ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ

МАТЕМАТИКА 2022. Т. 32. Вып. 1. С. 62–80.

УДК 512.816.3

 В. А. Кыров

О ЛОКАЛЬНОМ РАСШИРЕНИИ ГРУППЫ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПЕРЕНОСОВ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В этой работе решается проблема расширения группы параллельных переносов трехмерного пространства до локально ограниченно точно дважды транзитивной группы Ли преобразований того же пространства. Локальная ограниченная точная двойная транзитивность означает, что существует единственное преобразование, которое переводит произвольную пару несовпадающих точек из некоторой открытой окрестности почти в любую пару точек из той же окрестности. В данной статье поставленная задача решается для двух случаев, связанных с жордановыми формами матриц третьего порядка. С помощью этих матриц записываются системы линейных дифференциальных уравнений, решения которых приводят к базисным операторам шестимерного линейного пространства. Требуя замкнутость коммутаторов этих операторов, выделяем алгебры Ли. Проверяя также условие локальной ограниченной точно дважды транзитивности, мы получаем алгебры Ли локально ограниченно точно дважды транзитивных групп Ли преобразований трехмерного пространства с подгруппой параллельных переносов. В результате получены три алгебры Ли, две из которых представимы в виде полупрямой суммы коммутативного трехмерного идеала и трехмерной подалгебры Ли, а третья разлагается в полупрямую сумму коммутативного трехмерного идеала и подалгебры, изоморфной $sl(2, R)$.

Ключевые слова: группа Ли преобразований, локально ограниченно точно дважды транзитивная группа Ли преобразований, алгебра Ли, жорданова форма матрицы.

DOI: 10.35634/vm220105

Введение

Для современной геометрии важно изучение транзитивных групп. Например, изучаются транзитивные действия односвязных и связных разрешимых групп Ли на нильпотентных группах Ли [1], классифицируются эффективные и транзитивные действия группы Ли на n-мерном невырожденном гиперболоиде [2], исследуются эффективные и транзитивные действия групп Ли на компактных однородных многообразиях [3,4]. Как известно, однородные многообразия определяются через транзитивное действие групп Ли, поэтому транзитивные группы Ли находят свое применение в геометрии однородных многообразий [5–7].

Транзитивные группы преобразований применяются также и в физике. Так, группа Героха (бесконечномерная транзитивная группа симметрий классических цилиндрически-симметричных гравитационных волн) посредством неканонических преобразований действует на фазовое пространство этих волн. В работе [8] эта симметрия восстанавливается и получается единственная скобка Пуассона на группе Героха, которая действует на гравитационное фазовое пространство Ли–Пуассона. Также отметим, что транзитивные группы преобразований находят свое применение в Эйнштейновых пространствах [9].

В последнее время актуальной является задача расширения транзитивного действия группы Ли. Так в работе В. В. Горбацевича [10] приводится определение расширения транзитивной группы Ли G, действующей в многообразии M: *расширением транзитивной группы Ли G называется группа Ли G_1, содержащая G в виде подгруппы Ли и тоже транзитивная на M, причем ограничение этого транзитивного действия на G дает исходное* *транзитивное действие группы Ли G*. Классическим примером расширения группы параллельных переносов пространства R^n является группа аффинных преобразований этого же пространства. В качестве современного примера можно привести работу [11], в которой рассматривается ниль-расширение над действием Аносова абелевой группы Ли.

При расширении транзитивного действия группы Ли можно получить дважды транзитивную группу Ли преобразований. Действие G на X называется дважды транзитивным (2-транзитивным), если $|X| \geqslant k \geqslant 2$, и G действует транзитивно на множестве всех двоек $(x_1, x_2) \in X^2$ с попарно различными элементами. Для случая топологических групп преобразований классификацию таких действий провел Ж. Титс [12, 13]. В работе [14] недочеты в доказательствах Титса были устранены. Отметим, что 2-транзитивные группы изучаются также и в алгебре [15, 16].

Согласно монографии Г. Г. Михайличенко [17] можно говорить, что локально точно транзитивная группа Ли преобразований пространства R^3 задает феноменологически симметричную геометрию двух множеств ранга $(2, 2)$, а локально ограниченно точно дважды транзитивная группа Ли преобразований пространства R^3 задает феноменологически симметричную геометрию двух множеств ранга $(3, 2)$. Первым множеством является пространство R^3, а вторым — группа Ли G.

В данной статье находятся алгебры Ли локально ограниченно точно дважды транзитивных групп Ли преобразований пространства R^3, являющимися расширениями группы параллельных переносов трехмерного пространства. Базис этих алгебр Ли имеет вид: $X_1 = \partial_x$, $X_2 = \partial_y$, $X_3 = \partial_z$, $Y_i = A_i(x, y, z)\partial_x + B_i(x, y, z)\partial_y + C_i(x, y, z)\partial_z$, $i = 1, 2, 3$, причем изначально базисные операторы Y_1, Y_2, Y_3 неизвестны. Для нахождения явных выражений операторов Y_1, Y_2, Y_3 сначала по условию замкнутости коммутаторов $[X_i, Y_j] = (\alpha_i)^k_j X_k + (\beta_i)^k_j Y_k$, $i, j, k = 1, 2, 3$, записываются три системы дифференциальных уравнений на их коэффициенты:

$$\begin{cases} \overrightarrow{A}_x = T_1\overrightarrow{A} + \overrightarrow{G}^1, & \overrightarrow{A}_y = T_2\overrightarrow{A} + \overrightarrow{P}^1, \quad \overrightarrow{A}_z = T_3\overrightarrow{A} + \overrightarrow{Q}^1, \\ \overrightarrow{B}_x = T_1\overrightarrow{B} + \overrightarrow{G}^2, & \overrightarrow{B}_y = T_2\overrightarrow{B} + \overrightarrow{P}^2, \quad \overrightarrow{B}_z = T_3\overrightarrow{B} + \overrightarrow{Q}^2, \\ \overrightarrow{C}_x = T_1\overrightarrow{C} + \overrightarrow{G}^3, & \overrightarrow{C}_y = T_2\overrightarrow{C} + \overrightarrow{P}^3, \quad \overrightarrow{C}_z = T_3\overrightarrow{C} + \overrightarrow{Q}^3, \end{cases} \tag{0.1}$$

где

$$T_1 = \begin{pmatrix} a^1_1 & a^2_1 & a^3_1 \\ a^1_2 & a^2_2 & a^3_2 \\ a^1_3 & a^2_3 & a^3_3 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} b^1_1 & b^2_1 & b^3_1 \\ b^1_2 & b^2_2 & b^3_2 \\ b^1_3 & b^2_3 & b^3_3 \end{pmatrix}, \quad T_3 = \begin{pmatrix} c^1_1 & c^2_1 & c^3_1 \\ c^1_2 & c^2_2 & c^3_2 \\ c^1_3 & c^2_3 & c^3_3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{G}^j = \begin{pmatrix} g^j_1 \\ g^j_2 \\ g^j_3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{Q}^j = \begin{pmatrix} q^j_1 \\ q^j_2 \\ q^j_3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{P}^j = \begin{pmatrix} p^j_1 \\ p^j_2 \\ p^j_3 \end{pmatrix},$$

причем элементы матриц T_1, T_2, T_3 и векторов $\overrightarrow{G}^i$, $\overrightarrow{P}^i$, $\overrightarrow{Q}^i$ постоянные и выражаются через коэффициенты $(\beta_i)^k_j$ и $(\alpha_i)^k_j$ соответственно, решая которые, находим ограничения на компоненты этих операторов. Исследуя на замкнутость остальные коммутаторы, получаем окончательные выражения для Y_1, Y_2, Y_3.

