МАТЕМАТИКА 2022. Т. 32. Вып. 1. С. 94–106.

УДК 517.977

© *Н. Н. Петров, А. И. Мачтакова*

ГРУППОВОЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЕ В ЗАДАЧЕ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ В КЛАССЕ ПОЗИЦИОННЫХ СТРАТЕГИЙ С ПОВОДЫРЕМ

В конечномерном евклидовом пространстве рассматривается задача преследования группой преследователей одного убегающего, описываемая системой вида

$$D^{(\alpha)}z_i = a_i z_i + u_i - v, \quad u_i, v \in V,$$

где $D^{(\alpha)}f$ — производная по Капуто порядка $\alpha \in (0,1)$ функции f. Множество V допустимых управлений — выпуклый компакт, a_i — неположительные вещественные числа. Целью группы преследователей является поимка убегающего. Терминальные множества — начало координат. Получены достаточные условия поимки одного убегающего в классе квазистратегий. Вводится вспомогательная игра, при помощи которой получены достаточные условия поимки убегающего в классе позиционных стратегий с поводырем.

Ключевые слова: дифференциальная игра, групповое преследование, преследователь, убегающий, система с поводырем.

DOI: 10.35634/vm220107

Введение

К настоящему времени [1–12] предложены различные формализации дифференциальной игры, которые различаются, в частности, принимаемой в них информированностью игроков. Во многих работах [10–15], посвященных задачам группового преследования, предполагается, что все преследователи в каждый момент времени знают управление убегающего либо в данный момент времени, либо на всем промежутке течения игры вплоть до заданного момента, то есть преследователи знают предысторию игры. Данная формализация конфликтного взаимодействия не всегда является естественной. Наиболее реальным является предположение о знании фазовых координат участников и использование участниками игры позиционных стратегий. Использование позиционных стратегий приводит к значительным трудностям в исследовании задач группового преследования.

В работе [8] рассматривалась игра двух лиц, для анализа которой была введена вспомогательная дифференциальная игра (система-поводырь), по движению которой преследователь в некоторые фиксированные моменты времени корректировал свою траекторию по реализовавшимся в данный момент времени позициям исходной и вспомогательной игр. Во вспомогательной игре преследователь строил свое управление, зная управление убегающего. В работе [16] в классе позиционных стратегий с поводырем рассматривалась дифференциальная игра двух лиц с дробными производными. В работе [17] система-поводырь была применена для исследования задачи простого группового преследования, в работе [18] — для исследования задачи группового преследования в линейной стационарной дифференциальной игре, а в работе [19] — для задачи преследования в линейных рекуррентных дифференциальных играх.

В данной работе рассматривается линейная задача группового преследования с дробными производными, для которой получены условия разрешимости задачи преследования как в классе квазистратегий, так и в классе позиционных стратегий с поводырем.

§ 1. Постановка задачи

Определение 1. Пусть $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}^k$ — абсолютно непрерывная функция, $\alpha \in (0,1)$. *Производной по Капуто* порядка α функции f называется функция $D^{(\alpha)}f$ вида

$$(D^{(\alpha)}f)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t \frac{f'(s)}{(t-s)^\alpha}\,ds, \quad \text{где } \Gamma(\beta) = \int_0^\infty e^{-s}s^{\beta-1}\,ds.$$

В пространстве $\mathbb{R}^k$ ($k \geqslant 2$) рассматривается дифференциальная игра $G(n+1)$ $n+1$ лиц: n преследователей $P_1,\ldots,P_n$ и убегающего E, описываемая системой вида

$$D^{(\alpha)}z_i = a_i z_i + u_i - v, \quad z_i(0) = z_i^0, \quad u_i, v \in V. \tag{1.1}$$

Здесь $z_i, u_i, v \in \mathbb{R}^k$, V — выпуклый компакт $\mathbb{R}^k$, $a_i \in \mathbb{R}^1$, $i \in I = \{i,\ldots,n\}$.

Одновременно будем рассматривать вспомогательную игру $\widetilde{G}(n+1)$, в которой участвуют преследователи $\widetilde{P}_1,\ldots,\widetilde{P}_n$ и убегающий $\widetilde{E}$, которая описывается системой вида

$$D^{(\alpha)}w_i = a_i w_i + \widetilde{u}_i - \widetilde{v}, \quad w_i(0) = w_i^0, \quad \widetilde{u}_i, \widetilde{v} \in V. \tag{1.2}$$

Измеримая функция $v : [0,\infty) \to \mathbb{R}^k$ называется допустимой, если $v(t) \in V$ для всех $t \geqslant t_0$. Назовем предысторией $v_t(\cdot)$ функции v в момент t, $t \in [0,\infty)$, сужение функции v на отрезок $[0,t]$.

Определение 2. *Квазистратегией* $\widetilde{U}_i$ преследователя $\widetilde{P}_i$ в игре $\widetilde{G}(n+1)$ называется отображение $\widetilde{U}_i(t, w_1^0,\ldots,w_n^0, \widetilde{v}_t(\cdot))$, ставящее в соответствие моменту t, начальному состоянию $w^0 = (w_1^0,\ldots,w_n^0)$ и произвольной предыстории управления $\widetilde{v}_t(\cdot)$ убегающего $\widetilde{E}$ измеримую функцию $\widetilde{u}_i(t)$ со значениями в V.

Определение 3. *Квазистратегией* $\mathcal{U}_i$ преследователя P_i в игре $G(n+1)$ называется отображение $U_i(t, z_1^0,\ldots,z_n^0, v_t(\cdot))$, ставящее в соответствие моменту t, начальному состоянию $z^0 = (z_1^0,\ldots,z_n^0)$ и произвольной предыстории управления $v_t(\cdot)$ убегающего E измеримую функцию $u_i(t)$ со значениями в V.

