 1** (см. [15]). Функция $u(z)$, заданная в области $D \subset X$, называется *плюрисубгармонической* (psh) *в* $D$, если она локально ограничена сверху в этой области и плюрисубгармоническая на многообразии $D \cap X^0$, $u(z) \in \mathrm{psh}(D \cap X^0)$.

Класс плюрисубгармонических в $D$ функций обозначается через $\mathrm{psh}(D)$. Для удобства функцию $u(z) \equiv -\infty$ мы тоже включим в класс $\mathrm{psh}(D)$.

На практике в критических точках $z \in X \backslash X^0$ обычно рассматривается функция $u^*(z) = \varlimsup\limits_{\substack{w \to z \\ w \in X^0 \cap D}} u(w)$, $z \in D$, и в исследованиях плюрисубгармонических функций изучают определенную всюду в $D$ функцию $u^*(z)$. Функция $u^*(z)$ будет полунепрерывной сверху в $D$, множество $\{z \in D \colon u^*(z) < C\}$ — открытое для всех $C \in \mathbb{R}$, причем $u^*(z) = u(z)\ \forall\, z \in X^0 \cap D$.

*Приведем несколько важных свойств плюрисубгармонических функций на* $X$:

(1) линейная комбинация плюрисубгармонических функций в $D \subset X$ с положительными коэффициентами является плюрисубгармонической функцией, то есть если $u_j^*(z) \in \mathrm{psh}(D)$, $\alpha_j \geqslant 0$, $j = 1, 2, \ldots, s$, то

$$\alpha_1 u_1^*(z) + \ldots + \alpha_s u_s^*(z) \in \mathrm{psh}(D);$$

(2) равномерный предел или предел монотонно убывающей последовательности $\{u_j^*(z)\}$ плюрисубгармонческих функций является плюрисубгармонической, то есть если $u_j^*(z) \in \mathrm{psh}(D)$, $j = 1, 2, \ldots$, $u_j^*(z) \rightrightarrows u^*(z)$ или $u_j^*(z) \searrow u^*(z)$, то $u^*(z) \in \mathrm{psh}(D)$;

(3) пусть $\{u_\alpha^*(z)\}$, $\alpha \in \Lambda$, — произвольное локально равномерно ограниченное сверху семейство плюрисубгармонических функций и $u(z) = \sup\limits_\alpha \{u_\alpha^*(z)\}$, тогда регуляризация $u^*(z)$ является плюрисубгармонической функцией в $D$;

(4) если $\{u_j^*(z)\}$ — последовательность локально равномерно ограниченных сверху плюрисубгармонических функций и $u(z) = \varlimsup\limits_{j \to \infty} u_j^*(z)$, то $u^*(z)$ является плюрисубгармонической функцией. (Эти свойства доказываются аналогично классическому случаю.)

**Предложение 1** (Принцип максимума). *Для* $u^*(z) \in \mathrm{psh}(D)$, $D \subset X$, *имеет место принцип максимума, то есть если в некоторой внутренней точке* $z^0 \in D$ *значение* $u^*(z^0) = \sup\limits_D u^*(z)$, *то* $u^* \equiv \mathrm{const}$.

Доказательство. Предположим обратное, пусть во внутренней точке $z^0 \in D$ (без ограничения общности считаем $z^0 = 0$) имеется максимум, $u^*(0) \geqslant u^*(z)\ \forall\, z \in D$. Если $0 \in D$ — обыкновенная, то очевидно, что $u(z) \equiv \mathrm{const}$ в $D \backslash S$, где $S = X \backslash X^0$, ибо для плюрисубгармонических функций на многообразие верен принцип максимума. Следовательно, $u^*(z) \equiv \text{const}$ в $D$. Если $0$ — критическая точка, то существует комплексная плоскость $0 \in \Pi \subset \mathbb{C}^n$: $\dim \Pi = N - n$, $X \cap \Pi$ — дискретное. Существует шар $B(''0, r) \subset \Pi$: $r > 0$, $X \cap B(''0, r) = \{0\}$, $X \cap \partial B(''0, r) = \emptyset$. Положим $z = ('z, ''z)$, $'z = (z_1, \ldots, z_n)$, $''z = (z_{n+1}, \ldots, z_N)$. Пусть $\Pi = \{'z = (z_1, \ldots, z_n) = 0\}$. По замкнутости $X$ существует окрестность $'U \ni {'0}$: $X \cap \partial B('z, r) = \emptyset$, $'z \in {'U}$. Тогда $\pi\colon X \cap ['U \times ''U] \to {'U}$ является $k$-листным накрытием, $1 \leqslant k < \infty$.

Пусть $J \subset {'U}$ — множество критических точек этого накрытия. Это означает, что

$$\pi\colon \{X \cap ['U \times ''U]\} \backslash \pi^{-1}(J) \to {'U} \backslash J$$

является регулярным $k$-листным, $1 \leqslant k < \infty$, комплексным накрытием $\pi^{-1}('z) \cap \{X \cap ['U \times ''U]\} \backslash \pi^{-1}(J) = \{\alpha_1('z), \ldots, \alpha_k('z)\}$ $\forall\, 'z \in {'U} \backslash J$. Причем, для каждой точки $'z^0 \in {'U} \backslash J$ локально, в некоторой окрестности $W \ni {'z^0}$, прообраз $\pi^{-1}(W) \cap \{X \cap ['U \times ''U]\}$ распадается на $k$ штук непересекающихся комплексных многообразий $M_1, M_2, \ldots, M_k$. Функция $u^*(z) = u(z)$ является плюрисубгармонической на каждом куске многообразий $M_j$, $j = 1, 2, \ldots, k$.

Отсюда вытекает, что $w('z) = \sum\limits_{j=1}^{k} u^*(\alpha_j('z))$ является плюрисубгармонической в $'U \backslash J$, локально ограниченной в $'U$. Так как $J \subset {'U}$ является аналитическим множеством, то $w('z)$ плюрисубгармонически продолжается в $'U$. Напомним, что если функция $w('z) \in \operatorname{psh}(D \backslash P)$ и локально ограничена в $D$, $P$ — замкнутое плюриполярное множества, то $w('z)$ плюрисубгармонически продолжается в $D$ (см. [12], также [1, 17]).