Для упрощения решения системы (0.1) матрицы T_1, T_2, T_3 приводятся к максимально возможно простому виду. В работе [18] доказано, что матрицы T_1, T_2, T_3 взаимно коммутативны и матрица T_1 в подходящем базисе алгебры Ли приводится к жордановой форме. Далее вычисляя коммутаторы $[T_1, T_2]$, $[T_1, T_3]$ и $[T_2, T_3]$ и приравнивая их к нулю, получаем следующие выражения для ненулевых матриц T_1, T_2, T_3:

1. $$\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\mu_1 & 0 & 0\\ 0 & \mu_2 & 0\\ 0 & 0 & \mu_3\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\nu_1 & 0 & 0\\ 0 & \nu_2 & 0\\ 0 & 0 & \nu_3\end{pmatrix};$$

2. $$\begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_3 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_2\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\mu_1 & \mu_3 & 0\\ 0 & \mu_1 & 0\\ 0 & 0 & \mu_2\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\nu_1 & \nu_3 & 0\\ 0 & \nu_1 & 0\\ 0 & 0 & \nu_2\end{pmatrix}, \quad \lambda_3^2 + \mu_3^2 + \nu_3^2 \neq 0;$$

3. $$\begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3\\ 0 & \lambda_1 & \lambda_2\\ 0 & 0 & \lambda_1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\mu_1 & \mu_2 & \mu_3\\ 0 & \mu_1 & \mu_2\\ 0 & 0 & \mu_1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\nu_1 & \nu_2 & \nu_3\\ 0 & \nu_1 & \nu_2\\ 0 & 0 & \nu_1\end{pmatrix}, \quad \lambda_2^2 + \mu_2^2 + \nu_2^2 \neq 0;$$

4. $$\begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & 0\\ -\lambda_2 & \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\mu_1 & \mu_2 & 0\\ -\mu_2 & \mu_1 & 0\\ 0 & 0 & \mu_3\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\nu_1 & \nu_2 & 0\\ -\nu_2 & \nu_1 & 0\\ 0 & 0 & \nu_3\end{pmatrix}, \quad \lambda_2^2 + \mu_2^2 + \nu_2^2 \neq 0;$$

5. $$\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\mu & 0 & \mu_2\\ 0 & \mu & 0\\ 0 & 0 & \mu\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\nu & \nu_1 & \nu_2\\ 0 & \nu & 0\\ 0 & 0 & \nu\end{pmatrix}, \quad \mu_2 \neq 0;$$

6. $$\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\mu & 0 & \mu_2\\ 0 & \mu & 0\\ 0 & 1 & \mu\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\nu & \nu_1 & \mu_2\\ 0 & \nu & 0\\ 0 & 1 & \nu\end{pmatrix}.$$

В данной работе рассматривается случай с матрицами **5** и **6**, а случай с остальными матрицами будет рассмотрен в отдельной статье. Вычисление явных выражений для действий таких алгебр Ли предполагается провести отдельно, для чего можно воспользоваться методами, описанными в статьях [19–21].

Получаемые здесь результаты предполагается применить для классификации ограниченно точно дважды транзитивных групп Ли преобразований пространства R^3 (феноменологически симметричных геометрий двух множеств [17]), поэтому требуется поиск всех алгебр Ли групп преобразований, о которых говорилось выше. Применяемый в этой работе метод исследования апробирован в статье [22] на примере классификации локально ограниченно точно дважды транзитивных расширений группы параллельных переносов плоскости R^2. Также отметим, что дважды транзитивные группы преобразований находят свое применение при изучении однородных пространств и широко применяются в теории групп.

§ 1. Основные определения

Сначала приведем определение локального действия группы Ли G, причем $\dim G = n$, в пространстве R^3 [23].

Определение 1. Дифференцируемое класса C^2 отображение $\pi\colon R^3 \times G \to R^3$ называется *эффективным локальным действием*, если выполняются свойства:

1^0. $\pi(a,e) = a$ для всех $a \in W$, где W — область в R^3, $e \in G$ — единица;

2^0. $\pi(\pi(a,h_1),h_2) = \pi(a,h_1h_2)$ для всех $a \in W$, где $h_1,h_2 \in G$;

3^0. $\pi(a,h) = a$ для всех $a \in W$, где $h \in G$, тогда и только тогда, когда $h = e$;

4^0. $\pi_h\colon R^3 \to R^3$ — локальный диффеоморфизм для всякого $h \in G$.

Тройка (R^3, G, π) называется *локальной группой Ли преобразований* многообразия R^3.

Обозначим через L алгебру Ли группы Ли преобразований. Базис этой алгебры Ли состоит из операторов:

$$Z_i = Z_i^1\partial_x + Z_i^2\partial_y + Z_i^3\partial_z, \tag{1.1}$$

где $i = 1, \ldots, n$.

Определение 2. Эффективное локальное действие $\pi\colon R^3 \times G \to R^3$ называется *локально ограниченно точно дважды транзитивным*, если дополнительно выполняются свойства:

5^0. $n = 6$;

6^0. Матрица

$$V = \begin{pmatrix} Z_1^1(a) & Z_1^2(a) & Z_1^3(a) & Z_1^1(b) & Z_1^2(b) & Z_1^3(b) \\ Z_2^1(a) & Z_2^2(a) & Z_2^3(a) & Z_2^1(b) & Z_2^2(b) & Z_2^3(b) \\ Z_3^1(a) & Z_3^2(a) & Z_3^3(a) & Z_3^1(b) & Z_3^2(b) & Z_3^3(b) \\ Z_4^1(a) & Z_4^2(a) & Z_4^3(a) & Z_4^1(b) & Z_4^2(b) & Z_4^3(b) \\ Z_5^1(a) & Z_5^2(a) & Z_5^3(a) & Z_5^1(b) & Z_5^2(b) & Z_5^3(b) \\ Z_6^1(a) & Z_6^2(a) & Z_6^3(a) & Z_6^1(b) & Z_6^2(b) & Z_6^3(b) \end{pmatrix},$$

составленная из коэффициентов операторов (1.1) невырождена для любых точек некоторых окрестностей $U(a), U(b) \in W$.

Определение 3. Будем говорить, что локально ограниченно точно дважды транзитивное действие $\pi\colon R^3 \times G \to R^3$ является локальным расширением группы параллельных переносов, если базис ее алгебры Ли L состоит из операторов

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = \partial_z, \quad Y_i = A_i\partial_x + B_i\partial_y + C_i\partial_z, \tag{1.2}$$

причем $A_i = A_i(x, y, z)$, $B_i = B_i(x, y, z)$, $C_i = C_i(x, y, z)$ — дифференцируемые функции класса гладкости C^1, где $i = 1, 2, 3$.

Теорема 1 (см. [18]). *Локальное действие $\pi\colon R^3 \times G \to R^3$ с операторами ее алгебры Ли (1.2) локально ограниченно точно дважды транзитивно тогда и только тогда, когда матрица $K(b) - K(a)$ невырождена, где*

$$K(a) = \begin{pmatrix} A_1(x_a, y_a, z_a) & B_1(x_a, y_a, z_a) & C_1(x_a, y_a, z_a) \\ A_2(x_a, y_a, z_a) & B_2(x_a, y_a, z_a) & C_2(x_a, y_a, z_a) \\ A_3(x_a, y_a, z_a) & B_3(x_a, y_a, z_a) & C_3(x_a, y_a, z_a) \end{pmatrix},$$

причем $a = (x_a, y_a, z_a) \in U(a) \subset W \subset R^3$.