Определим далее позиционные стратегии с поводырем на отрезке $[0,T]$ преследователей $P_1, \ldots, P_n$ в игре $G(n+1)$.

Пусть $\Delta = \{0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_r = T\}$ — разбиение отрезка $[0,T]$. На промежутке $[\tau_0,\tau_1]$ выбираем постоянное управление преследователей P_i, $i \in I$,

$$u_i^0(t) = U_i(z_i^0, w_i^0, i \in I), \quad t \in [\tau_0,\tau_1].$$

Выбранное управление $u_i^0(t)$ в паре с некоторым управлением $v(t)$, $t \in [\tau_0,\tau_1]$, убегающего E порождает движение $z_i(t)$, $t \in [\tau_0,\tau_1]$, системы (1.1) на $[\tau_0,\tau_1]$.

На отрезке $[\tau_0,\tau_1]$ в системе (1.2) задаем управление $\widetilde{v}(t)$ убегающего $\widetilde{E}$ и квазистратегии $\widetilde{U}_1, \ldots, \widetilde{U}_n$ преследователей $\widetilde{P}_1, \ldots, \widetilde{P}_n$. Тем самым определены функции $w_i(t)$, $i \in I$, — решения системы (1.2) на отрезке $[\tau_0,\tau_1]$.

В момент $t = \tau_1$ по значениям $z_1(\tau_1),\ldots,z_n(\tau_1)$, $w_1(\tau_1),\ldots,w_n(\tau_1)$ выбираем постоянные управления

$$u_i^1(t) = U_i(z_i(\tau_1), w_i(\tau_1), i \in I), \quad t \in [\tau_1,\tau_2],$$

преследователей $P_1, \ldots, P_n$ в игре $G(n+1)$. Выбранные управления $u_i^1(t)$, $i \in I$, преследователей P_i, $i \in I$, в паре с некоторым управлением $v(t)$, $t \in [\tau_1,\tau_2]$, убегающего E порождают движение $z_i(t)$ системы (1.1) на $[\tau_1,\tau_2]$.

На отрезке $[\tau_1, \tau_2]$ в системе (1.2) задаем управление $\widetilde{v}(t)$ убегающего $\widetilde{E}$ и квазистратегии $\widetilde{U}_1, \ldots, \widetilde{U}_n$ преследователей $\widetilde{P}_1, \ldots, \widetilde{P}_n$. Тем самым определены функции $w_i(t)$, $i \in I$, — решения системы (1.2) на отрезке $[\tau_1, \tau_2]$.

Пусть $z_i(\tau_s)$, $w_i(\tau_s)$, $i \in I$, — позиции, в которые пришли система (1.1) и система-поводырь (1.2) в момент $t = \tau_s$. В момент $t = \tau_s$ по значениям $z_i(\tau_s)$, $w_i(\tau_s)$, $i \in I$, выбираем постоянные управления

$$u_i^s(t) = U_i(z_i(\tau_s), w_i(\tau_s), i \in I), \quad t \in [\tau_s, \tau_{s+1}),$$

преследователей P_i, $i \in I$, в игре $G(n+1)$.

В системе (1.2) задаем управления $\widetilde{v}(t)$ убегающего $\widetilde{E}$ и квазистратегии $\widetilde{U}_1, \ldots, \widetilde{U}_n$ преследователей $\widetilde{P}_1, \ldots, \widetilde{P}_n$ на промежутке $[\tau_s, \tau_{s+1})$.

Таким образом, преследователи P_i, $i \in I$, в системе (1.1) строят свои управления пошагово, зная на каждом шаге реальную позицию в игре $G(n+1)$ и позицию игры во вспомогательной игре $\widetilde{G}(n+1)$. Продолжаем данный процесс до момента T.

§ 2. Поимка убегающего в игре $G(n+1)$ в классе квазистратегий

Определение 4. В игре $G(n+1)$ происходит *поимка в классе квазистратегий*, если существуют момент $T_0 > 0$, квазистратегии $\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n$ преследователей $P_1, \ldots, P_n$ такие, что для любой измеримой функции $v(\cdot)$, $v(t) \in V$, $t \in [0, T_0]$, существуют моменты $\tau \in [0, T_0]$, и номер $m \in I$, для которых $z_m(\tau) = 0$.

Введем следующие обозначения. $\operatorname{Int} A$, $\operatorname{co} A$ — соответственно внутренность и выпуклая оболочка множества A, $E_\rho(z, \mu) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{z^k}{\Gamma(k\rho^{-1} + \mu)}$ — обобщенная функция Миттаг–Леффлера, $\rho > 0$, $\mu \in \mathbb{R}^1$, $a = \max\limits_i a_i$,

$$g_i(t, \tau) = (t - \tau)^{\alpha - 1} E_{1/\alpha}(a_i (t - \tau)^\alpha, \alpha), \quad g(t, \tau) = (t - \tau)^{\alpha - 1} E_{1/\alpha}(a (t - \tau)^\alpha, \alpha),$$
$$f_i(t) = E_{1/\alpha}(a_i t^\alpha, 1) z_i^0, \quad \lambda(z, v) = \sup\{\lambda \geqslant 0 \mid -\lambda z \in V - v\}, \quad \delta = \min_{v \in V} \max_i \lambda(z_i^0, v).$$

