ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ
МАТЕМАТИКА 2022. Т. 32. Вып. 1. С. 130–149.

УДК 517.957, 517.988, 517.977.56

© *А. В. Чернов*

О ТОТАЛЬНО ГЛОБАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ С МОНОТОННЫМ НЕЛИНЕЙНЫМ ОПЕРАТОРОМ

Пусть V — сепарабельное рефлексивное банахово пространство, непрерывно вложенное в гильбертово пространство H и плотное в нем; $X = L_p(0,T;V) \cap L_{p_0}(0,T;H)$; U — заданное множество управлений; $A\colon X \to X^*$ — заданный вольтерров оператор, радиально непрерывный, мотонный и коэрцитивный (вообще говоря, нелинейный). Для задачи Коши, связанной с управляемым эволюционным уравнением вида

$$x' + Ax = f[u](x), \quad x(0) = a \in H; \quad x \in W = \{x \in X\colon x' \in X^*\},$$

где $u \in U$ — управление, $f[u]\colon \mathbf{C}(0,T;H) \to X^*$ — вольтерров оператор ($W \subset \mathbf{C}(0,T;H)$), доказана тотально (по множеству допустимых управлений) глобальная разрешимость при условии глобальной разрешимости некоторого функционально-интегрального неравенства в пространстве $\mathbb{R}$. Во многих частных случаях указанное неравенство может быть конкретизировано как задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения. Фактически, развивается аналогичный результат, доказанный автором ранее для случая линейного оператора A и $V = H = V^*$. Отдельно рассматриваются случаи компактного вложения пространств, усиления условия монотонности и совпадения тройки пространств $V = H = H^*$. В последних двух случаях доказывается также единственность решения. В первом случае применяется теорема Шаудера, в остальных — технология продолжения решения по времени (то есть продолжения вдоль вольтерровой цепочки). Приводятся конкретные примеры задания оператора A.

Ключевые слова: сильно нелинейное эволюционное уравнение в банаховом пространстве, монотонный нелинейный оператор, тотально глобальная разрешимость.

DOI: 10.35634/vm220109

Введение

В данной статье рассматривается абстрактное эволюционное операторное уравнение с нелинейным монотонным оператором $A = A(x)$ в левой части и с правой частью $f = f[u](x)$, нелинейно зависящей от состояния x и от управления u. При минимальных требованиях на характер этой зависимости выводятся достаточные условия *тотально глобальной разрешимости* (ТГР) для задачи Коши, связанной с указанным уравнением, то есть глобальной разрешимости — на фиксированном отрезке времени, для всех управлений из заданного множества (тотально по множеству допустимых управлений). Об актуальности изучения проблемы ТГР см. в [1]. Ранее в аналогичном смысле использовался также термин *тотальное сохранение глобальной разрешимости*, введенный в работе [2]. Подчеркнем, что монотонность предполагается только для оператора A, но не для правой части f. А как известно, для управляемых нелинейных эволюционных уравнений, без некоторых специальных требований — монотонности, коэрцитивности и т. д., горизонт существования решения, вообще говоря, зависит от управления. См. убедительные примеры на этот счет в [3, пример к теореме 2.2, с. 87–88; § 4, с. 95–100], [4, § 1], [5, введение, п. 2]. Поэтому при исследовании различных вопросов управления можно идти двумя путями. Либо рассматривать управляемую систему как сингулярную, то есть как не обладающую свойством однозначной ТГР — см. [6], [7, глава 2]. Либо, устанавливая однозначную ТГР и рассматривая функционалы оптимизационной задачи как функции, зависящие только от управлений, опираться на соответствующие теоремы функционального анализа — см., например, [4,8,9]. Второй путь проще, но он требует гарантий ТГР.

Если бы правая часть $f[u](x)$ не зависела от x, то есть все нелинейности по x были бы отнесены к оператору A, то для доказательства ТГР можно было бы использовать стандартные методы — см., например, [10, 11]. Условиям глобальной разрешимости для уравнений с фиксированной (не зависящей от управления и состояния) правой частью f посвящена достаточно обширная литература, см., например, [12–15].

Поскольку в нашем случае правая часть $f[u](x)$ зависит, причем нелинейно, от управления и от состояния, в статье используется подход, аналогичный классической теореме Уинтнера (известной для обыкновенных дифференциальных уравнений в $\mathbb{R}^n$), в смысле построения так называемой системы сравнения для исходного управляемого уравнения: если известно, что система сравнения разрешима, то делается вывод, что исходное управляемое уравнение тоже разрешимо для всех управлений из заданного множества. Естественно, что в качестве системы сравнения имеет смысл использовать некоторое уравнение более простого типа, нежели исходное. В статье в качестве системы сравнения используется функционально-интегральное неравенство в пространстве $\mathbb{R}$. Для его построения применяется некоторая постулируемая оценка нелинейности $f[u](x)$ и имеющая очень простой смысл: требуется знать, чем ограничено $f[u](x)$, если известно, чем ограничено x. Это совершенно естественное (и естественно проверяемое) требование, без которого глупо надеяться получить хоть какой-то результат о сохранении глобальной разрешимости. Подобных оценок заведомо недостаточно, чтобы применить (при каждом фиксированном управлении) стандартные методы доказательства глобальной разрешимости. Упомянутое неравенство, выступающее в качестве системы сравнения, заведомо проще исследовать, чем исходное управляемое уравнение в частных производных (тем более, что в некоторых случаях его можно заменить задачей Коши для некоторого обыкновенного дифференциального уравнения в $\mathbb{R}$). Если сравнить с [11], можно заметить, что весьма нетривиальная проблема получения и исследования априорных оценок (отдельно для каждого конкретного вида нелинейности) заменяется (причем, унифицированным образом) проблемой исследования разрешимости функционально-интегрального неравенства или обыкновенного дифференциального уравнения в $\mathbb{R}$. Если сравнить с [10], то замечаем, что нам не требуется относить нелинейность по x к оператору A, и следить за тем, чтобы она была такой, чтобы обеспечивалась монотонность оператора A и прочие условия относительно этого оператора.

Таким образом, в рамках предлагаемого подхода исследование достаточно сложной управляемой системы сводится к исследованию существенно более простой, в пространстве $\mathbb{R}$, и к тому же, неуправляемой. В этом и есть главное достижение и новизна.

Фактически, развивается аналогичный результат, доказанный автором ранее [16] для случая линейного оператора A и $V = H = V^*$. Отдельно рассматриваются случаи компактного вложения пространств, усиления условия монотонности и совпадения тройки пространств $V = H = H^*$. В последних двух случаях доказывается также единственность решения. В первом случае применяется теорема Шаудера, в остальных — технология продолжения решения по времени (то есть продолжения вдоль вольтерровой цепочки). Приводятся конкретные примеры задания оператора A, см. § 6. Эти примеры взяты из [10]. Однако подчеркнем, что из [10] взяты не примеры исследуемых в статье уравнений, а лишь примеры оператора A, входящего в эти уравнения. Что касается уравнений, то как уже было сказано выше, в [10] правая часть f фиксирована (не зависит ни от состояния, ни от управления). Связь таких уравнений с параболическими уравнениями поясняется в [10, глава IV, § 2]. С физической точки зрения, f, как правило, является функцией источника. Но в приложениях она может быть управляемой, а управление может осуществляться по принципу обратной связи при заданном шаблоне зависимости от состояния — тогда будет и зависимость от состояния. Кроме того, дополнительные нелинейности могут порождаться такими физическими аспектами, как специальные характеристики сопротивления среды, дополнительные потоки вещества или энергии, наличие примесей, активно взаимодействующих с изучаемой субстанцией и т. д. В итоге вместо уравнения с фиксированной правой частью f получаем его аналог с правой частью $f[u](x)$, зависящей нелинейно от состояния и от управления. И здесь уже можно применять полученные в статье результаты. Отметим, что это — целое направление для построения достаточно содержательных примеров уравнений, допускающих применение полученных в статье результатов: берем какое-либо уже изученное уравнение с фиксированной правой частью f, а затем рассматриваем уравнение аналогичного вида, но с заменой правой части f на оператор $f[u](x)$, зависящий нелинейно от управления u и от состояния x. Это будет совершенно новое, существенно более сложное уравнение. Но дело упрощается тем, что аналогичное уравнение с фиксированной правой частью уже изучено и изучены свойства оператора A, входящего в уравнение. Это как бы один путь для построения содержательных примеров, и в § 6 он как раз и подразумевается. Есть, разумеется, и другой путь. А именно, можно взять уравнение с таким нелинейным оператором A, который до сих пор нигде не рассматривался. Но на этом пути придется провести отдельные исследования, посвященные: 1) выводу нового уравнения из некоторых физических потребностей; 2) изучению этого нового уравнения с фиксированной функцией источника f, и в частности, изучению свойств соответствующего оператора A; 3) изучению его аналога при замене f на $f[u](x)$. Но такие исследования заслуживают отдельной статьи, а возможно, и не одной.

§ 1. Предварительные соглашения и построения

Пусть V — сепарабельное рефлексивное банахово пространство, непрерывно вложенное в гильбертово пространство H и плотное в нем. Если отождествить H с H^*, а H^* — с подпространством сопряженного к V пространства V^*, то [10, глава VI] справедливы непрерывные включения: $V \subset H \subset V^*$. Будем обозначать: $\mathbf{C}(0,T;V)$ — пространство функций со значениями в V, непрерывных на отрезке $[0;T]$; $L_p(0,T;V)$ — пространство функций со значениями в V, интегрируемых по Бохнеру со степенью p на отрезке $[0;T]$; $\mathbf{C}[0;T] = \mathbf{C}(0,T;\mathbb{R})$, $L_p[0;T] = L_p(0,T;\mathbb{R})$. Следуя [10, глава VI], нормы в V, H, V^* будем обозначать $\|.\|$, $|.|$, $\|.\|_*$. Опять же, следуя [10, глава VI], рассмотрим эволюционное уравнение вида

$$x' + Ax = z, \quad x(0) = a; \quad x \in X, \tag{1.1}$$

с вольтерровым оператором $A\colon X \to X^*$, $X = L_p(0,T;V) \cap L_{p_0}(0,T;H)$, $1 < p \leqslant p_0 < \infty$, $a \in H$, $z \in X^*$. Здесь x' обозначает производную от $x \in X$ в смысле пространства распределений $\mathcal{D}^*(0,T;V^*)$. Уравнения вида (1.1) называются эволюционными. О связи эволюционных уравнений с параболическими дифференциальными уравнениями в частных производных см. [10, глава IV, § 2]. Напомним некоторые факты, которые будем использовать. Вольтерровость оператора A означает, что

$$\Big\{x(s) = y(s) \text{ для п. в. } s \in [0;t]\Big\} \quad \Rightarrow \quad \Big\{(Ax)(s) = (Ay)(s) \text{ для п. в. } s \in [0;t]\Big\}.$$

Норма в пространстве X определяется как $\|x\|_X = \|x\|_{L_p(0,T;V)} + \|x\|_{L_{p_0}(0,T;H)}$.