Алгебра Ли обладает важным свойством — замкнутостью относительно коммутационных соотношений, т. е. коммутаторы $[X_j, Y_k]$, где $j, k = 1, 2, 3$, принадлежат этой же алгебре Ли [24]. Тогда, учитывая (1.2), приходим к системе дифференциальных уравнений (0.1) на коэффициенты A_i, B_i, C_i, причем $\overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{pmatrix}^T$, $\overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \end{pmatrix}^T$, $\overrightarrow{C} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix}^T$, матрицы T_1, T_2, T_3 и вектор-столбцы $\overrightarrow{G^j}, \overrightarrow{Q^j}, \overrightarrow{P^j}$ состоят из постоянных элементов, $j = 1, 2, 3$.

§ 2. Алгебры Ли, определяемые матрицами 5

Предложение 1. *Система дифференциальных уравнений (0.1) с одновременно ненулевыми матрицами T_1, T_2 и T_3, принимающих вид* **5** *из введения, в подходящем базисе и с точно-*

стью до переобозначения координат имеет два решения: при $\lambda^2+\mu^2+\nu^2\neq 0$:

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{A} =&((c_1^1+c_2^1x+\mu_2c_3^1y+(\nu_1c_2^1+\nu_2c_3^1)z)e^{\lambda x+\mu y+\nu z}+a_1^1)\,\overrightarrow{\xi}\\
&+(c_2^1e^{\lambda x+\mu y+\nu z}+a_2^1)\overrightarrow{\eta}+(c_3^1e^{\lambda x+\mu y+\nu z}+a_3^1)\,\overrightarrow{\zeta},\\
\overrightarrow{B} =&((c_1^2+c_2^2x+\mu_2c_3^2y+(\nu_1c_2^2+\nu_2c_3^2)z)e^{\lambda x+\mu y+\nu z}+a_1^2)\,\overrightarrow{\xi}\\
&+(c_2^2e^{\lambda x+\mu y+\nu z}+a_2^2)\overrightarrow{\eta}+(c_3^2e^{\lambda x+\mu y+\nu z}+a_3^2)\,\overrightarrow{\zeta},\\
\overrightarrow{C} =&((c_1^3+c_2^3x+\mu_2c_3^3y+(\nu_1c_2^3+\nu_2c_3^3)z)e^{\lambda x+\mu y+\nu z}+a_1^3)\,\overrightarrow{\xi}\\
&+(c_2^3e^{\lambda x+\mu y+\nu z}+a_2^3)\overrightarrow{\eta}+(c_3^3e^{\lambda x+\mu y+\nu z}+a_3^3)\,\overrightarrow{\zeta};
\end{aligned}
$$

при $\lambda^2+\mu^2+\nu^2=0$:

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{A} =&(g_2^1x^2/2+\mu_2p_3^1y^2/2+(\nu_1q_2^1+\nu_2q_3^1)z^2/2+\mu_2g_3^1xy+(\nu_1g_2^1+\nu_2g_3^1)xz\\
&+(\nu_1p_2^1+\nu_2p_3^1)yz+(c_2^1+g_1^1)x+(\mu_2c_3^1+p_1^1)y+(\nu_1c_2^1+\nu_2c_3^1+q_1^1)z+a_1^1)\,\overrightarrow{\xi}\\
&+(g_2^1x+p_2^1y+q_2^1z+c_2^1)\overrightarrow{\eta}+(g_3^1x+p_3^1y+q_3^1z+c_3^1)\,\overrightarrow{\zeta},\\
\overrightarrow{B} =&(g_2^2x^2/2+\mu_2p_3^2y^2/2+(\nu_1q_2^2+\nu_2q_3^2)z^2/2+\mu_2g_3^2xy+(\nu_1g_2^2+\nu_2g_3^2)xz\\
&+(\nu_1p_2^2+\nu_2p_3^2)yz+(c_2^2+g_1^2)x+(\mu_2c_3^2+p_1^2)y+(\nu_1c_2^2+\nu_2c_3^2+q_1^2)z+a_1^2)\,\overrightarrow{\xi}\\
&+(g_2^2x+p_2^2y+q_2^2z+c_2^2)\overrightarrow{\eta}+(g_3^2x+p_3^2y+q_3^2z+c_3^2)\,\overrightarrow{\zeta},\\
\overrightarrow{C} =&(g_2^3x^2/2+\mu_2p_3^3y^2/2+(\nu_1q_2^3+\nu_2q_3^3)z^2/2+\mu_2g_3^3xy+(\nu_1g_2^3+\nu_2g_3^3)xz\\
&+(\nu_1p_2^3+\nu_2p_3^3)yz+(c_2^3+g_1^3)x+(\mu_2c_3^3+p_1^3)y+(\nu_1c_2^3+\nu_2c_3^3+q_1^3)z+a_1^3)\,\overrightarrow{\xi}\\
&+(g_2^3x+p_2^3y+q_2^3z+c_2^3)\overrightarrow{\eta}+(g_3^3x+p_3^3y+q_3^3z+c_3^3)\,\overrightarrow{\zeta},\\
&\nu_1p_2^1+\nu_2p_3^1=\mu_2q_3^1,\quad \mu_2g_3^1=p_2^1,\quad \nu_1g_2^1+\nu_2g_3^1=q_2^1,\quad \nu_1p_2^2+\nu_2p_3^2=\mu_2q_3^2,\quad \mu_2g_3^2=p_2^2,\\
&\nu_1g_2^2+\nu_2g_3^2=q_2^2,\quad \nu_1p_2^3+\nu_2p_3^3=\mu_2q_3^3,\quad \mu_2g_3^3=p_2^3,\quad \nu_1g_2^3+\nu_2g_3^3=q_2^3,
\end{aligned}
$$

где g_j^i, q_j^i, p_j^i, a_j^i, c_j^i *— постоянные,* $i,j=1,2,3$, $\overrightarrow{\xi}=(1,0,0)^T$, $\overrightarrow{\eta}=(0,1,0)^T$, $\overrightarrow{\zeta}=(0,0,1)^T$.

Из решений, содержащихся в предложении 1, ниже будут выделены алгебры Ли. Сначала запишем базисные операторы (1.2) *шестимерных линейных пространств*, при этом операторы Y_1, Y_2 и Y_3 комбинируем с операторами X_1, X_2 и X_3 так, чтобы исчезли свободные члены:

$$
\begin{aligned}
&X_1=\partial_x,\quad X_2=\partial_y,\quad X_3=\partial_z,\\
&Y_1=e^{\lambda x+\mu y+\nu z}[c_1^1\partial_x+c_1^2\partial_y+c_1^3\partial_z+(x+\nu_1z)(c_2^1\partial_x+c_2^2\partial_y+c_2^3\partial_z)\\
&\qquad+(\mu_2y+\nu_2z)(c_3^1\partial_x+c_3^2\partial_y+c_3^3\partial_z)],\\
&Y_2=e^{\lambda x+\mu y+\nu z}[c_2^1\partial_x+c_2^2\partial_y+c_2^3\partial_z],\quad Y_3=e^{\lambda x+\mu y+\nu z}[c_3^1\partial_x+c_3^2\partial_y+c_3^3\partial_z];
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