Лемма 1. *Пусть $a_i \leqslant 0$ для всех $i \in I$, $\delta > 0$. Тогда существует момент $T_1 > 0$ такой, что для любой допустмой функции $v(\cdot)$ найдется номер $l \in I$, для которого справедливо неравенство*

$$E_{1/\alpha}(a_l T_1^\alpha, 1) - \int_0^{T_1} g_l(T_1, s) \lambda(z_l^0, v(s))\, ds \leqslant 0.$$

Доказательство. Пусть $v(\cdot)$ — произвольная допустимая функция. Так как $a \geqslant a_i$ для всех $i \in I$, то для всех $t \geqslant 0$, $s \in [0, t]$, $i \in I$ справедливы неравенства [20]

$$E_{1/\alpha}(a_i (t - \tau)^\alpha, \alpha) \geqslant E_{1/\alpha}(a (t - \tau)^\alpha, \alpha).$$

Следовательно, для всех $t \geqslant 0$, $i \in I$ справедливы неравенства

$$\int_0^t g_i(t, s) \lambda(z_i^0, v(s))\, ds \geqslant \int_0^t g(t, s) \lambda(z_i^0, v(s))\, ds.$$

Из теоремы 4.1.1 [21, с. 101] следует, что $E_{1/\alpha}(z, \mu) \geqslant 0$ для всех $z \in \mathbb{R}^1$, $\mu \geqslant \alpha$. Поэтому справедливы неравенства

$$\max_i \int_0^t g(t, s) \lambda(z_i^0, v(s))\, ds \geqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_0^t g(t, s) \lambda(z_i^0, v(s))\, ds =$$
$$= \frac{1}{n} \int_0^t g(t, s) \sum_{i=1}^n \lambda(z_i^0, v(s))\, ds \geqslant \frac{\delta}{n} \int_0^t g(t, s)\, ds. \tag{2.1}$$

В силу [22, с. 120] справедливо равенство

$$\int_0^t g(t,s)\,ds = t^\alpha E_{1/\alpha}(at^\alpha, \alpha+1).$$

Рассмотрим функции

$$h_i(t, v(\cdot)) = E_{1/\alpha}(a_i t^\alpha, 1) - \frac{\delta}{n} E_{1/\alpha}(at^\alpha, \alpha+1)t^\alpha.$$

Если $a_i < 0$, $a < 0$, то при $t \to +\infty$ справедливы следующие асимптотические оценки [21, (формула 1.2.4)]:

$$E_{1/\alpha}(a_i t^\alpha, 1) = -\frac{1}{a_i t^\alpha \Gamma(1-\alpha)} + O\left(\frac{1}{t^{2\alpha}}\right), \quad E_{1/\alpha}(at^\alpha, \alpha+1) = -\frac{1}{at^\alpha} + O\left(\frac{1}{t^{2\alpha}}\right),$$

где под $O(g)$ при $t \to +\infty$ понимается конкретная функция F такая, что функция F/g является ограниченной на $(A, +\infty)$ при некотором $A > 0$. Поэтому

$$h_i(t, v(\cdot)) = \frac{c_i}{t^\alpha} + \frac{\delta}{na} + O\left(\frac{1}{t^{2\alpha}}\right), \quad \text{где } c_i = -\frac{1}{a_i \Gamma(1-\alpha)},$$

и, следовательно, $\lim\limits_{t\to+\infty} h_i(t, v(\cdot)) < 0$.

Если $a = 0$, то $E_{1/\alpha}(at^\alpha, \alpha+1) = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha+1)}$ для всех $t > 0$. Значит при $a_i < 0$, $a = 0$

$$h_i(t, v(\cdot)) = \frac{c_i}{t^\alpha} - \frac{\delta t^\alpha}{n\Gamma(\alpha+1)} + O\left(\frac{1}{t^{2\alpha}}\right).$$

Отсюда $\lim\limits_{t\to+\infty} h_i(t, v(\cdot)) = -\infty$.

Если $a_i = 0$, то $a = 0$, и тогда

$$h_i(t, v(\cdot)) = 1 - \frac{\delta t^\alpha}{n\Gamma(\alpha+1)}.$$

Следовательно, $\lim\limits_{t\to+\infty} h_i(t, v(\cdot)) = -\infty$. Поэтому существует такое $T > 0$, для которого $h_i(T, v(\cdot)) < 0$ для всех $i \in I$ и любой допустимой функции $v(\cdot)$. Пусть далее $l \in I$ такой, что

$$\max_i \int_0^T g(T,s)\lambda(z_i^0, v(s))\,ds = \int_0^T g(T,s)\lambda(z_l^0, v(s))\,ds.$$

Поэтому в силу (2.1) справедливо неравенство

$$\int_0^T g(T,s)\lambda(z_l^0, v)\,ds \geqslant \frac{\delta}{n} E_{1/\alpha}(aT^\alpha, \alpha+1)T^\alpha.$$

Тогда

$$E_{1/\alpha}(a_l T^\alpha, 1) - \int_0^T g_l(T,s)\lambda(z_l^0, v(s))\,ds \leqslant E_{1/\alpha}(a_l T^\alpha, 1) - \frac{\delta}{n} E_{1/\alpha}(aT^\alpha, \alpha+1)T^\alpha \leqslant 0.$$

Лемма доказана. $\square$

Теорема 1. *Пусть $a_i \leqslant 0$ для всех $i \in I$, $\delta > 0$. Тогда в игре $G(n+1)$ происходит поимка в классе квазистратегий.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим число

$$\widehat{T} = \inf\Big\{t \geqslant 0\colon \sup_{v(\cdot)} \min_i \Big(E_{1/\alpha}(a_i t^\alpha, 1) - \int_0^t g_l(t,s)\lambda(z_i^0, v(s))\, ds\Big) \leqslant 0\Big\}. \tag{2.2}$$