Сопряженное пространство

$$X^* = L_q(0,T;V^*) + L_{q_0}(0,T;H), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad \frac{1}{p_0} + \frac{1}{q_0} = 1,$$

наделяется нормой $\|z\|_{X^*} = \inf\Big\{\max\big(\|x\|_{L_q}, \|y\|_{L_{q_0}}\big) \colon x \in L_q, y \in L_{q_0}, x + y = z\Big\}$, где $L_q = L_q(0,T;V^*)$, $L_{q_0} = L_{q_0}(0,T;H)$. Оператор $\Lambda\colon D(\Lambda) \to X^*$ с линейной областью определения $D(\Lambda)$ называется монотонным, если для всех $x, y \in D(\Lambda)$ выполняется неравенство $\langle \Lambda x - \Lambda y, x - y\rangle \geqslant 0$, где угловые скобки обозначают действие функционала из X^*. Оператор Λ называется радиально непрерывным, если функция $s \to \langle \Lambda(x + sy), y\rangle$ для всех $x, y \in D(\Lambda)$ непрерывна на $[0;1]$. Оператор Λ называется коэрцитивным, если

$$\frac{\langle \Lambda x, x\rangle}{\|x\|_X} \to +\infty \quad \text{при} \quad x \in D(\Lambda), \quad \|x\|_X \to +\infty.$$

Для $z \in X^*$ имеем: $\langle z, x\rangle = \int\limits_0^T \big(z(s), x(s)\big)\, ds$. Здесь в правой части стоит интеграл Бохнера. Круглые скобки обозначают действие соответствующего функционала. В частности, если $z(s) \in H^* = H$, $x(s) \in H$, то это — скалярное произведение в H. Определим пространство решений $W = \big\{x \in X \colon x' \in X^*\big\}$. Оно является банаховым пространством с нормой $\|x\|_W = \|x\|_X + \|x'\|_{X^*}$. Аналог пространства X, получаемый при замене $[0;T]$ на $[0;t]$ будем обозначать X_t, и т. п. В аналогичном смысле понимаем обозначение $X_{[t_1,t_2]}$. Имеет место непрерывное вложение $W \subset \mathbf{C}(0,T;H)$, см. [10, глава IV, § 1.5, теорема 1.17, с. 177]. Справедливо следующее утверждение [10, глава VI, теорема 1.1, с. 239].

Лемма 1. *Пусть оператор A — радиально непрерывный, монотонный и коэрцитивный. Тогда задача Коши* (1.1) $\forall\, z \in X^*$, $a \in H$ *имеет единственное решение* $x \in W$.

Начальное условие $a \in H$ будем считать фиксированным. Далее везде считаем, что оператор $A\colon X \to X^*$ — радиально непрерывный, монотонный и коэрцитивный. В соответствии с леммой 1, определен оператор $\mathcal{F}\colon X^* \to W$, $x = \mathcal{F}[z]$, который каждому $z \in X^*$ ставит в соответствие решение $x \in W$ уравнения (1.1). Вольтерровость оператора A позволяет рассматривать локальные аналоги уравнения (1.1):

$$x' + A_{[0,\tau]}x = z\big|_{[0;\tau]}, \quad x \in W_\tau, \tag{1.2}$$

где оператор $A_{[0,\tau]}\colon X_\tau \to X_\tau^*$ — это локальный аналог оператора A, определяемый формулой: $A_{[0,\tau]} = S_{[0,\tau]} A Q_{[0,\tau]}$; $Q_{[0,\tau]}$ — оператор продолжения функции $x \in X_\tau$ до функции пространства X (в силу вольтерровости оператора A способ этого продолжения не имеет значения), $S_{[0,\tau]}$ — оператор сужения функции пространства X на отрезок $[0;\tau]$. Для решения $x \in W$ уравнения (1.1) его сужение $x\big|_{[0;\tau]}$ является решением уравнения (1.2) (и тем самым, оператор $\mathcal{F}$ тоже является вольтерровым). Этот факт вытекает из следующих трех утверждений (которые могут показаться очевидными, но на самом деле это не так, поскольку производные понимаются в смысле распределений).

Лемма 2. *Для любого $x \in W \subset \mathbf{C}(0,T;H)$ существует производная $(x\big|_{0;\tau]})'$, понимаемая в смысле распределений из $\mathcal{D}^*(0,\tau;V^*)$; при этом $(x\big|_{0;\tau]})' = x'\big|_{[0;\tau]}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно [10, глава IV, леммы 1.8, 1.9; см. также доказательство леммы 1.11], имеет место представление

$$x(t) = x(0) + \int\limits_0^t x'(s)\, ds, \quad t \in [0;T].$$

В частности, такое же представление справедливо и для сужения на $[0;\tau]$. Тогда [10, глава IV, лемма 1.8, с. 169] существует производная $(x\big|_{0;\tau]})'$, понимаемая в смысле распределений из $\mathcal{D}^*(0,\tau;V^*)$, и справедливо доказываемое равенство. □

Лемма 3. *Пространство сужений* $\{x\big|_{[0;\tau]} : x \in W\}$ *совпадает с* W_τ.

Доказательство. Вложение $\{x\big|_{[0;\tau]} : x \in W\} \subset W_\tau$ следует непосредственно из леммы 2. Докажем обратное вложение. Выберем произвольно $x \in W_\tau$. Согласно [10, глава IV, лемма 1.12, с. 174], найдется последовательность $\{x_k\} \subset \mathbf{C}^1(0,\tau;V) \cap W_\tau$ такая, что $\|x_k - x\|_{W_\tau} \to 0$ при $k \to \infty$. Зафиксируем достаточно малое число $\varepsilon \in (0;\tau]$ и выберем функцию $\varphi \in \mathbf{C}^1[\tau;T]$ со значениями в $[0;1]$ и такую, что $\varphi(\tau) = 1$, $\varphi(t) = 0$ для всех $t \in [\tau+\varepsilon;T]$. Определим продолжение

$$\overline{x}_k(t) = \begin{cases} x_k(t), & t \in [0;\tau], \\ \varphi(t)x_k(2\tau - t), & t \in (\tau;\tau+\varepsilon], \\ 0, & t \in (\tau+\varepsilon;T]. \end{cases}$$

Ясно, что $\overline{x}'_k \in L_{q_0}(0,T;H) + L_q(0,T;V^*)$, $\overline{x}_k \in L_p(0,T;V) \cap L_{p_0}(0,T;H)$. Это означает, что $\overline{x}_k \in W$. Оценим

$$\|\overline{x}_k - \overline{x}_m\|^p_{L_p(\tau,T;V)} \leqslant \int\limits_\tau^{\tau+\varepsilon} \big\|x_k(2\tau - s) - x_m(2\tau - s)\big\|^p_V\, ds \leqslant \int\limits_0^\tau \big\|x_k(t) - x_m(t)\big\|^p_V\, dt \to 0$$

при $k, m \to \infty$ в силу фундаментальности последовательности $\{x_k\}$ в W_τ (напомним, что это банахово пространство). Отсюда получаем: $\|\overline{x}_k - \overline{x}_m\|_{L_p(0,T;V)} \to 0$ при $k, m \to \infty$. Аналогичным образом доказывается сходимость к нулю в пространстве $L_{p_0}(0,T;H)$, а также сходимость $\|\overline{x}'_k - \overline{x}'_m\|_{X^*} \to 0$ при $k, m \to \infty$. Здесь только нужно учесть вложения:

$$x_k \in W_\tau \subset \mathbf{C}(0,\tau;H) \subset L_q(0,\tau;V^*) \cap L_{q_0}(0,\tau;H) \subset X^*_\tau,$$

и то, что при $t \in (\tau;\tau+\varepsilon)$ имеем: $\overline{x}'_k(t) = \varphi'(t)x_k(2\tau - t) - \varphi(t)x'_k(2\tau - t)$. В итоге мы получаем: $\|\overline{x}_k - \overline{x}_m\|_W \to 0$ при $k, m \to \infty$. Это означает, что последовательность $\{\overline{x}_k\}$ фундаментальна в W, а стало быть, сходится к некоторому $\overline{x} \in W$. При этом

$$\big\|x - \overline{x}\big|_{[0;\tau]}\big\|_{W_\tau} \leqslant \|x - x_k\|_{W_\tau} + \|x_k - \overline{x}\big|_{[0;\tau]}\|_{W_\tau} \leqslant \|x - x_k\|_{W_\tau} + \|\overline{x}_k - \overline{x}\|_W \to 0$$

при $k \to \infty$. Отсюда следует, что $x = \overline{x}\big|_{[0;\tau]}$. □

Непосредственно из лемм 2, 3 вытекает

Лемма 4. *Пусть* $x, \overline{x} \in W$, $x(t) = \overline{x}(t)$ *для п. в.* $t \in [0;\tau]$. *Тогда*

$$x'\big|_{[0;\tau]} = \big(x\big|_{[0;\tau]}\big)' = \big(\overline{x}\big|_{[0;\tau]}\big)' = \overline{x}'\big|_{[0;\tau]}$$

в X^*_τ, *то есть оператор дифференцирования является вольтерровым.*

Далее мы неоднократно будем использовать также следующий факт [10, глава IV, замечание 1.22, с. 179].

Лемма 5. *Для всех* $x \in W$, $s, t \in [0;T]$ *имеем:* $\big|x(t)\big|^2 - \big|x(s)\big|^2 = 2\int\limits_s^t \big(x'(\xi), x(\xi)\big)\, d\xi.$

Далее для краткости значения $(A_{[0,\tau]}x)(t)$ при $x \in X_\tau$, $t \in [0;\tau]$ будем обозначать как $(Ax)(t)$. Поскольку оператор A вольтерров, это не должно приводить к недоразумениям.