$$
\begin{aligned}
&X_1=\partial_x,\quad X_2=\partial_y,\quad X_3=\partial_z,\\
&Y_1=(g_2^1x^2/2+\mu_2p_3^1y^2/2+(\nu_1q_2^1+\nu_2q_3^1)z^2/2+\mu_2g_3^1xy+(\nu_1g_2^1+\nu_2g_3^1)xz\\
&\quad+(\nu_1p_2^1+\nu_2p_3^1)yz+(c_2^1+g_1^1)x+(\mu_2c_3^1+p_1^1)y+(\nu_1c_2^1+\nu_2c_3^1+q_1^1)z)\partial_x\\
&\quad+(g_2^2x^2/2+\mu_2p_3^2y^2/2+(\nu_1q_2^2+\nu_2q_3^2)z^2/2+\mu_2g_3^2xy+(\nu_1g_2^2+\nu_2g_3^2)xz\\
&\quad+(\nu_1p_2^2+\nu_2p_3^2)yz+(c_2^2+g_1^2)x+(\mu_2c_3^2+p_1^2)y+(\nu_1c_2^2+\nu_2c_3^2+q_1^2)z)\partial_y\\
&\quad+(g_2^3x^2/2+\mu_2p_3^3y^2/2+(\nu_1q_2^3+\nu_2q_3^3)z^2/2+\mu_2g_3^3xy+(\nu_1g_2^3+\nu_2g_3^3)xz\\
&\quad+(\nu_1p_2^3+\nu_2p_3^3)yz+(c_2^3+g_1^3)x+(\mu_2c_3^3+p_1^3)y+(\nu_1c_2^3+\nu_2c_3^3+q_1^3)z)\partial_z,\\
&Y_2=(g_2^1x+p_2^1y+q_2^1z)\partial_x+(g_2^2x+p_2^2y+q_2^2z)\partial_y+(g_2^3x+p_2^3y+q_2^3z)\partial_z,\\
&Y_3=(g_3^1x+p_3^1y+q_3^1z)\partial_x+(g_3^2x+p_3^2y+q_3^2z)\partial_y+(g_3^3x+p_3^3y+q_3^3z)\partial_z.
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

Запишем определитель матрицы $K(b)-K(a)$ для базисных операторов (2.1):

$$|K(b)-K(a)| = \begin{vmatrix} \Xi^1(ab) & \Xi^2(ab) & \Xi^3(ab) \\ \chi_1(ba)c_2^1 & \chi_1(ba)c_2^2 & \chi_1(ba)c_2^3 \\ \chi_1(ba)c_3^1 & \chi_1(ba)c_3^2 & \chi_1(ba)c_3^3 \end{vmatrix} = \chi_1^3(ba)\cdot \begin{vmatrix} c_1^1 & c_1^2 & c_1^3 \\ c_2^1 & c_2^2 & c_2^3 \\ c_3^1 & c_3^2 & c_3^3 \end{vmatrix},$$

где

$$\chi_1 = e^{\lambda x+\mu y+\nu z}, \quad \chi_2 = x+\nu_1 z, \quad \chi_3 = \mu_2 y+\nu_2 z, \quad \chi_1(ba)=\chi_1(b)-\chi_1(a),$$
$$\chi_{12}(ba) = \chi_1(b)\chi_2(b)-\chi_1(a)\chi_2(a), \quad \chi_{13}(ba) = \chi_1(b)\chi_3(b)-\chi_1(a)\chi_3(a),$$
$$\Xi^1(ab) = \chi_1(ba)c_1^1+\chi_{12}(ba)c_2^1+\chi_{13}(ba)c_3^1, \quad \Xi^2(ab) = \chi_1(ba)c_1^2+\chi_{12}(ba)c_2^2+\chi_{13}(ba)c_3^2,$$
$$\Xi^3(ab) = \chi_1(ba)c_1^3+\chi_{12}(ba)c_2^3+\chi_{13}(ba)c_3^3,$$

причем a и b — произвольные точки из открытого и плотного подмножества в R^3. Из теоремы 1 тогда следует, что матрица $\begin{pmatrix} c_1^1 & c_1^2 & c_1^3 \\ c_2^1 & c_2^2 & c_2^3 \\ c_3^1 & c_3^2 & c_3^3 \end{pmatrix}$ коэффициентов, входящих в операторы (2.1), невырождена. Поэтому в этих операторах вводим такую линейную замену координат, чтобы

$$c_1^1\partial_x+c_1^2\partial_y+c_1^3\partial_z=\partial_{x'}, \quad c_2^1\partial_x+c_2^2\partial_y+c_2^3\partial_z=\partial_{y'}, \quad c_3^1\partial_x+c_3^2\partial_y+c_3^3\partial_z=\partial_{z'},$$

после чего комбинируем X_1, X_2 и X_3, затем возвращаемся к прежним обозначениям координат, операторов и постоянных (в новых обозначениях неравенства на коэффициенты сохраняются):

$$X_1=\partial_x, \quad X_2=\partial_y, \quad X_3=\partial_z,$$
$$Y_1 = e^{\lambda x+\mu y+\nu z}[\partial_x+(m_1x+m_2y+m_3z)\partial_y+(n_1x+n_2y+n_3z)\partial_z],$$
$$Y_2 = e^{\lambda x+\mu y+\nu z}\partial_y, \quad Y_3 = e^{\lambda x+\mu y+\nu z}\partial_z, \quad \lambda^2+\mu^2+\nu^2\neq 0.$$

Далее воспользуемся условием замкнутости коммутатора алгебры Ли, согласно которому любой коммутатор является линейной комбинацией базисных операторов X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3. Очевидна замкнутость коммутаторов $[X_1,Y_1]$, $[X_1,Y_2]$, $[X_1,Y_3]$, $[X_2,Y_1]$, $[X_2,Y_2]$, $[X_2,Y_3]$, $[X_3,Y_1]$, $[X_3,Y_2]$, $[X_3,Y_3]$. Проверяем остальные коммутаторы. Сначала вычисляем коммутатор $[Y_2,Y_3]$:

$$[Y_2,Y_3] = e^{2(\lambda x+\mu y+\nu z)}(\mu\partial_z-\nu\partial_y).$$

Требуя замкнутость, получаем $\mu=\nu=0$, $\lambda\neq 0$. Тогда операторы примут вид:

$$X_1=\partial_x, \quad X_2=\partial_y, \quad X_3=\partial_z,$$
$$Y_1 = e^{\lambda x}[\partial_x+(m_1x+m_2y+m_3z)\partial_y+(n_1x+n_2y+n_3z)\partial_z],$$
$$Y_2 = e^{\lambda x}\partial_y, \quad Y_3 = e^{\lambda x}\partial_z, \quad \lambda\neq 0.$$

Вычисляем оставшиеся коммутаторы:

$$[Y_1,Y_2] = e^{2\lambda x}[\lambda\partial_y-m_2\partial_y-n_2\partial_z], \quad [Y_1,Y_3] = e^{2\lambda x}[\lambda\partial_z-m_3\partial_y-n_3\partial_z].$$

Из замкнутости вытекает: $m_2=\lambda, m_3=0, n_2=0, n_3=\lambda$, поэтому базисные операторы принимают вид:

$$X_1=\partial_x, \quad X_2=\partial_y, \quad X_3=\partial_z,$$
$$Y_1 = e^{\lambda x}[\partial_x+(m_1x+\lambda y)\partial_y+(n_1x+\lambda z)\partial_z], \quad Y_2=e^{\lambda x}\partial_y, \quad Y_3=e^{\lambda x}\partial_z.$$

Далее в полученных операторах вводим замену координат $x' = \lambda x, y' = \lambda y + m_1 x, z' = = \lambda z + n_1 x$, после чего их линейно комбинируем и возвращаемся к прежним обозначениям координат и операторов, в результате имеем алгебру Ли локально ограниченно дважды транзитивной группы Ли преобразований:

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = \partial_z, \quad Y_1 = e^x[\partial_x + y\partial_y + z\partial_z], \quad Y_2 = e^x\partial_y, \quad Y_3 = e^x\partial_z. \quad (2.3)$$