Таким образом, $w('z) \in \operatorname{psh}('U)$ и по предположению она достигает своего максимума в точке $0 \in U$. Это противоречие. □

**Предложение 2** (лемма Хартогса). *Пусть $D \subset X$ — открытое множество и $\{u_j\}$ — последовательность локально равномерно ограниченных сверху на $D$ плюрисубгармонических функций. Если при каждом фиксированном $z \in D$ выполняется неравенство*

$$\varlimsup_{j \to \infty} u_j^*(z) \leqslant A, \tag{1.1}$$

*то для любого числа $\varepsilon > 0$ и компакта $K \subset\subset D$ существует номер $j_0 = j_0(\varepsilon, K) \in \mathbb{N}$ такой, что при $\forall\, j \geqslant j_0$ $\forall\, z \in K$ имеет место равномерное неравенство*

$$u_j^*(z) \leqslant A + \varepsilon. \tag{1.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как задача является локальной, мы докажем теорему в окрестности некоторой точки в $D$. Без нарушения общности, можем считать, что $A = 0$. Пусть дана точка $z^0 \in D$. Берем окрестность $U = U(z^0, r) \subset\subset \mathbb{C}^N$ (можно считать ее открытым поликругом). Если точка $z^0 \in X^0$ регулярная, то можно выбрать поликруг $U$ достаточно маленьким, что аналитическое подмножество $D \cap U$ взаимно однозначно проецируются в некоторое координатное подпространство $\mathbb{C}^n \subset \mathbb{C}^N$, то есть существует взаимно однозначное отображение $\pi\colon D \cap U \to U' \subset \mathbb{C}^n$ и функции $u_j^* \circ \pi^{-1}$ являются плюрисубгармоническими на $U' \subset \mathbb{C}^n$. Для последовательности $u_j^* \circ \pi^{-1}$ применима классическая лемма Хартогса (см. [11]), то есть в некоторой окрестности каждой регулярной точки выполняется утверждение леммы.

Если $z^0$ — иррегулярная точка, то, как выше, можно подобрать комплексную плоскость $\Pi \subset \mathbb{C}^N$: $\dim \Pi = N - n$, $z^0 \in \Pi$, и пересечение $X \cap \Pi$ будет дискретным. Отсюда следует, что существует шар $B(''z^0, r) \subset \Pi$: $r > 0$ такой, что $X \cap B(''z^0, r) = \{z^0\}$, $X \cap \partial B(''z^0, r) = \emptyset$. Мы сделаем обозначение $z = ('z, ''z)$, $'z = (z_1, \ldots, z_n)$, $''z = (z_{n+1}, \ldots, z_N)$ и пусть, без нарушения общности, $\Pi = \{'z = (z_1, \ldots, z_n) = 0\}$. Так как $X$ замкнуто, то существует окрестнось $'U \ni {'z^0}\colon X \cap \partial B('z, r) = \emptyset$, $'z \in {'U}$. Тогда отображение $\pi\colon X \cap [{'U} \times {''U}] \to {'U}$ является $k$-листным накрытием.

Пусть $J \subset {'U}$ — критические точки этого накрытия. Это означает, что

$$\pi\colon \{X \cap [{'U} \times {''U}]\} \backslash \pi^{-1}(J) \to {'U} \backslash J$$

является регулярным $k$-листным накрытием и

$$\pi^{-1}('z) \cap \{X \cap [{'U} \times {''U}]\} \backslash \pi^{-1}(J) = \{\alpha_1('z), \ldots, \alpha_k('z)\} \qquad \forall\, 'z \in {'U} \backslash J.$$

Кроме того, для каждого $'z^0 \in {'U} \backslash J$ в некоторой окрестности $W \ni {'z^0}$ прообразы $\pi^{-1}(W) \cap \{X \cap [{'U} \times {''U}]\}$ расщепляются на $k$ непересекающихся комплексных многообразий $M_1, M_2, \ldots, M_k$. Последовательность функций $u_j^*(z) = u_j(z)$ плюрисубгармонична на каждом из многообразий $M_s$, $s = 1, 2, \ldots, k$. Мы рассмотрим последовательность

$$v_j('z) = \max\{u_j^*(z)\colon z \in \pi^{-1}('z) \cap X \cap [{'U} \times {''U}]\} \tag{1.3}$$

плюрисубгармонических на $'U \backslash J$ функций, которые локально равномерно ограничены на $'U$. $J \subset {'U}$ — аналитическое подмножество и функции $v_j^*('z)$ плюрисубгармонически продолжаются в $'U$. Согласно (1.1) для последовательности $v_j^*('z)$ выполняется

$$\varlimsup_{j \to \infty} v_j^*('z) \leqslant 0 \quad \forall\, 'z \in {'U}.$$

Следовательно, по классической лемме Хартогса $\forall\, \varepsilon > 0$ и для любого компакта $E \subset\subset D$, $\pi(E) \subset\subset {'U}$ найдем номер $j_0 \in \mathbb{N}$ такой, что при $\forall\, j \geqslant j_0$ и $\forall\, 'z \in \pi(E)$ имеет место неравенство $v_j^*('z) \leqslant \varepsilon$.

Из соотношений (1.3) и (1.2) получим:

$$u_j^*(z) \leqslant \varepsilon \quad \forall\, z \in E \quad \forall\, j \geqslant j_0.$$

Отсюда следует, что для $z \in E$ при $j \geqslant j_0$ выполняется неравенство $u_j^*(z) \leqslant \varepsilon$. Таким образом, для каждой точки $z^0$ компакта $K$ существует окрестность $U(z^0, r(z^0)) \subset D$ и номер $j(z^0)$ такие, что при $j \geqslant j(z^0)$, $z \in U(z^0, r(z^0))$ выполняется $u_j^*(z) \leqslant \varepsilon$.

Известно, что открытое покрытие $K \subset \bigcup_{z^0 \in K} U(z^0, r(z^0))$ содержит конечное подпокрытие $U(z^l, r(z^l))$, $l = 1, 2, 3, \ldots, m$, компакта $K$. Следовательно, если положим $j_0 = \max\{j_0(z^1), j_0(z^2), \ldots, j_0(z^m)\}$, то $\forall\, j \geqslant j_0$ $\forall\, z \in K$ имеет место неравенство $u_j^*(z) \leqslant \varepsilon$. Лемма доказана. □

## § 2. Плюриполярные множества на аналитической поверхности

Пусть дана область $D \subset X$ и некоторое ее подмножество $E \subset D \subset X$.