В силу леммы 1, $\widehat{T} < +\infty$. Пусть $v(\cdot)$ — допустимое управление убегающего. Рассмотрим множества

$$T_i(v(\cdot)) = \{t \geqslant 0\colon E_{1/\alpha}(a_i \widehat{T}^\alpha, 1) - \int_0^t g_i(\widehat{T}, s)\lambda(z_i^0, v(s))\, ds \leqslant 0\}.$$

Пусть далее

$$t_i^*(v(\cdot)) = \begin{cases} \inf\{t\colon t \in T_i(v(\cdot))\}, & \text{если } T_i(v(\cdot)) \neq \varnothing, \\ +\infty, & \text{если } T_i(v(\cdot)) = \varnothing. \end{cases}$$

Задаем управления преследователей $P_i, i \in I$ следующим образом. Если $t_i^*(v(\cdot)) < \widehat{T}$, то полагаем

$$u_i(t) = \begin{cases} v(t) - \lambda(z_i^0, v(t))z_i^0, & t \in [0, t_i^*(v(\cdot))], \\ v(t), & t \in (t_i^*(v(\cdot)), \widehat{T}]. \end{cases}$$

Если $t_i^*(v(\cdot)) \geqslant \widehat{T}$, то полагаем

$$u_i(t) = v(t) - \lambda(z_i^0, v(t))z_i^0, \quad t \in [0, \widehat{T}].$$

Решение задачи Коши для системы (1.1) имеет вид [23]

$$z_i(t) = E_{1/\alpha}(a_i t^\alpha, 1)z_i^0 + \int_0^t g_i(t,s)\big(u_i(s) - v(s)\big)\, ds.$$

Отсюда

$$z_i(\widehat{T}) = \Big(E_{1/\alpha}(a_i \widehat{T}^\alpha, 1) - \int_0^{\widehat{T}} g_i(\widehat{T}, s)\lambda(z_i^0, v(s))\, ds\Big) z_i^0.$$

Из леммы 1 следует, что существует номер $l \in I$, для которого $z_l(\widehat{T}) = 0$. Теорема доказана. □

Следствие 1. *Пусть $a_i \leqslant 0$ для всех $i \in I$, V — строго выпуклый компакт с гладкой границей и*

$$0 \in \operatorname{Int} \operatorname{co}\{z_1^0, \ldots, z_n^0\}. \tag{2.3}$$

Тогда в игре $G(n+1)$ происходит поимка в классе квазистратегий.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия (2.3) следует, что

$$\delta = \min_{v \in V} \max_{i \in I} \lambda(z_i^0, v) > 0.$$

Следовательно, по теореме 1 в игре $G(n+1)$ происходит поимка. □

§ 3. Поимка убегающего в игре $G(n+1)$ в классе позиционных стратегий с поводырем

Определение 5. В игре $G(n+1)$ из начальной позиции $z^0 = (z_1^0, \ldots, z_n^0)$ происходит *поимка*, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют момент $T(\varepsilon) > 0$, позиционные стратегии управления с поводырем $U_1, \ldots, U_n$ преследователей $P_1, \ldots, P_n$, что для любой измеримой функции $v(\cdot)$, $v(t) \in V$, $t \in [t_0, T(\varepsilon)]$, существует момент $\tau \in [t_0, T(\varepsilon)]$ и номер $p \in I$ такие, что $\|z_p(\tau)\| < \varepsilon$.

Теорема 2. *Пусть $a_i \leqslant 0$ для всех $i \in I$, $\delta > 0$. Тогда в игре $G(n+1)$ происходит поимка в классе позиционных стратегий с поводырем.*

Доказательство. В качестве момента $T(\varepsilon)$ возьмем момент $\widehat{T}$, определенный в (2.2). Пусть $\Delta = \{0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_r = \widehat{T}\}$ — разбиение отрезка $[0, \widehat{T}]$, $\eta = \max\limits_p(\tau_{p+1} - \tau_p)$. Рассмотрим вспомогательную игру $\widetilde{G}(n+1)$. Выберем $w_i^0 = z_i^0$ для всех $i \in I$.

1. Рассмотрим отрезок $[\tau_0, \tau_1]$. Задаем постоянное управление $\widetilde{v}$ убегающего $\widetilde{E}$ в игре $\widetilde{G}(n+1)$ произвольным образом, а управление преследователей $\widetilde{P}_i$ в игре $\widetilde{G}(n+1)$ полагаем

$$\widetilde{u}_i(t) = \begin{cases} \widetilde{v}(t) - \lambda(z_i^0, \widetilde{v}(t)) z_i^0, & t \in [\tau_0, \tau_0^i], \\ \widetilde{v}(t), & t \in [\tau_0^i, \tau_1], \end{cases}$$

где $\tau_0^i \leqslant \tau_1$ — корень функции

$$F_i(t) = E_{1/\alpha}(a_i \widehat{T}^\alpha, 1) - \int_{\tau_0}^{t} g_i(\widehat{T}, s) \lambda(z_i^0, \widetilde{v}(s))\, ds,$$

если он существует. Если $\tau_0^i \in [\tau_0, \tau_1]$ не существует, то управление преследователей $\widetilde{P}_i$, $i \in I$, полагаем равным

$$\widetilde{u}_i(t) = \widetilde{v}(t) - \lambda(z_i^0, \widetilde{v}(t)) z_i^0, \quad t \in [\tau_0, \tau_1].$$

Управление u_i преследователей P_i, $i \in I$, в игре $G(n+1)$ на $[\tau_0, \tau_1)$ выбираем произвольным образом и постоянным.