Возвращаемся теперь к системе базисных операторов (2.2), в которой сначала вводим замену координат $x' = x + \nu_1 z$, $y' = \mu_2 y + \nu_2 z$, $z' = z$. После переобозначения координат, коэффициентов и линейной комбинации операторов, имеем:

$$\begin{gathered}
X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = \partial_z,\\
Y_1 = (x(g_2^1 x + p_2^1 y + q_2^1 z) + y(g_3^1 x + p_3^1 y + q_3^1 z) + g_1^1 x + p_1^1 y + q_1^1 z)\partial_x\\
+ (x(g_2^2 x + p_2^2 y + q_2^2 z) + y(g_3^2 x + p_3^2 y + q_3^2 z) + g_1^2 x + p_1^2 y + q_1^2 z)\partial_y\\
+ (x(g_2^3 x + p_2^3 y + q_2^3 z) + y(g_3^3 x + p_3^3 y + q_3^3 z) + g_1^3 x + p_1^3 y + q_1^3 z)\partial_z,\\
Y_2 = (g_2^1 x + p_2^1 y + q_2^1 z)\partial_x + (g_2^2 x + p_2^2 y + q_2^2 z)\partial_y + (g_2^3 x + p_2^3 y + q_2^3 z)\partial_z,\\
Y_3 = (g_3^1 x + p_3^1 y + q_3^1 z)\partial_x + (g_3^2 x + p_3^2 y + q_3^2 z)\partial_y + (g_3^3 x + p_3^3 y + q_3^3 z)\partial_z.
\end{gathered} \quad (2.4)$$

Исследуем теперь на замкнутость коммутаторы операторов в системе (2.4). Начнем с проверки коммутатора $[X_3, Y_1]$:

$$\begin{gathered}
[X_3, Y_1] = (q_2^1 y + q_3^1 y)\partial_x + (q_2^2 y + q_3^2 y)\partial_y + (q_2^3 y + q_3^3 y)\partial_z + q_1^1\partial_x + q_1^2\partial_y + q_1^3\partial_z =\\
= \alpha Y_1 + \beta Y_2 + q_1^1 X_1 + q_1^2 X_2 + q_1^3 X_3.
\end{gathered}$$

Сравнивая левую и правую части этого равенства, получаем:

$$\begin{gathered}
q_2^1 = \alpha g_2^1 + \beta g_3^1, \quad q_3^1 = \alpha p_2^1 + \beta p_3^1, \quad 0 = \alpha q_2^1 + \beta q_3^1, \quad q_2^2 = \alpha g_2^2 + \beta g_3^2, \quad q_3^2 = \alpha p_2^2 + \beta p_3^2,\\
0 = \alpha q_2^2 + \beta q_3^2, \quad q_2^3 = \alpha g_2^3 + \beta g_3^3, \quad q_3^3 = \alpha p_2^3 + \beta p_3^3, \quad 0 = \alpha q_2^3 + \beta q_3^3.
\end{gathered}$$

Имеем два случая: 1) $\alpha = \beta = 0$; 2) $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$.

1) Пусть сначала $\alpha = \beta = 0$. Тогда система (2.4) принимает следующий вид:

$$\begin{gathered}
X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = \partial_z,\\
Y_1 = (x(g_2^1 x + p_2^1 y) + y(g_3^1 x + p_3^1 y) + g_1^1 x + p_1^1 y + q_1^1 z)\partial_x\\
+ (x(g_2^2 x + p_2^2 y) + y(g_3^2 x + p_3^2 y) + g_1^2 x + p_1^2 y + q_1^2 z)\partial_y\\
+ (x(g_2^3 x + p_2^3 y) + y(g_3^3 x + p_3^3 y) + g_1^3 x + p_1^3 y + q_1^3 z)\partial_z,\\
Y_2 = (g_2^1 x + p_2^1 y)\partial_x + (g_2^2 x + p_2^2 y)\partial_y + (g_2^3 x + p_2^3 y)\partial_z,\\
Y_3 = (g_3^1 x + p_3^1 y)\partial_x + (g_3^2 x + p_3^2 y)\partial_y + (g_3^3 x + p_3^3 y)\partial_z.
\end{gathered} \quad (2.5)$$

2) Пусть теперь $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$. Тогда, с точностью до переобозначения операторов, координат и коэффициентов, можно считать $\beta \neq 0$. Далее комбинируем операторы: $\alpha Y_2 + \beta Y_3$, после чего вводим замену координат: $x' = x + ay$, $y' = y'$, $z' =$, $a = -\alpha/\beta$. Затем возвращаясь к прежним обозначениям координат и коэффициентов, получаем:

$$\begin{gathered}
X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = \partial_z,\\
Y_1 = (g_2^1 x^2 + p_2^1 xy + q_2^1 xz + g_1^1 x + p_1^1 y + q_1^1 z)\partial_x\\
+ (g_2^2 x^2 + p_2^2 xy + q_2^2 xz + g_1^2 x + p_1^2 y + q_1^2 z)\partial_y\\
+ (g_2^3 x^2 + p_2^3 xy + q_2^3 xz + g_1^3 x + p_1^3 y + q_1^3 z)\partial_z, \quad Y_2 = q_2^1 x\partial_x + q_2^2 x\partial_y + q_2^3 x\partial_z,\\
Y_3 = (g_3^1 x + p_3^1 y + q_3^1 z)\partial_x + (g_3^2 x + p_3^2 y + q_3^2 z)\partial_y + (g_3^3 x + p_3^3 y + q_3^3 z)\partial_z.
\end{gathered} \quad (2.6)$$

Далее исследуем на замкнутость коммутатор $[X_2, Y_1]$ для систем операторов (2.5) и (2.6):

$$[X_2, Y_1] = (p_2^1 x + g_3^1 x + 2p_3^1 y + g_1^1)\partial_x + (p_2^2 x + g_3^2 x + 2p_3^2 y + g_1^2)\partial_y$$
$$+ (p_2^3 x + g_3^3 x + 2p_3^3 y + g_1^3)\partial_z = \gamma Y_2 + (\delta + 1)Y_3 + p_1^1 X_1 + p_1^2 X_2 + p_1^3 X_3;$$
$$[X_2, Y_1] = (p_2^1 x + p_1^1)\partial_x + (p_2^2 x + p_1^2)\partial_y + (p_2^3 x + p_1^3)\partial_z =$$
$$= \gamma Y_2 + \delta Y_3 + p_1^1 X_1 + p_1^2 X_2 + p_1^3 X_3.$$

Сравнивая коэффициенты, получаем: для (2.5):

$$p_2^1 = \gamma g_2^1 + \delta g_3^1, \quad p_3^1 = \gamma p_2^1 + \delta p_3^1, \quad p_2^2 = \gamma g_2^2 + \delta g_3^2,$$
$$p_3^2 = \gamma p_2^2 + \delta p_3^2, \quad p_2^3 = \gamma g_2^3 + \delta g_3^3, \quad p_3^3 = \gamma p_2^3 + \delta p_3^3;$$

для (2.6):

$$p_2^1 = \gamma q_2^1 + \delta g_3^1, \quad 0 = \delta p_3^1, \quad 0 = \delta q_3^1, \quad p_2^2 = \gamma q_2^2 + \delta g_3^2, \quad 0 = \delta p_3^2,$$
$$0 = \delta q_3^2, \quad p_2^3 = \gamma q_2^3 + \delta g_3^3, \quad 0 = \delta p_3^3, \quad 0 = \delta q_3^3.$$

В результате имеем:
для (2.5) при $\gamma = \delta = 0$:

$$\begin{gathered} X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = \partial_z, \quad Y_1 = (g_2^1 x^2 + g_3^1 xy + g_1^1 x + p_1^1 y + q_1^1 z)\partial_x \\ + (g_2^2 x^2 + g_3^2 xy + g_1^2 x + p_1^2 y + q_1^2 z)\partial_y + (g_2^3 x^2 + g_3^3 y + g_1^3 x + p_1^3 y + q_1^3 z)\partial_z, \\ Y_2 = g_2^1 x\partial_x + g_2^2 x\partial_y + g_2^3 x\partial_z, \quad Y_3 = g_3^1 x\partial_x + g_3^2 x\partial_y + g_3^3 x\partial_z; \end{gathered} \tag{2.7}$$