Непосредственно из [10, глава VI, лемма 1.1, с. 240] вытекает

Лемма 6. *Если* $A\colon X \to X^*$ *— монотонный вольтерров оператор, то для всех* $t \in [0;T]$, $x, y \in X_t$ *имеем:* $\int\limits_0^t \big((Ax)(s) - (Ay)(s), x(s) - y(s)\big)\, ds \geqslant 0.$

Лемма 7. *Для всех* $t \in [0;T]$, $z_i \in X_t^*$, $x_i = \mathcal{F}_{[0,t]}[z_i]$, $i = 1, 2$, *имеем:*

$$\frac{1}{2}\big|x_1(t) - x_2(t)\big|^2 \leqslant \int\limits_0^t \big(z_1(s) - z_2(s), x_1(s) - x_2(s)\big)\, ds \leqslant \|z_1 - z_2\|_{X_t^*}\|x_1 - x_2\|_{X_t}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Непосредственно из лемм 3, 5 получаем:

$$\frac{1}{2}\big|x_1(t) - x_2(t)\big|^2 = \int\limits_0^t \big(x_1'(s) - x_2'(s), x_1(s) - x_2(s)\big)\, ds =$$

$$= \int\limits_0^t \big(-\big\{(Ax_1)(s) - (Ax_2)(s)\big\} + z_1(s) - z_2(s), x_1(s) - x_2(s)\big)\, ds.$$

Остается воспользоваться леммой 6. □

Пусть U — заданное множество управлений. Будем исследовать аналог уравнения (1.1), получаемый добавлением управляемой нелинейности:

$$x' + Ax = f[u](x), \quad x(0) = a \in H; \quad x \in W = \{x \in X : x' \in X^*\}, \tag{1.3}$$

где $u \in U$ — управление, $f[u]\colon X \to X^*$ — управляемый вольтерров оператор. Далее мы рассмотрим два принципиально различных случая.

§ 2. Случай компактного вложения

В этом параграфе будем предполагать, что пространство W компактно вложено в $L_p(0,T;H)$. И очевидно, что $X \subset L_p(0,T;H)$ непрерывно.

Конкретизируем условие коэрцитивности относительно оператора A:

A$_1$) имеется непрерывная строго возрастающая функция $K\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ такая, что
$K(M) \to +\infty$ при $M \to +\infty$; $\int\limits_0^T \big((Ax)(s), x(s)\big)\, ds \geqslant K\big(\|x\|_X\big)\|x\|_X \ \forall\, x \in X.$

Определим функции $\Phi(\xi) = K^{-1}\left(\frac{1}{2}|a|^2 + \xi\right)$, $L(\xi) = \begin{cases} \sqrt{|a|^2 + 2\xi}, & \xi \in [0;\xi_0), \\ \sqrt{|a|^2 + 2\xi\Phi(\xi)}, & \xi \geqslant \xi_0, \end{cases}$ где точка $\xi_0 \geqslant 0$ такова, что $\Phi(\xi_0) = 1$. Если такой точки не существует, то есть $\Phi(\xi) \geqslant 1$ для всех $\xi \geqslant 0$, то можно взять $L(\xi) = |a|^2 + 2\xi\Phi(\xi)$, $\xi \geqslant 0$.

Сделаем следующие предположения.

F$_1$) $\forall\, u \in U$ осуществляется непрерывное отображение $f[u]\colon L_p(0,T;H) \to L_q(0,T;V^*)$; таким образом, $\|f[u](x)\|_{X^*} = \|f[u](x)\|_{L_q(0,T;V^*)}$ $\forall\, x \in L_p(0,T;H)$.

F$_2$) Для всех $u \in U$, $x \in L_p(0,T;H)$, $|x(t)| \leqslant \beta(t)$ при произвольном $\beta \in \mathbf{C}[0;T]$ имеем: $\big\|(f[u]x)\big\|_{X_t^*} \leqslant \Psi\Big(\big\|\mathcal{N}[\beta]\big\|_{L_1[0;t]}\Big)$ при п. в. $t \in [0;T]$; $\mathcal{N}[\beta] \in L_1[0;T]$, $\Psi \in \mathbf{C}(\mathbb{R}_+)$.

Теорема 1. *Пусть вложение $W \subset L_p(0,T;H)$ компактно, выполнены условия* $\mathbf{A}_1$), $\mathbf{F}_1$), $\mathbf{F}_2$) *и функционально-интегральное неравенство*

$$\Psi\Big(\big\|\mathcal{N}[L(\alpha)]\big\|_{L_1[0;t]}\Big) \leqslant \alpha(t), \quad t \in [0;T], \tag{2.1}$$

имеет решение $\alpha \in \mathbf{C}[0;T]$; $\beta(t) = L\big(\alpha(t)\big)$. Тогда $\forall\, u \in U$ уравнение (1.3) *имеет по крайней мере одно решение $x = x[u] \in W$, причем $\big|x(t)\big| \leqslant \beta(t)$, $t \in [0;T]$.*

Доказательство теоремы 1 см. далее в этом параграфе. Для установления единственности решения приходится усиливать условие монотонности оператора A (что и не удивительно, если сравнить, например, с теоремой Минти–Браудера, [17, Theorem 26.A, p. 557]), а также условие непрерывности оператора $f[u]$; подробнее см. следующий параграф.

Замечание 1. При компактном вложении $W \subset L_q(0,T;H)$ утверждение теоремы 1 останется справедливым, если в условиях $\mathbf{F}_1$), $\mathbf{F}_2$) пространство L_p заменить на L_q.

Для доказательства теоремы 1 нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 8. *Пусть выполнено условие* $\mathbf{A}_1$)*. Тогда для всех $t \in [0;T]$, $x \in X_t$ имеем:*

$$\int\limits_0^t \big((Ax)(s), x(s)\big)\, ds \geqslant K\big(\|x\|_{X_t}\big)\|x\|_{X_t}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $\overline{x}(s) = \begin{cases} x(s), & s \in [0;t], \\ 0, & s \in (t;T]. \end{cases}$ Так как оператор A вольтерров, то для п. в. $s \in [0;t]$ имеем: $(Ax)(s) = (A_{[0;t]}x)(s) = (AQ_{[0;t]}x)(s) = (A\overline{x})(s)$. При этом $\|\overline{x}\|_X = \|x\|_{X_t}$. Остается подставить в левую часть доказываемого неравенства вместо x функцию $\overline{x}$ и воспользоваться условием $\mathbf{A}_1$). □

Лемма 9. *Пусть выполнено условие* $\mathbf{A}_1$) *и при произвольно заданном $t \in [0;T]$, $z \in X_t^*$, $x = \mathcal{F}_{[0;t]}[z]$. Тогда $\|x\|_{X_t} \leqslant \max\Big\{1, \Phi\big(\|z\|_{X_t^*}\big)\Big\}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\|x\|_{X_t} \geqslant 1$. Из лемм 3, 5 получаем:

$$\frac{1}{2}\big|x(t)\big|^2 + \int\limits_0^t \big((Ax)(s), x(s)\big)\, ds = \frac{1}{2}\big|a\big|^2 + \int\limits_0^t \big(z(s), x(s)\big)\, ds \leqslant \frac{1}{2}\big|a\big|^2 + \|z\|_{X_t^*}\|x\|_{X_t}.$$

Пользуясь теперь леммой 8, заключаем, что

$$K\big(\|x\|_{X_t}\big)\|x\|_{X_t} \leqslant \frac{1}{2}\big|a\big|^2 + \|z\|_{X_t^*}\|x\|_{X_t} \leqslant \|x\|_{X_t}\left\{\frac{1}{2}\big|a\big|^2 + \|z\|_{X_t^*}\right\}.$$

Остается поделить на $\|x\|_{X_t} \geqslant 1$. □

Лемма 10. *Пусть выполнено условие* $\mathbf{A}_1$)*. Тогда при произвольно заданном $t \in [0;T]$ оператор $\mathcal{F}_{[0;t]}$, рассматриваемый как отображение $X_t^* \to \mathbf{C}(0,t;H)$, непрерывен; следовательно, непрерывен и как оператор $X_t^* \to L_p(0,t;H)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно доказать непрерывность оператора на произвольном ограниченном множестве в X_t^*. Пусть $z_i \in X_t^*$, $i = 1,2$, принадлежат шару в X_t^* с центром в нуле радиуса M, следовательно, $\max\big\{\|z_i\|_{X_t^*} : i = 1,2\big\} \leqslant M$. Положим $x_i = \mathcal{F}_{[0;t]}[z_i]$, $i = 1,2$. Согласно лемме 9, $\|x_1\|_{X_t} + \|x_2\|_{X_t} \leqslant 2\max\big\{1, \Phi(M)\big\} \equiv M_1$. Пользуясь теперь леммой 7, заключаем, что $\big|x_1(s) - x_2(s)\big|^2 \leqslant 2M_1\|z_1 - z_2\|_{X_t^*}$ для всех $s \in [0;t]$. □

Лемма 11. *Пусть вложение $W \subset L_p(0,T;H)$ компактно и выполнено условие* $\mathbf{A}_1$). *Тогда для всех $M \geqslant 0$ множество $\Gamma_M = \big\{\mathcal{F}[z]\colon z \in L_q(0,T;V^*),\ \|z\|_{L_q(0,T;V^*)} \leqslant M\big\}$ предкомпактно в $L_p(0,T;H)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу компактного вложения $W \subset L_p(0,T;H)$ достаточно доказать, что множество Γ_M ограничено в пространстве W. Выберем произвольно функцию $z \in L_q(0,T;V^*)$, $\|z\|_{L_q(0,T;V^*)} \leqslant M$, и соответственно, $x = \mathcal{F}[z]$. Тогда $\|z\|_{X^*} = \|z\|_{L_q} \leqslant M$. Согласно лемме 9, $\|x\|_X \leqslant \max\big\{1, \Phi(M)\big\} \equiv M_1$. Заметим, что $\|x'\|_{X^*} = \|z - Ax\|_{X^*} \leqslant \leqslant \|z\|_{X^*} + \|Ax\|_{X^*} \leqslant M + \|Ax\|_{X^*}$.

Из доказательства леммы 9 видно, что справедлива оценка

$$\langle Ax, x\rangle = \int\limits_0^T \big((Ax)(s), x(s)\big)\,ds \leqslant \frac{1}{2}\big|a\big|^2 + \|z\|_{X^*}\|x\|_X \leqslant \frac{1}{2}\big|a\big|^2 + MM_1.$$

Отсюда, в силу [10, глава III, следствие 1.2, с. 84], вытекает, что существует константа M_2 такая, что $\|Ax\|_{X^*} \leqslant M_2$ для всех $x \in \Gamma_M$. Стало быть, $\|x\|_W = \|x\|_X + \|x'\|_{X^*} \leqslant \leqslant M_1 + M + M_2$ для всех $x \in \Gamma_M$. □

Лемма 12. *Пусть $\beta \in L_p[0;T]$. Тогда $\Omega = \big\{x \in L_p(0,T;H)\colon |x(t)| \leqslant \beta(t),\ t \in [0;T]\big\}$ замкнуто в $L_p(0,T;H)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\{x_k\} \subset \Omega$, $x_k \to \overline{x}$ в $L_p(0,T;H)$. Достаточно доказать, что $\overline{x} \in \Omega$. Положим $\varphi_k(t) = |x_k(t)|$, $\overline{\varphi}(t) = |\overline{x}(t)|$, $t \in [0;T]$. Тогда $\varphi_k \in L_p[0;T]$, $\overline{\varphi} \in L_p[0;T]$. Оценим

$$\|\varphi_k - \overline{\varphi}\|^p_{L_p[0;T]} = \int\limits_0^T \big||x_k(t)| - |\overline{x}(t)|\big|^p\,dt \leqslant \int\limits_0^T \big|x_k(t) - \overline{x}(t)\big|^p\,dt = \|x_k - \overline{x}\|^p_{L_p(0,T;H)} \to 0$$