**Определение 2.** Множество $E \subset D \subset X$ называется плюриполярным в $D$, если существует функция $u(z) \in \mathrm{psh}(D)$, $u^*(z) \not\equiv -\infty$, такая, что $u^*|_E = -\infty$.

Очевидно, что плюриполярное множество имеет метрическую размерность не выше чем $2n-2$. Следовательно, оно не разбивает область $D$ и имеет лебегову меру нуль. Плюриполярные множества имеют следующие важные свойства.

**Теорема 1.** *Счетное объединение плюриполярных множеств плюриполярное, то есть если $E_j \subset D$, $j = 1, 2, \ldots$, являются плюриполярными, то $E = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} E_j$ тоже является плюриполярным.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию $E_j$ — плюриполярные, то есть существуют $u_j(z) \in \in \mathrm{psh}(D)$, $u_j^* \not\equiv -\infty$, $u_j^*\big|_{E_j} = -\infty$ $(j = 1, 2, 3, \ldots)$. Пусть

$$F_j = \{z \in D\colon u_j(z) = -\infty\} \supset E_j.$$

Лебегова мера этих множеств равна нулю, то есть $m(F_j) = 0$. Следовательно, мера множества $F = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} F_j$ также равна нулю. Поэтому существует точка $z^0 \in D$, для которой выполняется $u_j^*(z^0) \neq -\infty$, $j = 1, 2, \ldots$. Берем компактное исчерпание области $D$: $D = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} D_j$, $D_j \subset\subset D_{j+1} \subset\subset D$, $z^0 \in D_1$, и положим $M_j = \sup\limits_{D_j} u_j^*(z)$. Рассмотрим последовательность функций

$$v_j(z) = \frac{1}{2^j} \cdot \frac{u_j^*(z) - M_j}{M_j - u_j^*(z^0)}.$$

Очевидно, $v_j \in \mathrm{psh}(D)$, $v_j\big|_{D_j} \leqslant 0$, $v_j(z^0) = -\frac{1}{2^j}$. Тогда частные суммы ряда

$$v(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \cdot \frac{u_j^*(z) - M_j}{M_j - u_j^*(z^0)},$$

начиная с некоторого номера $k_j$, монотонно убывают в $D_j$. Следовательно, $v(z) \in \mathrm{psh}(D)$. Кроме того, имеет место равенство $v(z^0) = -1$, то есть $v(z) \not\equiv -\infty$. С другой стороны, $v|_E = -\infty$, и следовательно, множество $E$ — плюриполярное. $\square$

## § 3. $\mathcal{P}$-мера на аналитической поверхности

Пусть $X \subset \mathbb{C}^N$ — аналитическая поверхность в $\mathbb{C}^N$, $\dim X = n$. Для содержательной теории обычно $\mathcal{P}$-меру определяют в регулярных областях.

**Определение 3.** Область $D \subset X$ называется регулярной, если существует функция $\rho(z) \in \in \mathrm{psh}(D)\colon \rho(z) < 0$, $\lim\limits_{z\to\partial D} \rho(z) = 0$.

Область $D \subset X$ называется сильно регулярной или усиленно псевдовыпуклой, если $\rho(z)$ является непрерывной плюрисубгармонической функцией в некоторой окрестности $\hat{D} \supset \bar{D}$, причем $D = \{\rho(z) < 0\}$.

**Определение 4.** Фиксируем множество $E \subset D$ и рассмотрим класс

$$\mathcal{H}(E, D) = \{u^* \in \mathrm{psh}(D)\colon\ u^*|_E \leqslant -1,\ u^*|_D \leqslant 0\},$$

тогда регуляризация $\omega^*(z, E, D) = \varlimsup\limits_{w\to z} \omega(w, E, D)$, где $\omega(z, E, D) = \sup\limits_{u^*\in\mathcal{H}(E,D)} u^*(z)$, называется $\mathcal{P}$-мерой множества $E$ относительно области $D$.

Согласно свойству 3 плюрисубгармонических функций, $\omega^*(z, E, D) \in \mathrm{psh}(D)$. По топологической лемме Шоке (см. [5, 11, 14]) существует счетное подсемейство $\mathcal{H}'(E, D) \subset \subset \mathcal{H}(E, D)$ такое, что имеет место равенство $\left(\sup\limits_{u^*\in\mathcal{H}'(E,D)} u^*(z)\right)^* \equiv \omega^*(z, E, D)$. Отсюда следует, что $\mathcal{P}$-меру можно рассматривать как предел монотонно возрастающей последовательности $\{u_j^*(z)\} \subset \mathcal{H}(E, D)$: $\left(\lim\limits_{j\to\infty} u_j^*(z)\right)^* \equiv \omega^*(z, E, D)$.

$\mathcal{P}$-мера обладает следующими свойствами, идентичными $\mathcal{P}$-мерам в комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$.

1. *Монотонность.* Если $E_1 \subset E_2$, то $\omega^*(z, E_1, D) \geqslant \omega^*(z, E_2, D)$; если $E \subset D_1 \subset D_2$, то $\omega^*(z, E, D_1) \geqslant \omega^*(z, E, D_2)$. (Доказательство непосредственно вытекает из соотношений $\mathcal{H}(E_1, D) \supset \mathcal{H}(E_2, D)$ и $\mathcal{H}(E, D_1) \supset \mathcal{H}(E, D_2)$.)

2. $\omega^*(z, U, D) \in \mathcal{H}(U, D)$ для открытых множеств $U \subset D$ и поэтому $\omega^*(z, U, D) \equiv \equiv \omega(z, U, D)$ (вытекает из свойства 1).