для (2.5) при $\gamma^2 + \delta^2 \neq 0$, с точностью до переобозначения переменных считаем $\gamma \neq 0$, линейно комбинируем операторы Y_2, Y_3 в вводим замену координат $x' = x$, $y' = y + bx$, $z' = z$:

$$\begin{gathered} X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = \partial_z, \quad Y_1 = (g_2^1 x^2 + g_3^1 xy + g_1^1 x + p_1^1 y + q_1^1 z)\partial_x \\ + (g_2^2 x^2 + g_3^2 xy + g_1^2 x + p_1^2 y + q_1^2 z)\partial_y + (g_2^3 x^2 + g_3^3 xy + g_1^3 x + p_1^3 y + q_1^3 z)\partial_z, \\ Y_2 = p_3^1 y\partial_x + p_3^2 y\partial_y + p_3^3 y\partial_z, \quad Y_3 = g_3^1 x\partial_x + g_3^2 x\partial_y + g_3^3 x\partial_z; \end{gathered} \tag{2.8}$$

для (2.6) при $\delta = 0$ вводим замену координат $x' = x$, $y' = y$, $z' = z + \gamma y$:

$$\begin{gathered} X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = \partial_z, \quad Y_1 = (g_2^1 x^2 + q_2^1 xz + g_1^1 x + p_1^1 y + q_1^1 z)\partial_x \\ + (g_2^2 x^2 + q_2^2 xz + g_1^2 x + p_1^2 y + q_1^2 z)\partial_y + (g_2^3 x^2 + q_2^3 xz + g_1^3 x + p_1^3 y + q_1^3 z)\partial_z, \\ Y_2 = q_2^1 x\partial_x + q_2^2 x\partial_y + q_2^3 x\partial_z, \\ Y_3 = (g_3^1 x + p_3^1 y + q_3^1 z)\partial_x + (g_3^2 x + p_3^2 y + q_3^2 z)\partial_y + (g_3^3 x + p_3^3 y + q_3^3 z)\partial_z; \end{gathered} \tag{2.9}$$

для (2.6) при $\delta \neq 0$ линейно комбинируем операторы Y_2, Y_3:

$$\begin{gathered} X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = \partial_z, \quad Y_1 = (g_2^1 x^2 + p_2^1 xy + q_2^1 xz + g_1^1 x + p_1^1 y + q_1^1 z)\partial_x \\ + (g_2^2 x^2 + p_2^2 xy + q_2^2 xz + g_1^2 x + p_1^2 y + q_1^2 z)\partial_y \\ + (g_2^3 x^2 + p_2^3 xy + q_2^3 xz + g_1^3 x + p_1^3 y + q_1^3 z)\partial_z, \\ Y_2 = q_2^1 x\partial_x + q_2^2 x\partial_y + q_2^3 x\partial_z, \quad Y_3 = p_2^1 x\partial_x + p_2^2 x\partial_y + p_2^3 x\partial_z. \end{gathered} \tag{2.10}$$

Затем исследуем на замкнутость коммутатор $[X_1, Y_1]$ для систем (2.7)–(2.10). Для (2.7) и (2.10) требование замкнутости этого коммутатора приводит к равенству $Y_3 = 0$, что недопустимо.

Для (2.8):

$$[X_1, Y_1] = (2g_2^1 x + g_3^1 y + g_1^1)\partial_x + (2g_2^2 x + g_3^2 y + g_1^2)\partial_y + (2g_2^3 x + g_3^3 y + g_1^3)\partial_z = \\ = \mu Y_2 + \nu Y_3 + g_1^1 X_1 + g_1^2 X_2 + g_1^3 X_3.$$

Сравнивая коэффициенты, будем иметь: $2g_2^1 = \nu g_3^1$, $g_3^1 = \mu p_3^1$, $2g_2^2 = \nu g_3^2$, $g_3^2 = \mu p_3^2$, $2g_2^3 = \nu g_3^3$, $g_3^3 = \mu p_3^3$. Очевидно, $\mu \neq 0$, поскольку иначе $Y_3 = 0$. Далее вводим замену координат $x' = x + cy$, $y' = y$, $z' = z$, $c = \nu/2$, после чего возвращаемся к прежним обозначениям координат и коэффициентов и линейно комбинируем операторы Y_2, Y_3:

$$\begin{gathered} X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = \partial_z, \quad Y_1 = (g_3^1 xy + g_1^1 x + p_1^1 y + q_1^1 z)\partial_x \\ + (g_3^2 xy + g_1^2 x + p_1^2 y + q_1^2 z)\partial_y + (g_3^3 xy + g_1^3 x + p_1^3 y + q_1^3 z)\partial_z, \\ Y_2 = g_3^1 y\partial_x + g_3^2 y\partial_y + g_3^3 y\partial_z, \quad Y_3 = g_3^1 x\partial_x + g_3^2 x\partial_y + g_3^3 x\partial_z. \end{gathered} \tag{2.11}$$

Для (2.9):

$$[X_1, Y_1] = (2g_2^1 x + q_3^1 z + g_1^1)\partial_x + (2g_2^2 x + q_3^2 z + g_1^2)\partial_y + (2g_2^3 x + q_3^3 z + g_1^3)\partial_z = \\ = \mu Y_2 + \nu Y_3 + g_1^1 X_1 + g_1^2 X_2 + g_1^3 X_3.$$

Сравнивая коэффициенты, получаем $\nu \neq 0$, и

$$\begin{gathered} X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = \partial_z, \quad Y_1 = (g_2^1 x^2 + q_2^1 xz + g_1^1 x + p_1^1 y + q_1^1 z)\partial_x \\ + (g_2^2 x^2 + q_2^2 xz + g_1^2 x + p_1^2 y + q_1^2 z)\partial_y + (g_2^3 x^2 + q_2^3 xz + g_1^3 x + p_1^3 y + q_1^3 z)\partial_z, \\ Y_2 = q_2^1 x\partial_x + q_2^2 x\partial_y + q_2^3 x\partial_z, \\ Y_3 = (2g_2^1 x + q_2^1 z)\partial_x + (2g_2^2 x + q_2^2 z)\partial_y + (2g_2^3 x + q_2^3 z)\partial_z. \end{gathered} \tag{2.12}$$

Далее исследуем замкнутость коммутаторов $[Y_2, Y_1]$ и $[Y_3, Y_1]$ для системы операторов (2.11). Вычисляя эти коммутаторы, получаем слагаемые $(g_3^1)^2 y^2 \partial_x$ и $(g_3^2)^2 x^2 \partial_y$, которые не входят в операторы системы (2.11), поэтому $g_3^1 = g_3^2 = 0$. Значит система (2.11) принимает вид:

$$\begin{gathered} X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = \partial_z, \quad Y_1 = (g_1^1 x + p_1^1 y + q_1^1 z)\partial_x \\ + (g_1^2 x + p_1^2 y + q_1^2 z)\partial_y + (g_3^3 xy + g_1^3 x + p_1^3 y + q_1^3 z)\partial_z, \quad Y_2 = g_3^3 y\partial_z, \quad Y_3 = g_3^3 x\partial_z. \end{gathered}$$

Несложно заметить, что для данной системы теорема 1 не выполняется, то есть из нее нельзя выделить алгебру Ли ограниченно точно дважды транзитивной группы Ли преобразований.