при $k \to \infty$. Таким образом, [18, теорема VIII.5.1, с. 210] имеет место сходимость по мере $\varphi_k \xrightarrow{\mu} \overline{\varphi}$ на $[0;T]$. Согласно теореме Ф. Рисса [18, теорема VI.5.3, с. 142], отсюда вытекает существование подпоследовательности, сходящейся п. в.: $\varphi_{k_m}(t) \to \overline{\varphi}(t)$ для п. в. $t \in [0;T]$. В таком случае получаем:

$$0 \leqslant \overline{\varphi}(t) \leqslant \big|\overline{\varphi}(t) - \varphi_{k_m}(t)\big| + \varphi_{k_m}(t) \leqslant \big|\overline{\varphi}(t) - \varphi_{k_m}(t)\big| + \beta(t).$$

Переходя к пределу при $m \to \infty$, получаем: $\overline{\varphi}(t) \leqslant \beta(t)$ для п. в. $t \in [0;T]$. Это означает, что $\overline{x} \in \Omega$. □

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Определим множество

$$\Omega = \big\{x \in L_p(0,T;H)\colon |x(t)| \leqslant \beta(t),\ t \in [0;T]\big\}.$$

Ясно, что множество Ω выпукло и, по лемме 12, замкнуто в $L_p(0,T;H)$. Зафиксируем произвольно $u \in U$ и, с учетом условия $\mathbf{F}_1$), определим оператор $G\colon L_p(0,T;H) \to L_p(0,T;H)$ формулой $G[x] = \mathcal{F}\big(f[u]x\big)$.

Покажем, что $G\colon \Omega \to \Omega$. Выберем произвольно $x \in \Omega$ и положим $y = G[x] = \mathcal{F}[z]$, $z = f[u](x)$. Как видно из доказательства леммы 9, имеет место оценка

$$\big|y(t)\big|^2 \leqslant \big|a\big|^2 + 2\|z\|_{X_t^*}\|y\|_{X_t} \quad \Rightarrow \quad \big|y(t)\big| \leqslant \sqrt{\big|a\big|^2 + 2\|z\|_{X_t^*}\|y\|_{X_t}}.$$

Непосредственно по лемме 9, $\|y\|_{X_t} \leqslant \max\Bigl\{1, \Phi\bigl(\|z\|_{X_t^*}\bigr)\Bigr\}$. Отсюда получаем:

$$\bigl|y(t)\bigr| \leqslant L(\xi), \quad \xi = \|z\|_{X_t^*} = \bigl\|f[u]x\bigr\|_{X_t^*}.$$

Пользуясь определением множества Ω и условием $\mathbf{F}_2$), находим

$$\xi = \bigl\|f[u]x\bigr\|_{X_t^*} \leqslant \Psi\Bigl(\bigl\|\mathcal{N}[\beta]\bigr\|_{L_1[0;t]}\Bigr).$$

Таким образом, $\bigl|y(t)\bigr| \leqslant L\Bigl(\Psi\bigl(\bigl\|\mathcal{N}[\beta]\bigr\|_{L_1[0;t]}\bigr)\Bigr)$. Используя соотношения $\beta = L(\alpha)$, (2.1), имеем: $\bigl|y(t)\bigr| \leqslant \beta(t)$. Таким образом, $G\colon \Omega \to \Omega$. При этом множество $G\Omega$ вкладывается в множество $\Gamma = \bigl\{\mathcal{F}[z]\colon z \in L_q(0,T;V^*),\ \|z\|_{L_q} \leqslant M\bigr\}$, $M = \max\limits_{s\in[0;s_0]} \Psi(s)$, где $s_0 = \bigl\|\mathcal{N}[\beta]\bigr\|_{L_1[0;T]}$. И по лемме 11, множество Γ, а следовательно, и множество $G\Omega$ предкомпактно в $L_p(0,T;H)$. В силу условия $\mathbf{F}_1$) и леммы 10, оператор G непрерывен. Стало быть, можно воспользоваться теоремой Шаудера [19, § XVI.3, с. 627], откуда получаем, что оператор $G\colon \Omega \to \Omega$ имеет неподвижную точку $x = x[u] \in \Omega$. Остается заметить, что оператор G действует в пространство W, следовательно, $x[u] \in W$. □

§ 3. Случай полусильной монотонности

Некоторое усиление требования монотонности оператора A позволяет доказать единственность и существование решения уравнения (1.3) даже без использования предположения *о компактном вложении* (см. предыдущий параграф). При этом используется «цепочечная» технология (технология продолжения необходимых оценок вдоль вольтерровой цепочки — в нашем случае это временная шкала $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = T$).

Итак, будем использовать следующие предположения.

$\mathbf{A}_2$) Существует строго возрастающая функция $Q\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, обеспечивающая оценку:

$$\langle Ax - Ay, x - y\rangle \geqslant Q\bigl(\|x-y\|_X\bigr)\|x-y\|_X \quad \forall\, x,y \in X; \quad Q(0) = 0.$$

$\mathbf{F}_3$) Для всех $u \in U$, $x_i \in W$, $\bigl|x_i(t)\bigr| \leqslant \beta(t)$ при произвольной функции $\beta \in \mathbf{C}[0;T]$, $i = 1,2$, $0 = t_1 < t_2 \leqslant T$, и оператора $f[u]\colon X \to X^*$ имеем оценку:

$$\bigl\|f[u](x_1) - f[u](x_2)\bigr\|_{X^*_{[t_1;t_2]}} \leqslant R\Bigl(\bigl\|\mathcal{N}_1[\beta]\bigr\|_{L_1[t_1;t_2]}\Bigr)Q\bigl(\|x_1 - x_2\|_{X_{t_2}}\bigr),$$

где $R \in \mathbf{C}(\mathbb{R}_+)$, $R(0) = 0$, $\mathcal{N}_1[\beta] \in L_1[0;T]$.

Замечание 2. Если в условии $\mathbf{A}_2$) функция Q линейна: $Q(s) = \beta s$, при $\beta > 0$, то оно означает, что оператор A сильно монотонный. Поэтому условие $\mathbf{A}_2$) естественно назвать условием *полусильной монотонности*.

Замечание 3. Из анализа доказательства теоремы единственности, см. далее, видно, что в ней оценку из условия $\mathbf{F}_3$) можно заменить, например, следующей:

$$\bigl\|f[u](x_1) - f[u](x_2)\bigr\|_{X^*_{[t_1;t_2]}} \leqslant Q\Bigl[R\Bigl(\bigl\|\mathcal{N}_1[\beta]\bigr\|_{L_1[t_1;t_2]}\Bigr)\|x_1 - x_2\|_{X_{t_2}}\Bigr].$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* $\mathbf{A}_2$), $\mathbf{F}_3$). *Тогда для каждого* $u \in U$ *уравнение* (1.3) *не может иметь более одного решения.*

Доказательство теоремы 2 см. далее в этом параграфе.

Ослабим несколько условие $\mathbf{F}_2$) и модифицируем условие $\mathbf{F}_3$).

$\mathbf{F}_2'$) Для всех $u \in U$, $x \in X$, $|x(t)| \leqslant \beta(t)$ при произвольной функции $\beta \in \mathbf{C}[0;T]$ имеем:

$$\big\|(f[u]x)\big\|_{X_t^*} \leqslant \Psi\Big(\big\|\mathcal{N}_2[\beta]\big\|_{L_1[0;t]}\Big) \text{ при п. в. } t \in [0;T];\ \mathcal{N}_2[\beta] \in L_1[0;T],\ \ \Psi \in \mathbf{C}(\mathbb{R}_+).$$

$\mathbf{F}_3'$) Для всех $u \in U$, $x_i \in X$, $\big|x_i(t)\big| \leqslant \beta(t)$ при произвольной функции $\beta \in \mathbf{C}[0;T]$, $i = 1,2$, $0 = t_1 < t_2 \leqslant T$, и оператора $f[u]\colon X \to X^*$ имеем оценку:

$$\big\|f[u](x_1) - f[u](x_2)\big\|_{X^*_{[t_1;t_2]}} \leqslant Q\Big[R\Big(\big\|\mathcal{N}_3[\beta]\big\|_{L_1[t_1;t_2]}\Big)\|x_1 - x_2\|_{X_{t_2}}\Big],$$

где $R \in \mathbf{C}(\mathbb{R}_+)$, $R(0) = 0$, $\mathcal{N}_3[\beta] \in L_1[0;T]$.

С поправкой на замечание 3, условие $\mathbf{F}_3'$) можно понимать как усиление условия $\mathbf{F}_3$).

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* $\mathbf{A}_1$), $\mathbf{A}_2$), $\mathbf{F}_2'$), $\mathbf{F}_3'$) *и функционально-интегральное неравенство*

$$\Psi\Big(\big\|\mathcal{N}_2[L(\alpha)]\big\|_{L_1[0;t]}\Big) \leqslant \alpha(t), \quad t \in [0;T], \tag{3.1}$$

имеет решение $\alpha \in \mathbf{C}[0;T]$; $\beta(t) = L\big(\alpha(t)\big)$. *Тогда* $\forall\, u \in U$ *уравнение* (1.3) *имеет по крайней мере одно решение* $x = x[u] \in W$ *такое, что* $\big|x(t)\big| \leqslant \beta(t)$, $t \in [0;T]$.

Доказательство теоремы 3 см. далее в этом параграфе. Для доказательства теорем 2, 3 нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 13. *Пусть выполнено условие* $\mathbf{A}_2$). *Тогда для всех* $t \in [0;T]$, $x, y \in X_t$ *имеем:*

$$\int\limits_0^t \big((Ax)(s) - (Ay)(s), x(s) - y(s)\big)\, ds \geqslant Q\big(\|x - y\|_{X_t}\big)\|x - y\|_{X_t}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о аналогично доказательству леммы 8.