3. Если $U \subset D$ — открытое множество, $U = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} K_j$, где $K_j \subset \overset{\circ}{K}_{j+1}$, то
$$\omega^*(z, K_j, D) \downarrow \omega(z, U, D).$$
Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $U \subset D$ — открытое подмножество, тогда из свойства 2 имеем $\omega^*(z, U, D) \equiv \omega(z, U, D)$. Плюрисубгармонические функции $\omega^*(z, K_j, D)$ на аналитической поверхности $X$, убывая, стремятся к некоторой плюрисубгармонической функции $u(z)$. С одной стороны, из $\omega^*(z, K_j, D) \geqslant \omega(z, U, D)$ выполняется $u(z) \geqslant \omega^*(z, U, D)$, а с другой стороны, $\forall\, z \in \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \overset{\circ}{K}_j = U$ $u(z) = -1$. Поэтому $u(z) \in \mathcal{H}(U, D)$ и $u(z) \leqslant \omega(z, U, D) \leqslant \omega^*(z, U, D)$. Следовательно, получим $u(z) = \omega^*(z, U, D)$, и это показывает, что последовательность $\omega^*(z, K_j, D)$, убывая, стремится к $\omega(z, U, D)$. □

4. Если $E \subset D$ произвольное множество, то существует убывающая последовательность открытых множеств
$$U_j \supset E, \quad U_j \supset U_{j+1}, \quad j = 1, 2, \ldots,$$
такая, что $\omega^*(z, E, D) = \left(\lim\limits_{j\to\infty} \omega(z, U_j, D)\right)^*$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим монотонно возрастающую последовательность $\{u_j^*(z)\} \subset \mathcal{H}(E, D)$: $[\lim\limits_{j\to\infty} u_j^*(z)]^* \equiv \omega^*(z, E, D)$. Тогда, если
$$U_j = \left\{ z \in X : u_j^* < -1 + \frac{1}{j} \right\},$$
то $U_j$ — открыты и образуют последовательность вложенных множеств $U_j \supset E$, $j = 1, 2, \ldots$. Имеем $u_j^* - \dfrac{1}{j} \in \mathcal{H}(U_j, D)$, следовательно, $u_j^* \leqslant \omega(z, U_j, D) + \dfrac{1}{j}$. Отсюда, имеет место $\omega^*(z, E, D) = \left(\lim\limits_{j\to\infty} u_j^*(z)\right)^* \leqslant \left(\lim\limits_{j\to\infty} \omega(z, U_j, D)\right)^*$. С другой стороны, тривиально выполняется неравенство $\omega^*(z, E, D) \geqslant \omega(z, U_j, D)$, $j = 1, 2, \ldots$, следовательно, $\omega^*(z, E, D) = [\lim\limits_{j\to\infty} \omega(z, U_j, D)]^*$. □

5. $\mathcal{P}$-мера $\omega^*(z, E, D)$ либо нигде не равна нулю, либо тождественно равна нулю. $\omega^*(z, E, D) \equiv 0$ тогда и только тогда, когда $E$ — плюриполярное в $D$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\mathcal{P}$-мера в некоторой точке $z^0 \in D$ обращается в нуль: $\omega^*(z^0, E, D) = 0$, то, согласно принципу максимума, для плюрисубгармонических функций имеет место тождественное равенство $\omega^*(z, E, D) \equiv 0$.

Пусть теперь $E$ — плюриполярное подмножество в $D$. Тогда из-за регулярности области $D$ существует функция $v(z) \in \mathrm{psh}(D)$: $v(z) \not\equiv -\infty$, $v|_D < 0$ и $v|_E \equiv -\infty$. Для каждого $j \in \mathbb{N}$ имеем $\frac{v(z)}{j} \in \mathcal{H}(E, D)$ и $\omega(z, E, D) \geqslant \frac{v(z)}{j}$. Отсюда, для $v(z) \neq \infty$ имеет место $\omega(z, E, D) = 0$. Так как лебегова мера множества $\{v = -\infty\}$ равна нулю, то на $D$ имеет место $\omega^*(z, E, D) \equiv 0$.

Обратно, предположим, что $\omega^*(z, E, D) \equiv 0$. Тогда существует точка $z^0 \in D$, для которой выполняется равенство $\omega(z^0, E, D) = 0$. По определению $\omega$, для каждого $j \in \mathbb{N}$ существует функция $u_j^*(z) \in \mathcal{H}(E, D)$ такая, что $u_j^*(z^0) \geqslant -\frac{1}{2^j}$. Рассмотрим теперь функцию $u^*(z) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} u_j^*(z)$. Тогда $u^*(z)$ является плюрисубгармонической функцией, ибо $u_j(z) < 0$ и $u^*(z^0) \geqslant -1$, так как $u_j^*(z^0) \geqslant -\dfrac{1}{2}$. Значит, $u^* \not\equiv -\infty$. Отсюда следует плюриполярность $E$, ибо $u^*|_E = -\infty$. □

6. *Теорема о двух константах.* Если функция $u^*(z)$ плюрисубгармонична в $D \subset X$ и $u^*|_D \leqslant M$, $u^*|_E \leqslant m$, $E \subset D$, то для всех $z \in D$ имеет место неравенство

$$u^*(z) \leqslant M(1 + \omega^*(z, E, D)) - m\omega^*(z, E, D).$$

Доказательство. Если мы возьмем функцию $\frac{u^*(z)-M}{M-m}$, то $\frac{u^*(z)-M}{M-m} \in \mathcal{H}(E, D)$. Из сравнения функции $\omega^*(z, E, D)$ с плюрисубгармонической функцией $\frac{u^*(z)-M}{M-m}$ вытекает, что $\frac{u^*(z)-M}{M-m} \leqslant \omega^*(z, E, D)$. Отсюда

$$u^*(z) \leqslant M(1 + \omega^*(z, E, D)) - m\omega^*(z, E, D). \qquad \square$$

## § 4. Максимальные функции на аналитических поверхностях

**Определение 5.** Пусть на аналитической поверхности $X$ дана область $D \subset X$. Функция $u^*(z) \in \mathrm{psh}(D)$ называется максимальной, если для нее выполняется принцип максимума на любой компактной области $\forall\, G \subset\subset D$, то есть если $v^*(z) \in \mathrm{psh}(D)$ и $\forall\, \xi \in \partial G$, то выполнение неравенства $\underline{\lim}_{z\to\xi}(u^*(z) - v^*(z)) \geqslant 0$ влечет выполнение неравенства $u^*(z) \geqslant v^*(z)$ для $\forall\, z \in G$.