2. Рассмотрим отрезок $[\tau_1, \tau_2]$. Пусть $s_i(\tau_1) = z_i(\tau_1) - w_i(\tau_1)$. Выбираем постоянное управление $\widetilde{v}$ убегающего $\widetilde{E}$ в игре $\widetilde{G}(n+1)$ так, чтобы выполнялось равенство

$$\Big(\sum_{i \in I} s_i(\tau_1), \widetilde{v}\Big) = \min_{v \in V} \Big(\sum_{i \in I} s_i(\tau_1), v\Big).$$

Управление $\widetilde{u}_i$ преследователей $\widetilde{P}_i$ в игре $\widetilde{G}(n+1)$ на $[\tau_1, \tau_2)$ задаем следующим образом.

Если $F_i(\tau_1) < 0$, то полагаем

$$\widetilde{u}_i(t) = \widetilde{v}(t), \quad t \in [\tau_1, \tau_2].$$

Если $F_i(\tau_1) \geqslant 0$, $F_i(\tau_2) \leqslant 0$, то полагаем

$$\widetilde{u}_i(t) = \begin{cases} \widetilde{v}(t) - \lambda(z_i^0, \widetilde{v}(t)) z_i^0, & t \in [\tau_1, \tau_1^i], \\ \widetilde{v}(t), & t \in [\tau_1^i, \tau_2], \end{cases}$$

где $\tau_1^i \leqslant \tau_2$ — корень функции $F_i(t)$.

Если $F_i(\tau_2) > 0$, то полагаем

$$\widetilde{u}_i(t) = \widetilde{v}(t) - \lambda(z_i^0, \widetilde{v}(t))z_i^0, \quad t \in [\tau_1, \tau_2].$$

Управления u_i^1 преследователей P_i, $i \in I$, в игре $G(n+1)$ выбираем постоянными на $[\tau_1, \tau_2]$ так, чтобы выполнялись равенства

$$(s_i(\tau_1), u_i^1) = \min_{u_i \in V}(s_i(\tau_1), u_i).$$

3. Рассмотрим далее отрезок $[\tau_l, \tau_{l+1}]$ Пусть $s_i(\tau_l) = z_i(\tau_l) - w_i(\tau_l)$. Выбираем постоянное управление $\widetilde{v}$ убегающего $\widetilde{E}$ в игре $\widetilde{G}(n+1)$ так, чтобы выполнялось равенство

$$\Big(\sum_{i \in I} s_i(\tau_l), \widetilde{v}\Big) = \min_{v \in V}\Big(\sum_{i \in I} s_i(\tau_l), v\Big).$$

Управление $\widetilde{u}_i$ преследователей $\widetilde{P}_i$ в игре $\widetilde{G}(n+1)$ на $[\tau_l, \tau_{l+1})$ задаем следующим образом.

Если $F_i(\tau_l) < 0$, то полагаем

$$\widetilde{u}_i(t) = \widetilde{v}(t), \quad t \in [\tau_l, \tau_{l+1}].$$

Если $F_i(\tau_l) \geqslant 0$, $F_i(\tau_{l+1}) \leqslant 0$, то полагаем

$$\widetilde{u}_i(t) = \begin{cases} \widetilde{v}(t) - \lambda(z_i^0, \widetilde{v}(t))z_i^0, & t \in [\tau_l, \tau_l^i], \\ \widetilde{v}(t), & t \in (\tau_l^i, \tau_{l+1}], \end{cases}$$

где $\tau_l^i \leqslant \tau_{l+1}$ — корень функции $F_i(t)$.

Если $F_i(\tau_{l+1}) > 0$, то полагаем

$$\widetilde{u}_i(t) = \widetilde{v}(t) - \lambda(z_i^0, \widetilde{v}(t))z_i^0, \quad t \in [\tau_l, \tau_{l+1}].$$

Управления u_i^l преследователей P_i, $i \in I$, в игре $G(n+1)$ выбираем постоянными на $[\tau_l, \tau_{l+1}]$ так, чтобы выполнялись равенства

$$(s_i(\tau_l), u_i^l) = \min_{u_i \in V}(s_i(\tau_l), u_i), \ i \in I. \tag{3.1}$$

Таким образом, преследователи $P_i, i \in I$ в системе (1.1) строят свои управления пошагово, зная на каждом шаге реальную позицию игры и позицию во вспомогательной системе-поводыре (1.2).

Пусть ε — произвольное положительное число. Обозначим $s_i(t) = z_i(t) - w_i(t)$, $d = \max_{v \in V}\|v\|$. Из утверждения 5 работы [24] следует, что существуют константы R, H, M такие, что для любых допустимых функций $v(\cdot), u_i(\cdot)$ и для всех $i \in I$ имеют место неравенства

$$\|z_i(t)\| \leqslant R, \quad \|z_i(t) - z_i(\tau)\| \leqslant H|t-\tau|^\alpha, \quad t, \tau \in [0, \widehat{T}],$$
$$\|w_i(t) - w_i(\tau)\| \leqslant H|t-\tau|^\alpha, \quad t, \tau \in [0, \widehat{T}], \quad \|(D^{(\alpha)}z_i)(t)\| \leqslant M \text{ для почти всех } t \in [0, \widehat{T}].$$