Лемма 14. *Пусть выполнено условие* $\mathbf{A}_2$), $t \in [0;T]$, $x_i = \mathcal{F}_{[0;t]}[z_i]$, $z_i \in X_t^*$, $i = 1,2$. *Тогда* $Q\big(\|x_1 - x_2\|_{X_t}\big) \leqslant \|z_1 - z_2\|_{X_t^*}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\|x_1 - x_2\|_{X_t} = 0$, то доказываемая оценка очевидна, поскольку $Q(0) = 0$. Будем предполагать, что $\|x_1 - x_2\|_{X_t} > 0$. Аналогично доказательству леммы 7, получаем:

$$\frac{1}{2}\big|x_1(t) - x_2(t)\big|^2 + \int\limits_0^t \big((Ax_1)(s) - (Ax_2)(s), x_1(s) - x_2(s)\big)\, ds = \int\limits_0^t \big(z_1(s) - z_2(s), x_1(s) - x_2(s)\big)\, ds.$$

Отсюда и непосредственно из леммы 13 вытекает оценка

$$Q\big(\|x_1 - x_2\|_{X_t}\big)\|x_1 - x_2\|_{X_t} \leqslant \int\limits_0^t \big(z_1(s) - z_2(s), x_1(s) - x_2(s)\big)\, ds \leqslant \|z_1 - z_2\|_{X_t^*}\|x_1 - x_2\|_{X_t}. \ \square$$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2. Рассуждая от противного, предположим, что нашлись два решения $x = x_1$, $x = x_2$. Положим $\eta = x_2 - x_1$, $z_i = f[u](x_i)$, $i = 1,2$. Поскольку

$x_i \in W \subset \mathbf{C}(0,T;H)$, $i=1,2$, то функция $\beta(t)=\big|x_1(t)\big|+\big|x_2(t)\big|$ непрерывна на $[0;T]$. Пусть число $\delta>0$ таково, что (с учетом абсолютной непрерывности интеграла Лебега)

$$R\Big(\big\|\chi_h\mathcal{N}_1[\beta]\big\|_{L_1[0;T]}\Big)\leqslant\frac{1}{2} \tag{3.2}$$

при любом измеримом $h\subset[0;T]$, $\operatorname{mes}h\leqslant\delta$. Выберем произвольное разбиение отрезка $[0;T]$: $0=t_0<t_1<\ldots<t_k=T$, $t_i-t_{i-1}\leqslant\delta$, $i=\overline{1,k}$. Согласно лемме 14 и условию $\mathbf{F}_3$), а также выбору разбиения и числа δ, то есть условию (3.2), получаем:

$$Q\big(\|\eta\|_{X_{t_1}}\big)\leqslant\|z_2-z_1\|_{X^*_{t_1}}\leqslant R\Big(\big\|\mathcal{N}_1[\beta]\big\|_{L_1[0;t_1]}\Big)Q\big(\|\eta\|_{X_{t_1}}\big)\leqslant\frac{1}{2}Q\big(\|\eta\|_{X_{t_1}}\big).$$

Таким образом, $\frac{1}{2}Q\big(\|\eta\|_{X_{t_1}}\big)\leqslant 0$, то есть $Q\big(\|\eta\|_{X_{t_1}}\big)=0$. Отсюда, учитывая, что $Q(0)=0$ и функция Q строго возрастающая, $\|\eta\|_{X_{t_1}}=0$. Предположим, мы уже доказали, что $\|\eta\|_{X_{t_{i-1}}}=0$. Опять же, согласно лемме 14 и условию $\mathbf{F}_3$), вольтерровости оператора $f[u]$ и предположению индукции (откуда $z_1(t)=z_2(t)$ при $t\in[0;t_{i-1}]$), а также выбору разбиения и числа δ, то‘есть условию (3.2), получаем:

$$Q\big(\|\eta\|_{X_{t_i}}\big)\leqslant\|z_2-z_1\|_{X^*_{t_i}}=\|z_2-z_1\|_{X^*_{[t_{i-1};t_i]}}\leqslant R\Big(\big\|\mathcal{N}_1[\beta]\big\|_{L_1[t_{i-1};t_i]}\Big)Q\big(\|\eta\|_{X_{t_i}}\big)\leqslant\frac{1}{2}Q\big(\|\eta\|_{X_{t_i}}\big).$$

Таким образом, $\frac{1}{2}Q\big(\|\eta\|_{X_{t_i}}\big)\leqslant 0$, то есть $Q\big(\|\eta\|_{X_{t_i}}\big)=0$. Отсюда, учитывая, что $Q(0)=0$ и функция Q строго возрастающая, $\|\eta\|_{X_{t_i}}=0$.

По индукции, делаем вывод, что $\|\eta\|_X=0$, то есть $x_1(t)=x_2(t)$ для п. в. $t\in[0;T]$. Учитывая, что $x_i\in\mathbf{C}(0,T;H)$, $i=1,2$, $x_1(t)=x_2(t)$ для всех $t\in[0;T]$. □

Доказательство теоремы 3. Зафиксируем произвольно $u\in U$ и покажем, что уравнение (1.3) имеет решение. Для этого достаточно доказать разрешимость уравнения

$$x=G[x],\quad x\in X;\quad G=\mathcal{F}\big(f[u](x)\big)\colon X\to X. \tag{3.3}$$

Пусть число $\delta>0$ таково, что (с учетом абсолютной непрерывности интеграла Лебега)

$$R\Big(\big\|\chi_h\mathcal{N}_3[\beta]\big\|_{L_1[0;T]}\Big)\leqslant\frac{1}{2} \tag{3.4}$$

при любом измеримом $h\subset[0;T]$, $\operatorname{mes}h\leqslant\delta$. Выберем произвольное разбиение отрезка $[0;T]$: $0=t_0<t_1<\ldots<t_k=T$, $t_i-t_{i-1}\leqslant\delta$, $i=\overline{1,k}$. Используя вольтерровость оператора G, будем рассматривать локальные аналоги уравнения (3.3):

$$x=G_j[x],\quad x\in X_{t_j},\quad G_j=G_{[0;t_j]},\quad j\in\overline{1,k}. \tag{3.5}$$

Разрешимость уравнений (3.5) будем доказывать индукцией по $j=\overline{1,k}$. Дальнейшее доказательство проведем в несколько этапов.

1. Определим множество $Y_1=\big\{x\in X_{t_1}\colon\big|x(t)\big|\leqslant\beta(t),\ t\in[0;t_1]\big\}$. По лемме 12, учитывая вложение $X_{t_1}\subset L_{p_0}(0,t_1;H)$, множество Y_1 замкнуто в X_{t_1}. Множество Y_1 не пусто, так как содержит $0\in X_{t_1}$. Докажем, что $G_1\colon Y_1\to Y_1$. Выберем произвольно $x\in Y_1$ и рассмотрим $y=G_1[z]$, $z=f[u](x)\in X^*_{t_1}$. Зафиксируем произвольно $t\in[0;t_1]$.

Как видно из доказательства леммы 9, имеет место оценка

$$\big|y(t)\big|^2\leqslant\big|a\big|^2+2\|z\|_{X^*_t}\|y\|_{X_t}\quad\Rightarrow\quad\big|y(t)\big|\leqslant\sqrt{\big|a\big|^2+2\|z\|_{X^*_t}\|y\|_{X_t}}.$$

Непосредственно по лемме 9, $\|y\|_{X_t} \leqslant \max\Big\{1, \Phi\big(\|z\|_{X_t^*}\big)\Big\}$. Отсюда получаем:

$$\big|y(t)\big| \leqslant L(\xi), \quad \xi = \|z\|_{X_t^*} = \big\|f[u]x\big\|_{X_t^*}.$$

Пользуясь определением множества Y_1 и условием $\mathbf{F}_2'$), находим

$$\xi = \big\|f[u]x\big\|_{X_t^*} \leqslant \Psi\Big(\big\|\mathcal{N}_2[\beta]\big\|_{L_1[0;t]}\Big).$$

Таким образом, $\big|y(t)\big| \leqslant L\Big(\Psi\big(\big\|\mathcal{N}_2[\beta]\big\|_{L_1[0;t]}\big)\Big)$. Используя соотношения $\beta = L(\alpha)$, (3.1), имеем: $\big|y(t)\big| \leqslant \beta(t)$. Таким образом, $G_1 \colon Y_1 \to Y_1$.

2. Установим сжимаемость оператора G_1 на множестве Y_1. Выберем произвольно $x, \widetilde{x} \in Y_1$ и положим $z = f[u](x)$, $\widetilde{z} = f[u](\widetilde{x})$, $y = G_1[x] = \mathcal{F}[z]$, $\widetilde{y} = G_1[\widetilde{x}] = \mathcal{F}[\widetilde{z}]$. Согласно лемме 14 и условию $\mathbf{F}_3'$), а также выбору разбиения и числа δ, то есть условию (3.4), получаем:

$$Q\big(\|y-\widetilde{y}\|_{X_{t_1}}\big) \leqslant \|z-\widetilde{z}\|_{X_{t_1}^*} \leqslant Q\Big[R\Big(\big\|\mathcal{N}_3[\beta]\big\|_{L_1[0;t_1]}\Big)\|x-\widetilde{x}\|_{X_{t_1}}\Big] \leqslant Q\left(\frac{1}{2}\|x-\widetilde{x}\|_{X_{t_1}}\right).$$

В силу строгой монотонности функции Q, $\big\|G_1[x]-G_1[\widetilde{x}]\big\|_{X_{t_1}} = \|y-\widetilde{y}\|_{X_{t_1}} \leqslant \dfrac{1}{2}\|x-\widetilde{x}\|_{X_{t_1}}$.

По принципу сжимающих отображений заключаем, что уравнение (3.5) при $j=1$ имеет единственное решение в множестве Y_1.

3. Действуя по индукции, предположим, что мы уже доказали существование функции $x = x_{i-1} \in X_{t_{i-1}}$, являющейся решением уравнения (3.5) при $j = i-1$ и удовлетворяющей оценке $\big|x_{i-1}(t)\big| \leqslant \beta(t)$ для п. в. $t \in [0; t_{i-1}]$. Исходя из этого предположения, докажем существование функции $x = x_i \in X_{t_i}$, являющейся решением уравнения (3.5) при $j = i$ и удовлетворяющей оценке $\big|x_i(t)\big| \leqslant \beta(t)$ для п. в. $t \in [0; t_i]$.

4. Положим $Y_i = \big\{x \in X_{t_i} \colon \big|x(t)\big| \leqslant \beta(t),\ t \in (t_{i-1}; t_i];\ x(t) = x_{i-1}(t),\ t \in [0; t_{i-1}]\big\}$. Множество Y_i непусто, так как содержит функцию

$$\overline{x}(t) = \begin{cases} x_{i-1}(t), & t \in [0; t_{i-1}], \\ 0, & t \in (t_{i-1}; t_i]. \end{cases}$$

Совершенно аналогично пункту 1 данного доказательства устанавливается, что множество Y_i замкнуто и оператор $G_i \colon Y_i \to Y_i$.