**Теорема 2.** *Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *функция $u^*(z)$ является максимальной в области $D$;*

(2) *для любой функции $v^*(z) \in \mathrm{psh}(D)$ имеет место неравенство $u^*(z) \geqslant v^*(z)$ на $D$, если выполняется $\underline{\lim}_{z\to\partial D}(u^*(z) - v^*(z)) \geqslant 0$ (последнее означает, что для произвольного $\varepsilon > 0$ существует компакт $K \subset\subset D$ такой, что для $\forall\, z \in D \backslash K$ имеет место неравенство $u^*(z) - v^*(z) \geqslant -\varepsilon$);*

(3) *для каждой функции $v^*(z) \in \mathrm{psh}(D)$ и для любой компактной подобласти $G \subset\subset D$ имеет место неравенство $u^*(z) \geqslant v^*(z)$ при $\forall\, z \in G$, если только выполняется неравенство $u^*(z)|_{\partial G} \geqslant v^*(z)|_{\partial G}$;*

(4) *для каждой функции $v^*(z) \in \mathrm{psh}(D)$ и для любой компактной подобласти $G \subset\subset D$ из неравенства $\underline{\lim}_{z\to\xi}(u^*(z) - v^*(z)) \geqslant 0$, $z \in G$, $\xi \in \partial G$, следует $u^*(z) \geqslant v^*(z)$ при $\forall\, z \in G$;*

(5) *для любой компактной подобласти $G \subset\subset D$, для любой функции $v^*(z) \in \mathrm{psh}(G)$ выполнение неравенства $u^*(\xi) \geqslant \varliminf_{z\to\xi} v^*(z) \geqslant 0$, $z \in G$, $\xi \in \partial G$, влечет неравенство $u^*(z) \geqslant v^*(z)$ в $G$.*

Доказательство.
(1) $\Rightarrow$ (2). Предположим, что $\varliminf_{z\to\partial D}(u^*(z) - v^*(z)) \geqslant 0$ и существует точка $z^0 \in D$, для которой имеет место неравенство $u^*(z^0) - v^*(z^0) = \eta < 0$. Тогда множество $E = \{z \in D\colon u^*(z) < v^*(z) + \frac{\eta}{2}\}$ не пусто и компактно принадлежит $D$ и существует подобласть $G$ такая, что $E \subset\subset G \subset\subset D$. Очевидно, что $\varliminf_{z\to\xi}(u^*(z) - v^*(z) - \frac{\eta}{2}) \geqslant 0$ для $\forall\, \xi \in \partial G$. Поэтому в области $G$ имеет место неравенство $u^*(z) \geqslant v^*(z)+\frac{\eta}{2}$, в частности, $\eta = u^*(z^0)-v^*(z^0) \geqslant \frac{\eta}{2}$, и это противоречит тому что $\eta < 0$. Таким образом функция $u^*(z)$ является максимальной в $D$, то есть верно утверждение (2).
(2) $\Rightarrow$ (3). Получим из того, что если выполняется $u^*(z)|_{\partial G} \geqslant v^*(z)|_{\partial G}$, то функция

$$w(z) = \begin{cases} \max\{u^*(z), v^*(z)\}, & \text{при } z \in G,\\ u^*(z), & \text{при } z \in D \backslash G, \end{cases}$$

является плюрисубгармонической на $D$ и удовлетворяет неравенству $\varliminf_{z\to\partial D}(u^*(z) - w(z)) \geqslant \geqslant 0$.
(3) $\Rightarrow$ (4). Рассмотрим следующую функцию

$$w(z) = \begin{cases} \max\{u^*(z), v^*(z)\}, & \text{при } z \in G,\\ u^*(z), & \text{при } z \in D \backslash G, \end{cases}$$

которая является плюрисубгармонической на $D$ и удовлетворяет неравенству $u^*(z)|_{\partial G} \geqslant \geqslant w(z)|_{\partial G}$. Отсюда следует $\varliminf_{z\to\xi}(u^*(z) - w(z)) \geqslant 0$, $z \in G$, $\xi \in \partial G$. Это означает, что для $\forall\, z \in G$ имеет место неравенство $u^*(z) \geqslant w(z)$, следовательно, $u^*(z) \geqslant v^*(z)$. Остальные импликации (4) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (1) доказываются аналогично, с помощью построенной выше функции $w(z)$, где выбирается область $G_1$: $G \subset\subset G_1 \subset\subset D$. □

Как мы утверждали выше, регулярная часть $X^0$ аналитической поверхности $X$ являются комплексным аналитическим многообразием и для локально ограниченной в области $D \subset X$ плюрисубгармонической функции $u^* \in \mathrm{psh}(D) \cap L^\infty_{loc}$ в $D \cap X^0$ определен оператор $(dd^c u^*)^n$ — комплексный оператор Монжа–Ампера, свойства которого хорошо изучены (см. [2, 14, 16]). В $D \cap X^0$ оператор $(dd^c u^*)^n$ определяется как положительная борелевская мера. Положим $\int_{D\cap X} \alpha(z)(dd^c u^*)^n = \int_{D\cap X^0} \alpha(z)(dd^c u^*)^n$, где $\alpha \in F^{0,0}$ — пространству основных функций. Другими словами, на точки множества $X \backslash X^0$ мы продолжали $(dd^c u^*)^n$ нулем. Имеет место следующий очень важный результат, доказанный А. Зериахи (см. [22]).

**Лемма 1.** *Пусть $u^*(z) \in \mathrm{psh}(X) \cap L^\infty_{loc}(X)$. Тогда положительный поток $(dd^c u^*)^n$ на $X^0$ имеет локально конечную массу в окрестности любой точки $X \backslash X^0$. То есть для любого компакта $K \subset\subset X$ выполняется*

$$\int_{K\cap X^0} (dd^c u^*)^n < +\infty.$$

Из этой леммы следует, что для локально ограниченной, плюрисубгармонической в области $D \subset X$ функции $u^*(z) \in \mathrm{psh}(D) \cap L^\infty_{loc}(D)$ оператор $(dd^c u^*)^n$ дает нам локально конечную массу

$$\int_{K\cap X}(dd^c u^*)^n < +\infty \qquad \forall\, K\subset X.$$

Следующая теорема имеет ключевое значение в построении теории плюрипотенциала на аналитических поверхностях в пространстве $\mathbb{C}^n$, которая доказана ( [2], см. также [14, 16]).