Остается теперь проверить замкнутость коммутатора $[Y_3, Y_1]$ для системы операторов (2.12). Вычисляя этот коммутатор, получаем слагаемые $(q_2^1)^2 z^2 \partial_x$ и $(q_2^3)^2 z^2 \partial_z$, которые не входят в операторы системы (2.12), поэтому $q_2^1 = q_2^3 = 0$, тогда

$$\begin{gathered} X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = \partial_z, \quad Y_1 = (g_2^1 x^2 + g_1^1 x + p_1^1 y + q_1^1 z)\partial_x \\ + (g_2^2 x^2 + q_2^2 xz + g_1^2 x + p_1^2 y + q_1^2 z)\partial_y + (g_2^3 x^2 + g_1^3 x + p_1^3 y + q_1^3 z)\partial_z, \\ Y_2 = x\partial_y, \quad Y_3 = 2g_2^1 x\partial_x + (2g_2^2 x + q_2^2 z)\partial_y + 2g_2^3 x\partial_z, \quad q_2^2 \neq 0. \end{gathered}$$

Потом вычисляя коммутатор $[Y_2, Y_1]$, имеем $g_2^1 = p_1^1 = 0$. Линейно комбинируя операторы, для предыдущей системы получаем:

$$\begin{gathered} X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = \partial_z, \quad Y_1 = (g_1^1 x + q_1^1 z)\partial_x \\ + (g_2^2 x^2 + q_2^2 xz + p_1^2 y + q_1^2 z)\partial_y + (g_2^3 x^2 + g_1^3 x + p_1^3 y + q_1^3 z)\partial_z, \\ Y_2 = x\partial_y, \quad Y_3 = q_2^2 z\partial_y + 2g_2^3 x\partial_z, \quad q_2^2 \neq 0, \quad g_2^3 \neq 0. \end{gathered}$$

Вычисляя, наконец, коммутатор $[Y_3, Y_1]$, получаем слагаемое $g_2^3 q_2^2 x^2 \partial_y$ и при этом отсутствует слагаемое $xz\partial_y$, поэтому $g_2^3 q_2^2 = 0$, что недопустимо. Значит из системы (2.12) нельзя выделить алгебру Ли локально ограниченно точно дважды транзитивной группы Ли преобразований.

Нами доказана теорема.

Теорема 2. *Алгебра Ли, опредаляемая матрицами* **5**, *локально ограниченно точно дважды транзитивной группы Ли преобразований пространства R^3, полученной расширением группы параллельных переносов этого же пространства, единственна и с точностью до замены координат и изоморфизма имеет базис* (2.3).

§ 3. Алгебры Ли, определяемые матрицами 6

Предложение 2. *Система дифференциальных уравнений* (0.1) *с одновременно ненулевыми матрицами T_1, T_2 и T_3, принимающих вид* **6** *из введения, в подходящем базисе имеет два решения: при $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 \neq 0$:*

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{A} &= ((c_1^1 + c_2^1(x + \nu_1 z + (y+z)^2/2) + c_3^1(z + \mu_2 y))e^{\lambda x + \mu y + \nu z} + a_1^1)\overrightarrow{\xi} \\
&\quad + (c_2^1 e^{\lambda x + \mu y + \nu z} + a_2^1)\overrightarrow{\eta} + ((c_3^1 + c_2^1(y+z))e^{\lambda x + \mu y + \nu z} + a_3^1)\overrightarrow{\zeta}, \\
\overrightarrow{B} &= ((c_1^2 + c_2^2(x + \nu_1 z + (y+z)^2/2) + c_3^2(z + \mu_2 y))e^{\lambda x + \mu y + \nu z} + a_1^2)\overrightarrow{\xi} \\
&\quad + (c_2^2 e^{\lambda x + \mu y + \nu z} + a_2^2)\overrightarrow{\eta} + ((c_3^2 + c_2^2(y+z))e^{\lambda x + \mu y + \nu z} + a_3^2)\overrightarrow{\zeta}, \\
\overrightarrow{C} &= ((c_1^3 + c_2^3(x + \nu_1 z + (y+z)^2/2) + c_3^3(z + \mu_2 y))e^{\lambda x + \mu y + \nu z} + a_1^3)\overrightarrow{\xi} \\
&\quad + (c_2^3 e^{\lambda x + \mu y + \nu z} + a_2^3)\overrightarrow{\eta} + ((c_3^3 + c_2^3(y+z))e^{\lambda x + \mu y + \nu z} + a_3^3)\overrightarrow{\zeta}, \quad \nu_2 = 1;
\end{aligned}$$

при $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 0$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{A} &= (g_1^1 x + p_1^1 y + q_1^1 z + a_2^1(x + \nu_1 z) + a_3^1(y+z) + (p_3^1 + a_2^1)(y+z)^2/2 \\
&\quad + p_2^1(x + \nu_1 z)(y+z) + p_2^1(y+z)^3/6 + a_1^1)\overrightarrow{\xi} \\
&\quad + (p_2^1(y+z) + a_2^1)\overrightarrow{\eta} + (p_2^1(x + \nu_1 z) + (p_3^1 + a_2^1)(y+z) + p_2^1(y+z)^2/2 + a_3^1)\overrightarrow{\zeta}, \\
\overrightarrow{B} &= (g_1^2 x + p_1^2 y + q_1^2 z + a_2^2(x + \nu_1 z) + a_3^2(y+z) + (p_3^2 + a_2^2)(y+z)^2/2 \\
&\quad + p_2^2(x + \nu_1 z)(y+z) + p_2^2(y+z)^3/6 + a_1^2)\overrightarrow{\xi} \\
&\quad + (p_2^2(y+z) + a_2^2)\overrightarrow{\eta} + (p_2^2(x + \nu_1 z) + (p_3^2 + a_2^2)(y+z) + p_2^2(y+z)^2/2 + a_3^2)\overrightarrow{\zeta}, \\
\overrightarrow{C} &= (g_1^3 x + p_1^3 y + q_1^3 z + a_2^3(x + \nu_1 z) + a_3^3(y+z) + (p_3^3 + a_2^3)(y+z)^2/2 \\
&\quad + p_2^3(x + \nu_1 z)(y+z) + p_2^3(y+z)^3/6 + a_1^3)\overrightarrow{\xi} \\
&\quad + (p_2^3(y+z) + a_2^3)\overrightarrow{\eta} + (p_2^3(x + \nu_1 z) + (p_3^3 + a_2^3)(y+z) + p_2^3(y+z)^2/2 + a_3^3)\overrightarrow{\zeta}, \\
&\nu_2 = 1, \quad \mu_2 = 1, \quad p_2^1 = q_2^1 = g_3^1, \quad g_2^1 = 0, \quad q_3^1 = \nu_1 p_2^1 + p_3^1, \\
&p_2^2 = q_2^2 = g_3^2, \quad g_2^2 = 0, \quad q_3^2 = \nu_1 p_2^2 + p_3^2, \quad p_2^3 = q_2^3 = g_3^3, \quad g_2^3 = 0, \quad q_3^3 = \nu_1 p_2^3 + p_3^3,
\end{aligned}$$

где g_j^i, q_j^i, p_j^i, a_j^i, c_j^i — постоянные, $i, j = 1, 2, 3$, $\overrightarrow{\xi} = (1, 0, 0)^T$, $\overrightarrow{\eta} = (0, 1, 0)^T$, $\overrightarrow{\zeta} = (0, 0, 1)^T$.