5. Установим сжимаемость оператора G_i на множестве Y_i. Выберем произвольно $x, \widetilde{x} \in \in Y_i$ и положим $z = f[u](x)$, $\widetilde{z} = f[u](\widetilde{x})$, $y = G_i[x] = \mathcal{F}[z]$, $\widetilde{y} = G_i[\widetilde{x}] = \mathcal{F}[\widetilde{z}]$. Согласно лемме 14, условию $\mathbf{F}_3'$), вольтерровости оператора $f[u]$, а также выбору разбиения и числа δ, то есть условию (3.4), получаем:

$$Q\big(\|y-\widetilde{y}\|_{X_{t_i}}\big) \leqslant \|z-\widetilde{z}\|_{X_{t_i}^*} = \big\|f[u](x)-f[u](\widetilde{x})\big\|_{X_{t_i}^*} = \big\|f[u](x)-f[u](\widetilde{x})\big\|_{X_{[t_{i-1};t_i]}^*} \leqslant$$
$$\leqslant Q\Big[R\Big(\big\|\mathcal{N}_3[\beta]\big\|_{L_1[t_{i-1};t_i]}\Big)\|x-\widetilde{x}\|_{X_{t_i}}\Big] \leqslant Q\left(\frac{1}{2}\|x-\widetilde{x}\|_{X_{t_i}}\right).$$

В силу строгой монотонности функции Q, $\big\|G_i[x]-G_i[\widetilde{x}]\big\|_{X_{t_i}} = \|y-\widetilde{y}\|_{X_{t_i}} \leqslant \dfrac{1}{2}\|x-\widetilde{x}\|_{X_{t_i}}$. По принципу сжимающих отображений заключаем, что уравнение (3.5) при $j = i$ имеет единственное решение в множестве Y_i.

6. По индукции делаем вывод, что уравнение (3.5) при $j = k$ имеет решение $x = x_k \in X$, удовлетворяющее оценке: $\big|x(t)\big| \leqslant \beta(t)$ при п. в. $t \in [0; t_k = T]$. Остается заметить, что x является решением уравнения (1.3), и поскольку оператор G действует в W, то $x \in W$. Так как $W \subset \mathbf{C}(0,T;H)$, то указанная выше оценка выполняется для всех $t \in [0;T]$. □

§ 4. Случай совпадения тройки пространств

В этом параграфе будем считать, что выполняется равенство $V = H = V^*$. За счет этого упрощается оценка решения $|x(t)|$ уравнения (3.1) и можно отказаться от требований компактности и условий $\mathbf{A}_1$), $\mathbf{A}_2$). В данном случае естественно считать, что $p_0 = p$, $X = L_p(0, T; H)$, $q_0 = q$, $X^* = L_q(0, T; H)$.

Лемма 15. *Пусть* $t \in [0; T]$, $z_i \in X_t^*$, $x_i = \mathcal{F}_{[0;t]}[z_i]$, $i = 1, 2$. *Тогда*

$$\|x_1 - x_2\|_{\mathbf{C}(0,t;H)} \leqslant 2 \int\limits_0^t \big|z_1(s) - z_2(s)\big|\, ds.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Непосредственно из леммы 7 получаем:

$$\frac{1}{2}\big|x_1(t) - x_2(t)\big|^2 \leqslant \int\limits_0^t \big|z_1(s) - z_2(s)\big|\,\big|x_1(s) - x_2(s)\big|\, ds \leqslant \int\limits_0^t \big|z_1(s) - z_2(s)\big|\, ds \|x_1 - x_2\|_{\mathbf{C}(0,t;H)},$$

откуда сразу следует доказываемое неравенство. □

Лемма 16. *Пусть* $t \in [0; T]$, $z \in X_t^*$, $x = \mathcal{F}_{[0;t]}[z]$. *Тогда*

$$\|x - a\|_{\mathbf{C}(0,t;H)} \leqslant 2 \int\limits_0^t \big|z(s) - Aa\big|\, ds \quad \Rightarrow \quad \|x\|_{\mathbf{C}(0,t;H)} \leqslant |a| + 2 \int\limits_0^t \big|z(s) - Aa\big|\, ds.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно взять $x_1 = x$, $z_1 = z$, $x_2 = a$, $z_2 = Aa$ и воспользоваться леммой 15. □

Сформулируем условия на правую часть, считая, что для всех $u \in U$ имеем:

$$f[u]\colon \mathbf{C}(0, T; H) \to X^* = L_q(0, T; H).$$

$\mathbf{F}_4$) Для всех $u \in U$, $x \in \mathbf{C}(0, T; H)$, $|x(t)| \leqslant \beta(t)$ при произвольной функции $\beta \in \mathbf{C}[0; T]$ имеем: $\big|(f[u]x)(t) - Aa\big| \leqslant \mathcal{N}_4[\beta](t)$ при п. в. $t \in [0; T]$; $\mathcal{N}_4[\beta] \in L_1[0; T]$.

$\mathbf{F}_5$) Для всех $u \in U$, $x, y \in \mathbf{C}(0, T; H)$, $|x(t)| \leqslant \beta(t)$, $|y(t)| \leqslant \beta(t)$ при произвольной функции $\beta \in \mathbf{C}[0; T]$ имеем: $\big|(f[u]x)(t) - (f[u]y)(t)\big| \leqslant \mathcal{N}_5[\beta](t)\big|x(t) - y(t)\big|$ при п. в. $t \in [0; T]$; $\mathcal{N}_5[\beta] \in L_1[0; T]$.

Теорема 4. *Пусть выполнено условие* $\mathbf{F}_5$). *Тогда для всякого* $u \in U$ *уравнение* (1.3) *имеет не более одного решения.*

Доказательство теоремы 4 см. далее в этом параграфе.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия* $\mathbf{F}_4$), $\mathbf{F}_5$). *Предположим, что функционально-интегральное неравенство*

$$|a| + 2 \int\limits_0^t \mathcal{N}_4[\beta](s)\, ds \leqslant \beta(t), \quad t \in [0; T], \tag{4.1}$$

имеет решение $\beta \in \mathbf{C}[0; T]$. *Тогда для всякого* $u \in U$ *уравнение* (1.3) *имеет решение* $x = x[u] \in W$, *удовлетворяющее оценке:* $\big|x(t)\big| \leqslant \beta(t)$ *для всех* $t \in [0; T]$.

Доказательство теоремы 5 см. далее в этом параграфе. Перейдем к доказательствам.

Доказательство теоремы 4. Рассуждая от противного, предположим, что нашлись два решения $x = x_1$, $x = x_2$. Положим $\eta = x_2 - x_1$, $z_i = f[u](x_i)$, $i = 1,2$, $M = \max\big\{\|x_i\|_{\mathbf{C}(0,T;H)}, i = 1,2\big\}$. Пусть число $\delta > 0$ таково, что (с учетом абсолютной непрерывности интеграла Лебега) выполняется неравенство

$$2\int\limits_h \mathcal{N}_5[M](t)\,dt \leqslant \frac{1}{2} \tag{4.2}$$

при любом измеримом $h \subset [0;T]$, $\operatorname{mes} h \leqslant \delta$. Выберем произвольное разбиение отрезка $[0;T]$: $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = T$, $t_i - t_{i-1} \leqslant \delta$, $i = \overline{1,k}$. Согласно лемме 15 и условию $\mathbf{F}_5$), а также выбору разбиения и числа δ, то есть условию (4.2), получаем:

$$\|\eta\|_{\mathbf{C}(0,t_1;H)} \leqslant 2\int\limits_0^{t_1} \mathcal{N}_5[M](s)\,ds\|\eta\|_{\mathbf{C}(0,t_1;H)} \leqslant \frac{1}{2}\|\eta\|_{\mathbf{C}(0,t_1;H)}.$$

Таким образом, $\dfrac{1}{2}\|\eta\|_{\mathbf{C}(0,t_1;H)} \leqslant 0$, то есть $\|\eta\|_{\mathbf{C}(0,t_1;H)} = 0$. Предположим, мы уже доказали, что $\|\eta\|_{\mathbf{C}(0,t_{i-1};H)} = 0$. Опять же, согласно лемме 15 и условию $\mathbf{F}_5$), вольтерровости оператора $f[u]$ и предположению индукции (откуда $z_1(t) = z_2(t)$ при $t \in [0;t_{i-1}]$), а также выбору разбиения и числа δ, то есть условию (4.2), получаем:

$$\|\eta\|_{\mathbf{C}(0,t_i;H)} \leqslant 2\int\limits_0^{t_i} \big|z_1(s) - z_2(s)\big|\,ds = 2\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \big|z_1(s) - z_2(s)\big|\,ds =$$

$$= 2\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \big|f[u](x_1)(s) - f[u](x_2)(s)\big|\,ds \leqslant 2\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \mathcal{N}_5[M](s)\,ds\|\eta\|_{\mathbf{C}(0,t_i;H)} \leqslant \frac{1}{2}\|\eta\|_{\mathbf{C}(0,t_i;H)}.$$

Таким образом, $\dfrac{1}{2}\|\eta\|_{\mathbf{C}(0,t_i;H)} \leqslant 0$, то есть $\|\eta\|_{\mathbf{C}(0,t_i;H)} = 0$. По индукции, делаем вывод, что $\|\eta\|_{\mathbf{C}(0,T;H)} = 0$, то есть $x_1(t) = x_2(t)$ для всех $t \in [0;T]$. □

Доказательство теоремы 5. Зафиксируем произвольно $u \in U$ и покажем, что уравнение (1.3) имеет решение. Для этого достаточно доказать разрешимость уравнения

$$x = G[x], \quad x \in \mathbf{C}(0,T;H), \tag{4.3}$$

где $G = \mathcal{F}\big(f[u](x)\big) : \mathbf{C}(0,T;H) \to \mathbf{C}(0,T;H)$. Пусть число $\delta > 0$ таково, что (с учетом абсолютной непрерывности интеграла Лебега) выполняется неравенство (4.2) при любом измеримом $h \subset [0;T]$, $\operatorname{mes} h \leqslant \delta$. Выберем произвольное разбиение отрезка $[0;T]$ вида: $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = T$, $t_i - t_{i-1} \leqslant \delta$, $i = \overline{1,k}$. Используя вольтерровость оператора G, будем рассматривать локальные аналоги уравнения (4.3):

$$x = G_j[x], \quad x \in \mathbf{C}(0,t_j;H), \quad G_j = G_{[0;t_j]}, \quad j \in \overline{1,k}. \tag{4.4}$$

Разрешимость уравнений (4.4) будем доказывать индукцией по $j = \overline{1,k}$. Дальнейшее доказательство проведем в несколько этапов.

1. Положим $Y_1 = \big\{x \in \mathbf{C}(0,t_1;H) \colon \big|x(t)\big| \leqslant \beta(t),\ t \in [0;t_1]\big\}$. Очевидно, что множество Y_1 замкнуто в $\mathbf{C}(0,t_1;H)$. Множество Y_1 не пусто, так как содержит $0 \in X_{t_1}$.

Докажем, что $G_1\colon Y_1 \to Y_1$. Выберем произвольно $x \in Y_1$ и рассмотрим $y = G_1[z]$, $z = f[u](x) \in X^*_{t_1}$. Зафиксируем произвольно $t \in [0; t_1]$.