**Теорема 3** (Принцип сравнения). *Пусть* $u^*, v^* \in \mathrm{psh}(D)\cap L^\infty_{loc}(D)$ *и множество* $F = \{z\in D\colon u^*(z) < v^*(z)\}$ *компактно лежит на* $D$*, то есть* $\{u^* < v^*\}\subset\subset D$*. Тогда имеет место неравенство*

$$\int_{\{u^*<v^*\}}(dd^c v^*)^n \leqslant \int_{\{u^*<v^*\}}(dd^c u^*)^n.$$

Доказательство. Так как множество сингулярных точек $S = X\backslash X^0$ является аналитическим множеством (меньшей размерности, $\dim S < n$), то существует голоморфная в $\mathbb{C}^N$ вектор-функция $\psi = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{2N+1})$ такая, что $S = \{\psi = 0\}$ (см. [10]). Так как множество $F = \{z\in D\colon u^*(z) < v^*(z)\}\subset\subset D$, то без нарушения общности мы можем считать, что норма $\|\psi\| < 1$ в некоторой окрестности замыкания $\bar F$. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и положим $v^*_\varepsilon(z) = v^*(z) + \max\{\varepsilon\ln\|\psi(z)\|, c\}$, где $c = \inf\limits_{z\in F\cap S}[u(z) - v(z)]$. Тогда для достаточно маленьких $\varepsilon > 0$ множество $F_\varepsilon = \{z\in D\colon u^*(z) < v^*_\varepsilon(z)\}\subset\subset D$, причем $F_\varepsilon\subset D\cap X^0$.

По классическому принципу сравнения

$$\int_{\{u^*<v^*_\varepsilon\}}(dd^c v^*_\varepsilon)^n \leqslant \int_{\{u^*<v^*_\varepsilon\}}(dd^c u^*)^n.$$

Отсюда,

$$\int_{\{u^*<v^*_\varepsilon\}}(dd^c v^*)^n \leqslant \int_{\{u^*<v^*_\varepsilon\}}(dd^c[v^* + \max\{\varepsilon\ln\|\psi\|, c\}])^n =$$
$$= \int_{\{u^*<v^*_\varepsilon\}}(dd^c v^*_\varepsilon)^n \leqslant \int_{\{u^*<v^*_\varepsilon\}}(dd^c u^*)^n \leqslant \int_{\{u^*<v^*\}}(dd^c u^*)^n,$$

ибо $\{z\in D\colon u^*(z) < v^*_\varepsilon(z)\}\subset\{z\in D\colon u^*(z) < v^*(z)\}$. Следовательно, при $\varepsilon\to 0$ из непрерывности слева борелевских мер мы получаем окончательную оценку

$$\int_{\{u^*<v^*\}\cap X^0}(dd^c v^*)^n = \int_{\{u^*<v^*\}}(dd^c v^*)^n \leqslant \int_{\{u^*<v^*\}}(dd^c u^*)^n. \qquad \square$$

Теорему 3 можно также сформулировать в следующих формах.

**Следствие 1.** *Пусть* $u^*, v^* \in \mathrm{psh}(D)\cap L^\infty_{loc}(D)$ *и* $\varliminf\limits_{z\to\partial D}[u^*(z) - v^*(z)] \geqslant 0$*. Тогда имеет место неравенство*

$$\int_{\{u^*<v^*\}}(dd^c v^*)^n \leqslant \int_{\{u^*<v^*\}}(dd^c u^*)^n.$$

**Следствие 2.** *Пусть* $D\subset X$ *— ограниченное открытое множество и для функций* $u^*, v^* \in \mathrm{psh}(D)\cap L^\infty_{loc}(D)$ *выполняются следующие условия:*

(1) $\lim\limits_{z\to\partial D} u^*(z) = \lim\limits_{z\to\partial D} v^*(z)$*;*

(2) $u^* \leqslant v^*$ *на* $D$.

*Тогда верно неравенство*

$$\int_D (dd^c v^*)^n \leqslant \int_D (dd^c u^*)^n.$$

Из теоремы 3 легко получить следующий принцип доминирования, который другим способом также был получен А. Зериахи (см. [22]).

**Следствие 3.** *Пусть* $D \subset\subset X$ *и* $u^*, v^* \in \mathrm{psh}(D) \cap L^\infty_{loc}(D)$: $(dd^c u^*)^n \leqslant (dd^c v^*)^n$. *Тогда, если* $\varliminf\limits_{z \to \partial D} [u^*(z) - v^*(z)] \geqslant 0$, *то* $u^* \geqslant v^*$ *всюду в* $D$.

**Теорема 4.** *Функция* $u^*(z) \in \mathrm{psh}(D) \cap L^\infty_{loc}(D)$ *является максимальной тогда и только тогда, когда в* $D$ *выполняется равенство*

$$(dd^c u^*)^n = 0.$$

В связи важности этой теоремы, мы кратко приведем ее доказательство.

Доказательство. *Необходимость.* Достаточно показать, что для максимальной в области $D \subset X$ функции $u^*$ выполняется равенство $(dd^c u^*)^n = 0$ вне особого множества $X$, т. е. на многообразии $X^0$. Фиксируем точку $z^0 \in X^0$ и шар

$$B(z^0, \delta)\colon G = B(z^0, \delta) \cap X \subset X^0, \quad G \subset\subset D.$$

Методом Перрона находим максимальную в области $G$ функцию $\omega(z)$: $\omega|_{\partial G} = u^*|_{\partial G}$, $(dd^c \omega)^n = 0$. Тогда $\omega(z) \geqslant u^*(z)$ в $G$. Положим

$$w(z) = \begin{cases} \omega(z), & \text{при } z \in G, \\ u^*(z), & \text{при } z \in D \setminus G. \end{cases}$$

Она плюрисубгармонична в $D$, $w(z) \geqslant u^*(z)$. Так как $u^*$ — максимальная и $w(z) \equiv u^*(z)$ в $D \setminus G$, то $u^*(z) \geqslant w(z)$, $z \in D$. Отсюда $w(z) \equiv u^*(z)$ и $(dd^c u^*)^n = 0$ в $B(z^0, \delta) \cap X$. Так как $z^0 \in X^0$ произвольная, то $(dd^c u^*)^n = 0$ в $X^0$ и, значит, в $X$.
*Достаточность.* Если $(dd^c u^*)^n = 0$, то из принципа сравнения (теорема 3) легко получить максимальность $u^*$ в области $D$. □