Рассмотрим отрезок $[\tau_l, \tau_{l+1}]$. Тогда для произвольной допустимой функции $v(\cdot)$ имеем [25, следствие 4.2]

$$\begin{aligned} D^{(\alpha)}(\|s_i(t)\|^2) &\leqslant 2\big(s_i(t), (D^{(\alpha)}s_i)(t)\big) = 2\big(s_i(t), a_i s_i(t) + u_i^l - \widetilde{u}_i(t) + \widetilde{v}(t) - v(t)\big) = \\ &= 2a_i(s_i(t), s_i(t)) + 2\big(s_i(t), u_i^l - \widetilde{u}_i(t)\big) + 2\big(s_i(t), \widetilde{v}(t) - v(t)\big). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Из равенства (3.1) следует, что для всех $t \in [\tau_l, \tau_{l+1}]$ выполнено неравенство
$$\big(s_i(\tau_l), u_i^l - \widetilde{u}_i(t)\big) \leqslant 0.$$
Кроме того, для всех $t \in [\tau_l, \tau_{l+1}]$ имеет место неравенство ($A = \max\limits_i |a_i|$)
$$(s_i(t), a_i s_i(t)) \leqslant A\|s_i(t)\|^2. \tag{3.3}$$
Поэтому справедливы неравенства
$$\begin{gathered}\big(s_i(t), u_i^l - \widetilde{u}_i(t)\big) = \big(s_i(\tau_l), u_i^l - \widetilde{u}_i(t)\big) + \big(s_i(t) - s_i(\tau_l), u_i^l - \widetilde{u}_i(t)\big) \leqslant \\ \leqslant \big(s_i(t) - s_i(\tau_l), u_i^l - \widetilde{u}_i(t)\big) \leqslant 2d\|s_i(t) - s_i(\tau_l)\| \leqslant 4dH|t - \tau_l|^\alpha \leqslant 4dH\eta^\alpha.\end{gathered} \tag{3.4}$$
Следовательно, из неравенств (3.2), (3.3) и (3.4) получаем
$$D^{(\alpha)}\Big(\sum_{i\in I}\|s_i(t)\|^2\Big) \leqslant 2A\sum_{i\in I}\|s_i(t)\|^2 + 4ndH\eta^\alpha + 2\Big(\sum_{i\in I} s_i(t), \widetilde{v} - v(t)\Big). \tag{3.5}$$
Так как для всех $t \in [\tau_l, \tau_{l+1}]$
$$\Big(\sum_{i\in I} s_i(\tau_l), \widetilde{v} - v(t)\Big) \leqslant 0,$$
то
$$\Big(\sum_{i\in I} s_i(t), \widetilde{v} - v(t)\Big) = \Big(\sum_{i\in I} s_i(\tau_l), \widetilde{v} - v(t)\Big) + \Big(\sum_{i\in I}(s_i(t) - s_i(\tau_l)), \widetilde{v} - v(t)\Big) \leqslant 4Hdn\eta^\alpha.$$
Поэтому из неравенства (3.5) следует, что для почти всех $t \in [0, \widehat{T}]$ справедливо неравенство
$$D^{(\alpha)}\Big(\sum_{i\in I}\|s_i(t)\|^2\Big) \leqslant 2A\sum_{i\in I}\|s_i(t)\|^2 + C\eta^\alpha, \quad \text{где } C = 12ndH.$$
Из последнего неравенства получаем [26], что для всех $t \in [0, \widehat{T}]$ справедливо неравенство
$$\sum_{i\in I}\|s_i(t)\|^2 \leqslant \frac{CT^\alpha\eta^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{2A}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{\sum\limits_{i\in I}\|s_i(\tau)\|^2}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\,d\tau.$$

Применяя к последнему неравенству версию неравенства Гронуолла–Беллмана [27, лемма 6.19], получаем
$$\sum_{i\in I}\|s_i(t)\|^2 \leqslant \frac{C\widehat{T}^\alpha\eta^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} E_{1/\alpha}(2A\widehat{T}^\alpha, 1).$$
Выберем теперь разбиение Δ таким, чтобы выполняясь неравенство
$$\frac{C\widehat{T}^\alpha\eta^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} E_{1/\alpha}(2A\widehat{T}^\alpha, 1) < \varepsilon^2.$$
Тогда $\sum\limits_{i\in I}\|s_i(\widehat{T})\| < \varepsilon^2$. Следовательно, $\|s_i(\widehat{T})\| < \varepsilon$ для всех i. Так как $w_p(\widehat{T}) = 0$ при некотором p, то $\|z_p(\widehat{T})\| < \varepsilon$. Теорема доказана. □

Следствие 2. *Пусть $a_i \leqslant 0$ для всех $i \in I$, V — строго выпуклый компакт с гладкой границей, и выполнено условие* (2.3). *Тогда в игре $G(n+1)$ происходит поимка в классе управлений с поводырем.*