Непосредственно из леммы 16 для каждого $t \in [0; t_1]$ получаем:

$$\|y\|_{\mathbf{C}(0,t;H)} \leqslant |a| + 2\int_0^t \bigl|z(s) - Aa\bigr|\,ds.$$

Пользуясь определением множества Y_1 и условием $\mathbf{F}_4$), находим

$$\bigl|z(s) - Aa\bigr| = \bigl|(f[u]x)(s) - Aa\bigr| \leqslant \mathcal{N}_4[\beta](s),$$

откуда, с учетом соотношения (4.1), $\bigl|y(t)\bigr| \leqslant |a| + 2\int_0^t \mathcal{N}_4[\beta](s)\,ds \leqslant \beta(t)$. Таким образом, $G_1\colon Y_1 \to Y_1$.

2. Установим сжимаемость оператора G_1 на множестве Y_1. Выберем произвольно $x, \widetilde{x} \in Y_1$ и положим $z = f[u](x),\ \widetilde{z} = f[u](\widetilde{x}),\ y = G_1[x] = \mathcal{F}[z],\ \widetilde{y} = G_1[\widetilde{x}] = \mathcal{F}[\widetilde{z}]$. Согласно лемме 15, условию $\mathbf{F}_5$) и выбору разбиения и числа δ, то есть условию (4.2),

$$\bigl\|G_1[x] - G_1[\widetilde{x}]\bigr\|_{\mathbf{C}(0,t_1;H)} \leqslant 2\int_0^{t_1} \mathcal{N}_5[M](s)\,ds \|x - \widetilde{x}\|_{\mathbf{C}(0,t_1;H)} \leqslant \frac{1}{2}\|x - \widetilde{x}\|_{\mathbf{C}(0,t_1;H)}.$$

По принципу сжимающих отображений заключаем, что уравнение (4.4) при $j = 1$ имеет единственное решение в множестве Y_1.

3. Действуя по индукции, предположим, что мы уже доказали существование функции $x = x_{i-1} \in \mathbf{C}(0, t_{i-1}; H)$, являющейся решением уравнения (4.4) при $j = i-1$ и удовлетворяющей оценке $\bigl|x_{i-1}(t)\bigr| \leqslant \beta(t)$ для всех $t \in [0; t_{i-1}]$. Исходя из этого предположения, докажем существование функции $x = x_i \in \mathbf{C}(0, t_i; H)$, являющейся решением уравнения (4.4) при $j = i$ и удовлетворяющей оценке $\bigl|x_i(t)\bigr| \leqslant \beta(t)$ для всех $t \in [0; t_i]$.

4. Положим $Y_i = \bigl\{x \in \mathbf{C}(0, t_i; H)\colon \bigl|x(t)\bigr| \leqslant \beta(t),\ t \in (t_{i-1}; t_i];\ x\big|_{[0;t_{i-1}]} = x_{i-1}\bigr\}$. Очевидно, Y_i замкнуто в $\mathbf{C}(0, t_i; H)$. Покажем, что множество Y_i непусто. Рассмотрим функцию

$$\overline{x}(t) = \begin{cases} x_{i-1}(t), & t \in [0; t_{i-1}], \\ \sigma(t)x_{i-1}(t_{i-1}), & t \in (t_{i-1}; t_i], \end{cases}$$

где $\sigma(t)$ — неотрицательная, непрерывная на $[t_{i-1}; t_i]$ функция такая, что

$$\sigma(t_{i-1}) = 1, \quad \sigma(t)\beta(t_{i-1}) \leqslant \beta(t) \quad \forall\, t \in (t_{i-1}; t_i].$$

В частности, если $\beta(t_{i-1}) = 0$, то ясно, что $x(t_{i-1}) \equiv 0$, и можно взять $\sigma(t) \equiv 0$. Если же $\beta(t_{i-1}) > 0$, то можно взять $\sigma(t) = \dfrac{\beta(t)}{\beta(t_{i-1})}$, $t \in [t_{i-1}; t_i]$. Таким образом, $\overline{x} \in Y_i$. Совершенно аналогично пункту 1 данного доказательства получаем, что $G_i\colon Y_i \to Y_i$.

5. Установим сжимаемость оператора G_i на множестве Y_i. Выберем произвольно $x, \widetilde{x} \in Y_i$ и положим $z = f[u](x),\ \widetilde{z} = f[u](\widetilde{x}),\ y = G_i[x] = \mathcal{F}[z],\ \widetilde{y} = G_i[\widetilde{x}] = \mathcal{F}[\widetilde{z}]$. Опять же, согласно лемме 15 и условию $\mathbf{F}_5$), вольтерровости оператора $f[u]$ и определению множества Y_i (откуда $z_1(t) = z_2(t)$ при $t \in [0; t_{i-1}]$), а также выбору разбиения и числа δ, то есть

условию (4.2), получаем:

$$\|y-\widetilde{y}\|_{\mathbf{C}(0,t_i;H)} \leqslant 2\int\limits_0^{t_i}\big|z(s)-\widetilde{z}(s)\big|\,ds = 2\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}\big|z(s)-\widetilde{z}(s)\big|\,ds \leqslant$$

$$\leqslant 2\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}\mathcal{N}_5[M](s)\,ds\|\,x(s)-\widetilde{x}(s)\|_{\mathbf{C}(0,t_i;H)} \leqslant \frac{1}{2}\|\,x(s)-\widetilde{x}(s)\|_{\mathbf{C}(0,t_i;H)}.$$

Таким образом, $\big\|G_i[x]-G_i[\widetilde{x}]\big\|_{\mathbf{C}(0,t_i;H)} = \|y-\widetilde{y}\|_{\mathbf{C}(0,t_i;H)} \leqslant \dfrac{1}{2}\|x-\widetilde{x}\|_{\mathbf{C}(0,t_i;H)}$.

По принципу сжимающих отображений заключаем, что уравнение (4.4) при $j=i$ имеет единственное решение в множестве Y_i.

6. По индукции, уравнение (4.4) при $j=k$ имеет решение $x=x_k\in\mathbf{C}(0,T;H)$, удовлетворяющее оценке: $\big|x(t)\big|\leqslant\beta(t)$ при всех $t\in[0;t_k=T]$. Остается заметить, что x является решением уравнения (1.3), и поскольку оператор G действует в W, то $x\in W$. □

§ 5. Достаточные условия компактного вложения

В § 2 мы использовали предположение о компактном вложении

$$W=\big\{x\in X\colon x'\in X^*\big\}\subset L_p(0,T;H).$$

Предположим, что $p_0=p$, $q_0=q$. Тогда $X=L_p(0,T;V)$, $X^*=L_q(0,T;V^*)$. В этом случае для установления компактности можно воспользоваться известной теоремой Лионса–Темама (J.L.Lions–R.Temam), см., например, [11, глава 1, теорема 5.1, с. 70].

Лемма 17. *Пусть $V,\widetilde{V}$ — рефлексивные банаховы пространства, H — банахово пространство, $V\subset H$ компактно, $H\subset\widetilde{V}$ непрерывно, $p,q\in(1;+\infty)$. Тогда пространство*

$$W=\big\{z\in L_p(0,T;V)\colon z'\in L_q(0,T;\widetilde{V})\big\}$$

с нормой $\|z\|_W=\|z\|_{L_p(0,T;V)}+\|z'\|_{L_q(0,T;\widetilde{V})}$ является рефлексивным банаховым пространством, непрерывно вложенным в $\mathbf{C}(0,T;\widetilde{V})$ и компактно вложенным в $L_p(0,T;H)$.

В свою очередь, чтобы установить компактное вложение $V\subset H$, в случае соболевского пространства V, можно воспользоваться следующим вариантом теоремы Реллиха–Кондрашова, [20, § I.11.5, с. 106].

Лемма 18. *Если $1<p<\infty$, $n\geqslant\ell p$, $q<\dfrac{np}{n-\ell p}$, область $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ представляет объединение конечного числа ограниченных областей, каждая из которых звездна относительно своего шара, то вложение $W_p^\ell(\Omega)\subset L_q(\Omega)$ компактно.*

О других вариантах см., например, [21, § 3.5, с. 82]. Что касается рефлексивности, справедливо следующее утверждение [21, § 2.2, теорема 2.4, с. 30].

Лемма 19. *Пространство $W_p^\ell(\Omega)$ банахово при $1\leqslant p\leqslant\infty$, рефлексивно при $1<p<\infty$, сепарабельно при $1\leqslant p<\infty$ и гильбертово при $p=2$ относительно скалярного произведения $(x,y)=\sum\limits_{0\leqslant|\alpha|\leqslant\ell}(D^\alpha x,D^\alpha y)$.*

§ 6. Примеры

Следуя [10, § VI.1.3, с. 257], рассмотрим следующие примеры операторов, удовлетворяющих предположениям § 1. Пусть $\{A(t)\}$, $t \in [0;T]$ — семейство радиально непрерывных монотонных операторов $V \to V^*$ таких, что

$$\big(A(t)x, y\big) \text{ измерима по } t \in [0;T] \quad \forall\, x, y \in V; \tag{6.1}$$

$$\big(A(t)x, x\big) \geqslant c\|x\|^p - d, \quad c > 0, \quad 1 < p < \infty;$$
$$\big\|A(t)x\big\|_V \leqslant C\big(\|x\|^{p-1} + 1\big), \tag{6.2}$$

где константы c, d, C не зависят от t. Как указано в [10, § VI.1.3, с. 257], можно показать, что функция $A(t)x(t)$ при всех $x \in L_p(0,T;V)$ измерима по Бохнеру и принадлежит пространству $L_q(0,T;V^*)$. Выберем $p_0 = p$, $q_0 = q$. Тогда можно взять $X = L_p(0,T;V)$, и соответственно, $X^* = L_q(0,T;V^*)$. Как указано в [10, § VI.1.3, с. 257], оператор $A\colon X \to X^*$ удовлетворяет предположениям § 1, и в частности, леммы 1. Там же приведены примеры конкретных семейств операторов со свойствами (6.1)–(6.2). В частности, можно взять $V = \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$, $H = L_2(\Omega)$;

$$\big(A(t)x, y\big) = \int\limits_{\Omega} \varphi\big(t, |\nabla x|^{p-1}\big)\, |\nabla y|^{p-2} \nabla x \nabla y\, d\xi, \quad x, y \in V,$$

где φ — произвольная непрерывная функция на $[0;T] \times [0;\infty)$, для которой выполняются условия: a) $\varphi(t,s)s$ возрастает по s; b) $0 < c \leqslant \varphi(t,s) \leqslant C$ $\forall\, (t,s) \in [0;T] \times [0;\infty)$.