**Следствие 4.** *$\mathcal{P}$-мера неплюриполярного компакта $K \subset X$ является максимальной вне этого компакта, то есть выполняется*

$$(dd^c \omega^*(z, K, D))^n = 0 \quad \forall\, z \in X^0 \setminus K.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абдуллаев Б. И., Имомкулов С. А., Шарипов Р. А. Структура особых множеств некоторых классов субгармонических функций // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2021. Т. 31. Вып. 4. С. 519–535. https://doi.org/10.35634/vm210401
2. Bedford E., Taylor B. A. A new capacity for plurisubharmonic functions // Acta Mathematica. 1982. Vol. 149. P. 1–40. https://doi.org/10.1007/BF02392348
3. Berndtsson B., Păun M. Quantitative extensions of pluricanonical forms and closed positive currents // Nagoya Mathematical Journal. 2012. Vol. 205. P. 25–65. https://doi.org/10.1215/00277630-1543778

4. Boucksom S., Favre C., Jonsson M. Solution to a non-Archimedean Monge–Ampère equation // Journal of the American Mathematical Society. 2015. Vol. 28. No. 3. P. 617–667. https://doi.org/10.1090/S0894-0347-2014-00806-7
5. Брело М. Основы классической теории потенциала. М.: Мир, 1964.
6. Чирка Е. М. Комплексные аналитические множества. М.: Наука, 1985. https://zbmath.org/?q=an:03939697
7. Coman D., Guedj V., Zeriahi A. Extension of plurisubharmonic functions with growth control // Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal). 2013. Vol. 2013. Issue 676. P. 33–49. https://doi.org/10.1515/CRELLE.2011.185
8. Darvas T., Di Nezza E., Lu C. H. Log-concavity of volume and complex Monge–Ampère equations with prescribed singularity // Mathematische Annalen. 2021. Vol. 379. Issues 1–2. P. 95–132. https://doi.org/10.1007/s00208-019-01936-y
9. Darvas T., Di Nezza E., Lu C. H. Monotonicity of nonpluripolar products and complex Monge–Ampère equations with prescribed singularity // Analysis and PDE. 2018. Vol. 11. No. 8. P. 2049–2087. https://doi.org/10.2140/apde.2018.11.2049
10. Hervé M. Several complex variables. Local theory. Oxford: Oxford University Press, 1963.
11. Klimek M. Pluripotential theory. Oxford: Clarendon Press, 1991. https://zbmath.org/0742.31001
12. Lelong P. Ensembles singuliers impropres des fonctions plurisousharmoniques // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. Neuvième Série. 1957. Vol. 36. P. 263–303 (in French). https://zbmath.org/?q=an:0122.31902
13. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. Часть 2. Функции нескольких переменных. URSS, 2022.
14. Садуллаев А. Теория плюрипотенциала. Применения. Palmarium Academic Publishing, 2012.
15. Садуллаев А. С. Оценка полиномов на аналитических множествах // Известия Академии наук СССР. Серия математическая. 1982. Т. 46. Вып. 3. С. 524–534. https://www.mathnet.ru/rus/im1625
16. Садуллаев А. С. Плюрисубгармонические меры и емкости на комплексных многообразиях // Успехи математических наук. 1981. Т. 36. Вып. 4 (220). С. 53–105. https://www.mathnet.ru/rus/rm2998
17. Садуллаев А. С., Абдуллаев Б. И., Шарипов Р. А. Устранимые особенности ограниченных сверху $m - sh$ функций // Узбекский математический журнал. 2016. № 3. С. 118—124.
18. Siciak J. Extremal plurisubharmonic function in $\mathbb{C}^N$ // Annales Polonici Mathematici. 1981. Vol. 39. P. 175–211. https://doi.org/10.4064/ap-39-1-175-211
19. Nyström D. W. Monotonicity of non-pluripolar Monge–Ampère masses // Indiana University Mathematics Journal. 2019. Vol. 68. No. 2. P. 579–591. https://doi.org/10.1512/iumj.2019.68.7630
20. Захарюта В. П. Экстремальные плюрисубгармонические функции, гильбертовы шкалы и изоморфизмы пространств аналитических функций многих переменных. I // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. 1974. Вып. 19. С. 133–157. https://zbmath.org/?q=an:0336.46031
21. Захарюта В. П. Экстремальные плюрисубгармонические функции, гильбертовы шкалы и изоморфизмы пространств аналитических функций многих переменных. II // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. 1974. Вып. 21. С. 65–83. https://zbmath.org/?q=an:0336.46032
22. Zeriahi A. Fonction de Green pluriclomplexe à pole à l'infini sur un espace de Stein parabolique et applications // Mathematica Scandinavica. 1991. Vol. 69. P. 89–126 (in French). https://doi.org/10.7146/math.scand.a-12371

Поступила в редакцию 04.10.2022

Принята к публикации 27.12.2022

Абдуллаев Бахром Исмоилович, д. ф.-м. н., кафедра математического анализа, Ургенчский государственный университет, 220100, Узбекистан, г. Ургенч, ул. Х. Алимджана, 14;
ведущий научный сотрудник, Хорезмский отдел Института математики им. В. И. Романовского АН РУз, 220100, Узбекистан, г. Ургенч, ул. Х. Алимджана, 14.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2803-2955
E-mail: abakhrom1968@mail.ru

Камолов Хурсандбек Куролбоевич, докторант (PhD), кафедра математического анализа, Ургенчский государственный университет, 220100, Узбекистан, г. Ургенч, ул. Х. Алимджана, 14.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4314-7243
E-mail: xkamolov@mail.ru

**Цитирование:** Б. И. Абдуллаев, Х. К. Камолов. Теория потенциала на аналитической поверхности // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2023. Т. 33. Вып. 1. С. 3–16.

VESTNIK UDMURTSKOGO UNIVERSITETA. MATEMATIKA. MEKHANIKA. KOMP'YUTERNYE NAUKI
MATHEMATICS 2023. Vol. 33. Issue 1. Pp. 3–16.

***B. I. Abdullaev, Kh. Q. Kamolov***

**Potential theory on an analytic surface**

*Keywords*: analytic set, plurisubharmonic function, pluripolar set, $\mathcal{P}$-measure, maximal function.