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21–71–10070, https://rscf.ru/project/21-71-10070/.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967.
2. Понтрягин Л. С. Избранные научные труды. Т. 2. М.: Наука, 1988.
3. Blaquiere A., Gerard F., Leitmann G. Quantitative and qualitative games. New York: Academic Press, 1969.
4. Friedman A. Differential games. New York: Wiley Interscience, 1971.
5. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
6. Leitmann G. Cooperative and noncooperative many-player differential games. Vienna: Springer, 1974. https://doi.org/10.1007/978-3-7091-2914-2
7. Петросян Л. А. Дифференциальные игры преследования. Л.: Изд-во ЛГУ, 1977.
8. Субботин А. И., Ченцов А. Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981.
9. Чикрий А. А. Конфликтно управляемые процессы. Киев: Наукова думка, 1992.
10. Григоренко Н. Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во МГУ, 1990.
11. Благодатских А. И., Петров Н. Н. Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: Изд-во Удмуртского университета, 2009.
12. Сатимов Н. Ю., Рихсиев Б. Б. Методы решения задачи уклонения от встречи в математической теории управления. Ташкент: Фан, 2000.
13. Alias I. A., Ibragimov G. I., Rakhmanov A. Evasion differential games of infinitely many evaders from infinitely many pursuers in Hilbert space // Dynamic Games and Applications. 2017. Vol. 7. Issue 3. P. 347–359. https://doi.org/10.1007/s13235-016-0196-0
14. Kuchkarov A. Sh., Hasim R. M., Hassan M. A. Differential game with many pursuers when evader moves on the surface of a cylinder // ANZIAM Journal. 2012. Vol. 53. P. 1–20. https://doi.org/10.21914/anziamj.v53i0.3280
15. Kumkov S. S., Ménec S. L., Patsko V. S. Zero-sum pursuit-evasion differential games with many objects: survey of publications // Dynamic Games and Applications. 2017. Vol. 7. No. 4. P. 609–633. https://doi.org/10.1007/s13235-016-0209-z
16. Gomoyunov M. I. Approximation of fractional order conflict-controlled systems // Progress in Fractional Differentiation and Applications. 2019. Vol. 5. No. 2. P. 143–155. https://doi.org/10.18576/PFDA/050205
17. Банников А. С. О задаче позиционной поимки одного убегающего группой преследователей // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 1. С. 3–7. http://mi.mathnet.ru/vuu201
18. Шишкина Н. Б. О задаче преследования по позиции в дифференциальной игре со многими преследователями // Кибернетика. 1987. № 1. С. 47–50. https://zbmath.org/?q=an:0683.90110
19. Petrov N. N., Solov'eva N. A. Group pursuit in recurrent differential games in the class of positional strategies with guide // Minimax Theory and its Applications. 2020. Vol. 5. No. 2. P. 401–411. https://www.heldermann.de/MTA/MTA05/MTA052/mta05022.htm
20. Pollard H. The completely monotonic character of the Mittag–Leffler function $E_a(-x)$ // Bulletin of the American Mathematical Society. 1948. Vol. 54. Issue 12. P. 1115–1116. https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1948-09132-7
21. Попов А. Ю., Седлецкий А. М. Распределение корней функции Миттаг–Леффлера // Современная математика. Фундаментальные направления. 2011. Т. 40. С. 3–171. http://mi.mathnet.ru/rus/cmfd/v40/p3
22. Джрбашян М. М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966.
23. Чикрий А. А., Матичин И. И. Об аналоге формулы Коши для линейных систем произвольного дробного порядка // Доповіді Національноі академіі наук Украіни. 2007. № 1. С. 50–55.
24. Гомоюнов М. И. Экстремальный сдвиг на сопутствующие точки в позиционной дифференциальной игре для системы дробного порядка // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25. № 1. С. 11–34. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2019-25-1-11-34

25. Gomoyunov M. I. Fractional derivatives of convex Lyapunov function and control problems in fractional order systems // Fractional Calculus and Applied Analysis. 2018. Vol. 21. Issue 5. P. 1238–1261. https://doi.org/10.1515/fca-2018-0066
26. Gomoyunov M. I. Solution to a zero-sum differential game with fractional dynamics via approximations // Dynamic Games and Applications. 2020. Vol. 10. Issue 2. P. 417–443. https://doi.org/10.1007/s13235-019-00320-4
27. Diethelm K. The analysis of fractional differential equations. Berlin: Springer, 2010. https://doi.org/10.1007/978-3-642-14574-2

Поступила в редакцию 02.10.2021

Принята к публикации 10.01.2022

Петров Николай Никандрович, д. ф.-м. н., профессор, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1;
Институт математики и механики УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0303-3559
E-mail: kma3@list.ru

Мачтакова Алёна Игоревна, аспирант, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1;
Институт математики и механики УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1570-5241
E-mail: bichurina.alyona@yandex.ru

Цитирование: Н. Н. Петров, А. И. Мачтакова. Групповое преследование в задаче с дробными производными в классе позиционных стратегий с поводырем // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2022. Т. 32. Вып. 1. С. 94–106.

MATHEMATICS 2022. Vol. 32. Issue 1. Pp. 94–106.

N. N. Petrov, A. I. Machtakova

Group pursuit in a problem with fractional derivatives in the class of positional strategies with a guide

Keywords: differential game, group pursuit, pursuer, evader, guide system.

MSC2020: 49N79, 49N70, 91A24

DOI: 10.35634/vm220107

In a finite-dimensional Euclidean space, the problem of pursuing one evader by a group of pursuers is considered, described by a system of the form

$$D^{(\alpha)}z_i = a_i z_i + u_i - v, \quad u_i, v \in V,$$

where $D^{(\alpha)}f$ is the Caputo derivative of order $\alpha \in (0,1)$ of the function f. The set of admissible controls V is a convex compact, a_i are non-positive real numbers. The aim of the group of pursuers is to capture the evader. The terminal sets are the origin of coordinates. Sufficient conditions for catching one evader in the class of quasi-strategies are obtained. Using quasi-strategies in an auxiliary game, sufficient conditions for catching an evader in the class of positional strategies with a guide are obtained.

Funding. This work was supported by the Russian Science Foundation, project 21-71-10070, https://rscf.ru/en/project/21-71-10070/.