Если к оператору A прибавить линейный коэрцитивный оператор $B\colon X \to X^*$, $\langle Bx, x\rangle \geqslant \gamma_B\|x\|_X^2$, то сумма $A + B$ будет удовлетворять условиям $\mathbf{A}_1$), $\mathbf{A}_2$) (здесь будет $d = 0$). Можно взять исходное уравнение (1.3) и к обеим частям прибавить Bx — тем самым, просто модифицируется правая часть.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чернов А. В. О тотальном сохранении разрешимости управляемого уравнения типа Гаммерштейна с неизотонным и немажорируемым оператором // Известия высших учебных заведений. Математика. 2017. № 6. С. 83–94. http://mi.mathnet.ru/ivm9252
2. Чернов А. В. Об одном мажорантном признаке тотального сохранения глобальной разрешимости управляемого функционально-операторного уравнения // Известия высших учебных заведений. Математика. 2011. № 3. С. 95–107. http://mi.mathnet.ru/ivm7249
3. Калантаров В. К., Ладыженская О. А. О возникновении коллапсов для квазилинейных уравнений параболического и гиперболического типов // Записки научных семинаров ЛОМИ. 1977. Т. 69. С. 77–102. http://mi.mathnet.ru/znsl1983
4. Сумин В. И. Об обосновании градиентных методов для распределенных задач оптимального управления // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1990. Т. 30. № 1. С. 3–21. http://mi.mathnet.ru/zvmmf3318
5. Сумин В. И. Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами. Ч. 1. Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 1992.
6. Лионс Ж.-Л. Управление сингулярными распределенными системами. М.: Наука, 1987.
7. Фурсиков А. В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. Новосибирск: Научная книга, 1999.
8. Плотников В. И., Сумин В. И. Оптимизация распределенных систем в лебеговом пространстве // Сибирский математический журнал. 1981. Т. 22. № 6. С. 142–161. http://mi.mathnet.ru/smj6526

9. Чернов А. В. О сходимости метода условного градиента в распределенных задачах оптимизации // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2011. Т. 51. № 9. С. 1616–1629. http://mi.mathnet.ru/zvmmf9539
10. Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978.
11. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
12. Kobayashi T., Pecher H., Shibata Y. On a global in time existence theorem of smooth solutions to a nonlinear wave equation with viscosity // Mathematische Annalen. 1993. Vol. 296. No 1. P. 215–234. https://doi.org/10.1007/BF01445103
13. Lu G. Global existence and blow-up for a class of semilinear parabolic systems: a Cauchy problem // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. 1995. Vol. 24. No. 8. P. 1193–1206. https://doi.org/10.1016/0362-546X(94)00190-S
14. Cavalcanti M. M., Domingos Cavalcanti V. N., Soriano J. A. On existence and asymptotic stability of solutions of the degenerate wave equation with nonlinear boundary conditions // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2003. Vol. 281. No. 1. P. 108–124. https://doi.org/10.1016/S0022-247X(02)00558-9
15. Saito H. Global solvability of the Navier–Stokes equations with a free surface in the maximal L_p-L_q regularity class // Journal of Differential Equations. 2018. Vol. 264. No. 3. P. 1475–1520. https://doi.org/10.1016/j.jde.2017.09.045
16. Чернов А. В. О тотально глобальной разрешимости эволюционного уравнения с неограниченным оператором // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2021. Т. 31. Вып. 2. С. 331–349. https://doi.org/10.35634/vm210212
17. Zeidler E. Nonlinear functional analysis and its applications. II/B: Nonlinear monotone operators. New York: Springer, 1990. https://zbmath.org/?q=an:0684.47029
18. Вулих Б. З. Краткий курс теории функций вещественной переменной. М.: Наука, 1973.
19. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1984.
20. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.
21. Павлова М. Ф., Тимербаев М. Р. Пространства Соболева (теоремы вложения). Казань: КГУ, 2010.

Поступила в редакцию 07.09.2021

Принята к публикации 05.01.2022

Чернов Андрей Владимирович, к. ф.-м. н., доцент, Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, 603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23;
Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева, 603950, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Минина, 24.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1464-8249
E-mail: chavnn@mail.ru

Цитирование: А. В. Чернов. О тотально глобальной разрешимости эволюционного уравнения с монотонным нелинейным оператором // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2022. Т. 32. Вып. 1. С. 130–149.

VESTNIK UDMURTSKOGO UNIVERSITETA. MATEMATIKA. MEKHANIKA. KOMP'UTERNYE NAUKI

MATHEMATICS 2022. Vol. 32. Issue 1. Pp. 130–149.

A. V. Chernov

On totally global solvability of evolutionary equation with monotone nonlinear operator

Keywords: strongly nonlinear evolutionary equation in a Banach space, monotone nonlinear operator, totally global solvability.

MSC2020: 47J05, 47J35, 47N10

DOI: 10.35634/vm220109

Let V be a separable reflexive Banach space being embedded continuously in a Hilbert space H and dense in it; $X = L_p(0,T;V) \cap L_{p_0}(0,T;H)$; U be a given set of controls; $A\colon X \to X^*$ be a given Volterra operator which is radially continuous, monotone and coercive (and, generally speaking, nonlinear). For the Cauchy problem associated with controlled evolutionary equation as follows

$$x' + Ax = f[u](x), \quad x(0) = a \in H; \quad x \in W = \{x \in X \colon x' \in X^*\},$$

where $u \in U$ is a control, $f[u]\colon \mathbf{C}(0,T;H) \to X^*$ is Volterra operator ($W \subset \mathbf{C}(0,T;H)$), we prove totally (with respect to a set of admissible controls) global solvability subject to global solvability of some functional integral inequality in the space $\mathbb{R}$. In many particular cases the above inequality may be realized as the Cauchy problem associated with an ordinary differential equation. In fact, a similar result proved by the author earlier for the case of linear operator A and identity $V = H = V^*$ is developed. Separately, we consider the cases of compact embedding of spaces, strengthening of the monotonicity condition and coincidence of the triplet of spaces $V = H = H^*$. As to the last two cases, we prove also the uniqueness of the solution. In the first case we use Schauder theorem and in the last two cases we apply the technique of continuation of solution along with the time axis (i. e., continuation along with a Volterra chain). Finally, we give some examples of an operator A satisfying our conditions.

REFERENCES

1. Chernov A. V. On total preservation of solvability of controlled Hammerstein-type equation with non-isotone and non-majorizable operator, *Russian Mathematics*, 2017, vol. 61, no. 6, pp. 72–81. https://doi.org/10.3103/S1066369X1706010X
2. Chernov A. V. A majorant criterion for the total preservation of global solvability of controlled functional operator equation, *Russian Mathematics*, 2011, vol. 55, no. 3, pp. 85–95. https://doi.org/10.3103/S1066369X11030108
3. Kalantarov V. K., Ladyzhenskaya O. A. The occurrence of collapse for quasilinear equations of parabolic and hyperbolic types, *Journal of Soviet Mathematics*, 1978, vol. 10, no. 1, pp. 53–70. https://doi.org/10.1007/BF01109723
4. Sumin V. I. The features of gradient methods for distributed optimal-control problems, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1990, vol. 30, no. 1, pp. 1–15. https://doi.org/10.1016/0041-5553(90)90002-A
5. Sumin V. I. *Funktsional'nye vol'terrovy uravneniya v teorii optimal'nogo upravleniya raspredelennymi sistemami. Chast' I* (Functional Volterra equations in the theory of optimal control of distributed systems. Part I), Nizhny Novgorod: N. I. Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, 1992.
6. Lions J.-L. *Contrôle des systèmes distribués singuliers*, Paris: Gauthier-Villars, 1983. https://zbmath.org/?q=an:0514.93001
7. Fursikov A. V. *Optimal control of distributed systems. Theory and applications*, Providence, RI: American Mathematical Society, 2000. https://zbmath.org/?q=an:1027.93500
8. Plotnikov V. I., Sumin V. I. Optimization of distributed systems in Lebesgue space, *Siberian Mathematical Journal*, 1981, vol. 22, no. 6, pp. 913–929. https://doi.org/10.1007/BF00968060
9. Chernov A. V. On the convergence of the conditional gradient method in distributed optimization problems, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2011, vol. 51, no. 9, pp. 1510–1523. https://doi.org/10.1134/S0965542511090077

10. Gajewski H., Gröger K., Zacharias K. *Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen*, Berlin: Akademie-Verlag, 1974. https://zbmath.org/?q=an:0289.47029
11. Lions J.-L. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Paris: Dunod, 1969. https://zbmath.org/?q=an:0189.40603
12. Kobayashi T., Pecher H., Shibata Y. On a global in time existence theorem of smooth solutions to a nonlinear wave equation with viscosity, *Mathematische Annalen*, 1993, vol. 296, no. 1, pp. 215–234. https://doi.org/10.1007/BF01445103
13. Lu G. Global existence and blow-up for a class of semilinear parabolic systems: a Cauchy problem, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 1995, vol. 24, no. 8, pp. 1193–1206. https://doi.org/10.1016/0362-546X(94)00190-S
14. Cavalcanti M. M., Domingos Cavalcanti V. N., Soriano J. A. On existence and asymptotic stability of solutions of the degenerate wave equation with nonlinear boundary conditions, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2003, vol. 281, no. 1, pp. 108–124. https://doi.org/10.1016/S0022-247X(02)00558-9
15. Saito H. Global solvability of the Navier–Stokes equations with a free surface in the maximal L_p-L_q regularity class, *Journal of Differential Equations*, 2018, vol. 264, no. 3, pp. 1475–1520. https://doi.org/10.1016/j.jde.2017.09.045
16. Chernov A. V. On totally global solvability of evolutionary equation with unbounded operator, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2021, vol. 31, issue 2, pp. 331–349 (in Russian). https://doi.org/10.35634/vm210212
17. Zeidler E. *Nonlinear functional analysis and its applications. II/B: Nonlinear monotone operators*, New York: Springer, 1990. https://zbmath.org/?q=an:0684.47029
18. Vulikh B. Z. *Kurzer Lehrgang der Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen*, Moscow: Nauka, 1965. https://zbmath.org/?q=an:0142.30203
19. Kantorovich L. V., Akilov G. P. *Functional analysis*, Oxford: Pergamon Press, 1982. https://zbmath.org/?q=an:0484.46003
20. Sobolev S. L. *Some applications of functional analysis in mathematical physics*, Providence, RI: American Mathematical Society, 1991. https://zbmath.org/?q=an:0732.46001
21. Pavlova M. F., Timerbaev M. R. *Prostranstva Soboleva (teoremy vlozheniya)* (Sobolev spaces (embedding theorems)), Kazan: Kazan Federal University, 2010.

Received 07.09.2021

Accepted 05.01.2022

Andrei Vladimirovich Chernov, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, National Research Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, pr. Gagarina, 23, Nizhny Novgorod, 603950, Russia;
Nizhny Novgorod State Technical University, ul. Minina, 24, Nizhny Novgorod, 603950, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1464-8249
E-mail: chavnn@mail.ru

Citation: A. V. Chernov. On totally global solvability of evolutionary equation with monotone nonlinear operator, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2022, vol. 32, issue 1, pp. 130–149.