MSC2020: 32U05, 32U15

DOI: 10.35634/vm230101

The work is devoted to the theory of pluripotential on analytic surfaces. The pluripotential theory on the complex space $\mathbb{C}^n$, as well as on the Stein complex manifold $X \subset \mathbb{C}^N$ (without a singular set) have been studied in enough detail. In this work, we propose a new approach for studying the main objects of potential theory on an analytic set with a non-empty singular (critical) set.

REFERENCES

1. Abdullaev B. I., Imomkulov S. A., Sharipov R. A. Structure of singular sets of some classes of subharmonic functions, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2021, vol. 31, issue 4, pp. 519–535 (in Russian). https://doi.org/10.35634/vm210401
2. Bedford E., Taylor B. A. A new capacity for plurisubharmonic functions, *Acta Mathematica*, 1982, vol. 149, pp. 1–40. https://doi.org/10.1007/BF02392348
3. Berndtsson B., Păun M. Quantitative extensions of pluricanonical forms and closed positive currents, *Nagoya Mathematical Journal*, 2012, vol. 205, pp. 25–65. https://doi.org/10.1215/00277630-1543778
4. Boucksom S., Favre C., Jonsson M. Solution to a non-Archimedean Monge–Ampère equation, *Journal of the American Mathematical Society*, 2015, vol. 28, no. 3, pp. 617–667. https://doi.org/10.1090/S0894-0347-2014-00806-7
5. Brelot M. *Éléments de la théorie classique du potentiel*, Paris: Centre de documentation universitaire, 1959.
6. Chirka E. M. *Complex analytic sets*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1989. https://doi.org/10.1007/978-94-009-2366-9
7. Coman D., Guedj V., Zeriahi A. Extension of plurisubharmonic functions with growth control, *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 2013, vol. 2013, issue 676, pp. 33–49. https://doi.org/10.1515/CRELLE.2011.185
8. Darvas T., Di Nezza E., Lu C. H. Log-concavity of volume and complex Monge–Ampère equations with prescribed singularity, *Mathematische Annalen*, 2021, vol. 379, issues 1–2, pp. 95–132. https://doi.org/10.1007/s00208-019-01936-y
9. Darvas T., Di Nezza E., Lu C. H. Monotonicity of nonpluripolar products and complex Monge–Ampère equations with prescribed singularity, *Analysis and PDE*, 2018, vol. 11, no. 8, pp. 2049–2087. https://doi.org/10.2140/apde.2018.11.2049
10. Hervé M. *Several complex variables. Local theory*, Oxford: Oxford University Press, 1963.
11. Klimek M. *Pluripotential theory*, Oxford: Clarendon Press, 1991. https://zbmath.org/0742.31001
12. Lelong P. Ensembles singuliers impropres des fonctions plurisousharmoniques, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. Neuvième Série*, 1957, vol. 36, pp. 263–303 (in French). https://zbmath.org/?q=an:0122.31902
13. Shabat B. V. *Introduction to complex analysis. Part II. Functions of several variables*, Providence: AMS, 1992. https://doi.org/10.1090/mmono/110
14. Sadullaev A. *Teoriya plyuripotentsiala. Primeneniya* (Pluripotential Theory. Applications), Palmarium Academic Publishing, 2012.
15. Sadullaev A. An estimate for polynomials on analytic sets, *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 1983, vol. 20, no. 3, pp. 493–502. https://doi.org/10.1070/IM1983v020n03ABEH001612
16. Sadullaev A. Plurisubharmonic measure and capacities on complex manifolds, *Russian Mathematical Surveys*, 1981, vol. 36, no. 4, pp. 61–119. https://doi.org/10.1070/RM1981v036n04ABEH002637

17. Sadullaev A. S., Abdullaev B. I., Sharipov R. A. A removable singularity of the bounded above $m - sh$ functions, *Uzbek Mathematical Journal*, 2016, no. 3, pp. 118–124 (in Russian).
18. Siciak J. Extremal plurisubharmonic function in $\mathbb{C}^N$, *Annales Polonici Mathematici*, 1981, vol. 39, pp. 175–211. https://doi.org/10.4064/ap-39-1-175-211
19. Nyström D. W. Monotonicity of non-pluripolar Monge–Ampère masses, *Indiana University Mathematics Journal*, 2019, vol. 68, no. 2, pp. 579–591. https://doi.org/10.1512/iumj.2019.68.7630
20. Zakharyuta V. P. Extremal plurisubharmonic functions, Hilbert scales, and the isomorphism of spaces of analytic functions of several variables. I, *Teoriya Funktsii, Funktsional'nyi Analiz i ikh Prilozheniya*, 1974, issue 19, pp. 133–157 (in Russian). https://zbmath.org/?q=an:0336.46031
21. Zakharyuta V. P. Extremal plurisubharmonic functions, Hilbert scales, and the isomorphism of spaces of analytic functions of several variables. II, *Teoriya Funktsii, Funktsional'nyi Analiz i ikh Prilozheniya*, 1974, issue 21, pp. 65–83 (in Russian). https://zbmath.org/?q=an:0336.46032
22. Zeriahi A. Fonction de Green pluriclomplexe à pole à l'infini sur un espace de Stein parabolique et applications, *Mathematica Scandinavica*, 1991, vol. 69, pp. 89–126 (in French). https://doi.org/10.7146/math.scand.a-12371

Received 04.10.2022

Accepted 27.12.2022

Bakhrom Ismoilovich Abdullaev, Doctor of Physics and Mathematics, Department of Mathematical Analysis, Urgench State University, ul. Kh. Alimdjana, 14, Urgench, 220100, Uzbekistan;
Leading Researcher, V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Khorezm Branch, ul. Kh. Alimdjana, 14, Urgench, 220100, Uzbekistan.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2803-2955
E-mail: abakhrom1968@mail.ru

Khursandbek Qurolboyevich Kamolov, PhD student, Department of Mathematical Analysis, Urgench State University, ul. Kh. Alimdjana, 14, Urgench, 220100, Uzbekistan.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4314-7243
E-mail: xkamolov@mail.ru

**Citation:** B. I. Abdullaev, Kh. Q. Kamolov. Potential theory on an analytic surface, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2023, vol. 33, issue 1, pp. 3–16.