REFERENCES

1. Isaacs R. *Differential games*, New York: Wiley, 1965.
2. Pontryagin L. S. *Izbrannye nauchnye trudy. Tom 2* (Selected scientific works. Vol. 2), Moscow: Nauka, 1988.
3. Blaquiere A., Gerard F., Leitmann G. *Quantitative and qualitative games*, New York: Academic Press, 1969.
4. Friedman A. *Differential games*, New York: Wiley Interscience, 1971.
5. Krasovskii N. N., Subbotin A. I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry* (Positional differential games), Nauka: Moscow, 1974.
6. Leitmann G. *Cooperative and noncooperative many-player differential games*, Vienna: Springer, 1974. https://doi.org/10.1007/978-3-7091-2914-2
7. Petrosyan L. A. *Differentsial'nye igry presledovaniya* (Differential games of pursuit), Leningrad: Leningrad State University, 1977.
8. Subbotin A. I., Chentsov A. G. *Optimizatsiya garantii v zadachakh upravleniya* (Optimization of a guarantee in problems of control), Moscow: Nauka, 1981.
9. Chikrii A. A. *Conflict-controlled processes*, Dordrecht: Springer, 1997. https://doi.org/10.1007/978-94-017-1135-7
10. Grigorenko N. L. *Matematicheskie metody upravleniya neskol'kimi dinamicheskimi protsessami* (Mathematical methods of control a few dynamic processes), Moscow: Moscow State University, 1990.
11. Blagodatskikh A. I., Petrov N. N. *Konfliktnoe vzaimodeistvie grupp upravlyaemykh ob"ektov* (Conflict interaction of groups of controlled objects), Izhevsk: Udmurt State University, 2009.
12. Satimov N. Yu., Rikhsiev B. B. *Metody resheniya zadachi ukloneniya ot vstrechi v matematicheskoi teorii upravleniya* (Methods of solving the problem of avoiding encounter in mathematical control theory), Tashkent: Fan, 2000.
13. Alias I. A, Ibragimov G. I., Rakhmanov A. Evasion differential games of infinitely many evaders from infinitely many pursuers in Hilbert space, *Dynamic Games and Applications*, 2017, vol. 7, issue 3, pp. 347–359. https://doi.org/10.1007/s13235-016-0196-0

14. Kuchkarov A. Sh., Hasim R. M., Hassan M. A. Differential game with many pursuers when evader moves on the surface of a cylinder, *ANZIAM Journal*, 2012, vol. 53, pp. 1–20. https://doi.org/10.21914/anziamj.v53i0.3280
15. Kumkov S. S., Ménec S. L., Patsko V. S. Zero-sum pursuit-evasion differential games with many objects: survey of publications, *Dynamic Games and Applications*, 2017, vol. 7, no. 4, pp. 609–633. https://doi.org/10.1007/s13235-016-0209-z
16. Gomoyunov M. I. Approximation of fractional order conflict-controlled systems, *Progress in Fractional Differentiation and Applications*, 2019, vol. 5, no. 2, pp. 143–155.
17. Bannikov A. S. About a problem of positional capture of one evader by group of pursuers, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2011, issue 1, pp. 3–7 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/vuu201
18. Shishkina N. B. Positional pursuit problem in a many-pursuer differential game, *Cybernetics*, 1987, vol. 23, no. 1, pp. 58–63. https://doi.org/10.1007/BF01068804
19. Petrov N. N., Solov'eva N. A. Group pursuit in recurrent differential games in the class of positional strategies with guide, *Minimax Theory and its Applications*, 2020, vol. 5, no. 2, pp. 401–411. https://www.heldermann.de/MTA/MTA05/MTA052/mta05022.htm
20. Pollard H. The completely monotonic character of the Mittag–Leffler function $E_a(-x)$, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1948, vol. 54, issue 12, pp. 1115–1116. https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1948-09132-7
21. Popov A. Yu., Sedletskii A. M. Distribution of roots of Mittag–Leffler functions, *Journal of Mathematical Sciences*, 2013, vol. 190, no. 2, pp. 209–409. https://doi.org/10.1007/s10958-013-1255-3
22. Dzhrbashyan M. M. *Intergal'nye preobrazovania i predstavleniya funktsii v kompleksnoi oblasti* (Integral transforms and representations of functions in the complex domain), Moscow: Nauka, 1966.
23. Chikrii A. A., Matichin I. I. An analog of the Cauchy formula for linear systems of arbitrary fractional order, *Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine*, 2007, no. 1, pp. 50–55 (in Russian).
24. Gomoyunov M. I. Extremal shift to accompanying points in a positional differential game for a fractional-order system, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2019, vol. 25, no. 1, pp. 11–34 (in Russian). https://doi.org/10.21538/0134-4889-2019-25-1-11-34
25. Gomoyunov M. I. Fractional derivatives of convex Lyapunov function and control problems in fractional order systems, *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 2018, vol. 21, issue 5, pp. 1238–1261. https://doi.org/10.1515/fca-2018-0066
26. Gomoyunov M. I. Solution to a zero-sum differential game with fractional dynamics via approximations, *Dynamic Games and Applications*, 2020, vol. 10, issue 2, pp. 417–443. https://doi.org/10.1007/s13235-019-00320-4
27. Diethelm K. *The analysis of fractional differential equations*, Berlin: Springer, 2010. https://doi.org/10.1007/978-3-642-14574-2

Received 02.10.2021

Accepted 10.01.2022

Nikolai Nikandrovich Petrov, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia;
Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620108, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0303-3559
E-mail: kma3@list.ru

Alena Igorevna Machtakova, Post-Graduate Student, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia;
Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620108, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1570-5241
E-mail: bichurina.alyona@yandex.ru

Citation: N. N. Petrov, A. I. Machtakova. Group pursuit in a problem with fractional derivatives in the class of positional strategies with a guide, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2022, vol. 32, issue 1, pp. 94–106.