Из решений, содержащихся в предложении 2, ниже будут выделены алгебры Ли. Сначала запишем базисные операторы (1.2) *шестимерных линейных пространств*, при этом операторы Y_1, Y_2 и Y_3 комбинируем с операторами X_1, X_2 и X_3 так, чтобы исчезли свободные члены:

$$
\begin{gathered}
X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = \partial_z, \quad Y_1 = e^{\lambda x+\mu y+\nu z}[c_1^1\partial_x + c_1^2\partial_y + c_1^3\partial_z \\
+ (x+\nu_1 z + (y+z)^2/2)(c_2^1\partial_x + c_2^2\partial_y + c_2^3\partial_z) + (z+\mu_2 y)(c_3^1\partial_x + c_3^2\partial_y + c_3^3\partial_z)], \\
Y_2 = e^{\lambda x+\mu y+\nu z}[c_2^1\partial_x + c_2^2\partial_y + c_2^3\partial_z], \\
Y_3 = e^{\lambda x+\mu y+\nu z}[(y+z)(c_2^1\partial_x + c_2^2\partial_y + c_2^3\partial_z) + c_3^1\partial_x + c_3^2\partial_y + c_3^3\partial_z];
\end{gathered} \tag{3.1}
$$

$$
\begin{gathered}
X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = \partial_z, \\
Y_1 = (g_1^1 x + p_1^1 y + q_1^1 z + a_2^1(x+\nu_1 z) + a_3^1(y+z) + (p_3^1 + a_2^1)(y+z)^2/2 \\
+ p_2^1(x+\nu_1 z)(y+z) + p_2^1(y+z)^3/6)\partial_x \\
+ (g_1^2 x + p_1^2 y + q_1^2 z + a_2^2(x+\nu_1 z) + a_3^2(y+z) + (p_3^2 + a_2^2)(y+z)^2/2 \\
+ p_2^2(x+\nu_1 z)(y+z) + p_2^2(y+z)^3/6)\partial_y \\
+ (g_1^3 x + p_1^3 y + q_1^3 z + a_2^3(x+\nu_1 z) + a_3^3(y+z) + (p_3^3 + a_2^3)(y+z)^2/2 \\
+ p_2^3(x+\nu_1 z)(y+z) + p_2^3(y+z)^3/6)\partial_z, \\
Y_2 = p_2^1(y+z)\partial_x + p_2^2(y+z)\partial_y + p_2^3(y+z)\partial_z, \\
Y_3 = (p_2^1(x+\nu_1 z) + (p_3^1 + a_2^1)(y+z) + p_2^1(y+z)^2/2)\partial_x \\
+ (p_2^2(x+\nu_1 z) + (p_3^2 + a_2^2)(y+z) + p_2^2(y+z)^2/2)\partial_y \\
+ (p_2^3(x+\nu_1 z) + (p_3^3 + a_2^3)(y+z) + p_2^3(y+z)^2/2)\partial_z.
\end{gathered} \tag{3.2}
$$

Запишем определитель матрицы $K(b) - K(a)$ для базисных операторов (3.1):

$$
|K(b)-K(a)| =
$$
$$
= \begin{vmatrix} \Xi^1(ab) & \Xi^2(ab) & \Xi^3(ab) \\ \chi_1(ba)c_2^1 & \chi_1(ba)c_2^2 & \chi_1(ba)c_2^3 \\ \chi_1(ba)c_3^1 + \chi_{14}(ba)c_2^1 & \chi_1(ba)c_3^2 + \chi_{14}(ba)c_2^2 & \chi_1(ba)c_3^3 + \chi_{14}(ba)c_2^3 \end{vmatrix} = \chi_1^3(ba) \begin{vmatrix} c_1^1 & c_1^2 & c_1^3 \\ c_2^1 & c_2^2 & c_2^3 \\ c_3^1 & c_3^2 & c_3^3 \end{vmatrix},
$$

где

$$
\begin{gathered}
\chi_1 = e^{\lambda x+\mu y+\nu z}, \quad \chi_2 = x + \nu_1 z + (y+z)^2/2, \quad \chi_3 = z + \mu_2 y, \\
\chi_4 = y + z, \quad \chi_1(ba) = \chi_1(b) - \chi_1(a), \\
\chi_{12}(ba) = \chi_1(b)\chi_2(b) - \chi_1(a)\chi_2(a), \quad \chi_{13}(ba) = \chi_1(b)\chi_3(b) - \chi_1(a)\chi_3(a), \\
\chi_{14}(ba) = \chi_1(b)\chi_4(b) - \chi_1(a)\chi_4(a), \quad \Xi^1(ab) = \chi_1(ba)c_1^1 + \chi_{12}(ba)c_2^1 + \chi_{13}(ba)c_3^1, \\
\Xi^2(ab) = \chi_1(ba)c_1^2 + \chi_{12}(ba)c_2^2 + \chi_{13}(ba)c_3^2, \quad \Xi^3(ab) = \chi_1(ba)c_1^3 + \chi_{12}(ba)c_2^3 + \chi_{13}(ba)c_3^3,
\end{gathered}
$$

причем a и b — произвольные точки из открытого и плотного подмножества в R^3.

Из теоремы 1 следует, что матрица $\begin{pmatrix} c_1^1 & c_1^2 & c_1^3 \\ c_2^1 & c_2^2 & c_2^3 \\ c_3^1 & c_3^2 & c_3^3 \end{pmatrix}$ невырождена, поэтому в операторах (3.1) вводим такую линейную замену координат, чтобы

$$
c_1^1\partial_x + c_1^2\partial_y + c_1^3\partial_z = \partial_{x'}, \quad c_2^1\partial_x + c_2^2\partial_y + c_2^3\partial_z = \partial_{y'}, \quad c_3^1\partial_x + c_3^2\partial_y + c_3^3\partial_z = \partial_{z'}.
$$

В операторах (3.2) вводим замену координат $x' = x + \nu_1 z$, $y' = y + z$, $z' = z$, тогда $\partial_x = \partial_{x'}$, $\partial_y = \partial_{y'}$, $\partial_z = \nu_1\partial_{x'} + \partial_{y'} + \partial_{z'}$. Затем комбинируем операторы X_1, X_2, X_3, после чего возвращаемся к прежним обозначениям координат, операторов и коэффициентов (в новых обозначениях неравенства на коэффициенты сохраняются):

$$
\begin{gathered}
X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = \partial_z, \quad Y_1 = e^{\lambda x+\mu y+\nu z}[\partial_x + \\
+ (m_1 x + m_2 y + m_3 z + (n_1 x + n_2 y + n_3 z)^2/2)\partial_y + (n_1 x + n_2 y + n_3 z)\partial_z], \\
Y_2 = e^{\lambda x+\mu y+\nu z}\partial_y, \quad Y_3 = e^{\lambda x+\mu y+\nu z}[(n_1 x + n_2 y + n_3 z)\partial_y + \partial_z], \quad \mu_2 = 1;
\end{gathered} \tag{3.3}
$$

$$\begin{gathered}X_1=\partial_x,\quad X_2=\partial_y,\quad X_3=\partial_z,\quad Y_1=e^{\lambda x+\mu y+\nu z}[\partial_x+\\ +(m_1x+m_2y+m_3z+(n_1x+n_2y+n_3z)^2/2)\partial_y+(l_1x+l_2y+l_3z)\partial_z],\\ Y_2=e^{\lambda x+\mu y+\nu z}\partial_y,\quad Y_3=e^{\lambda x+\mu y+\nu z}[(n_1x+n_2y+n_3z)\partial_y+\partial_z],\quad \mu_2\neq 1;\end{gathered}\tag{3.4}$$

$$\begin{gathered}X_1=\partial_x,\quad X_2=\partial_y,\quad X_3=\partial_z,\\ Y_1=(g_1^1x+p_1^1y+q_1^1z+p_3^1y^2/2+p_2^1xy+p_2^1y^3/6)\partial_x\\ +(g_1^2x+p_1^2y+q_1^2z+p_3^2y^2/2+p_2^2xy+p_2^2y^3/6)\partial_y\\ +(g_1^3x+p_1^3y+q_1^3z+p_3^3y^2/2+p_2^3xy+p_2^3y^3/6)\partial_z,\quad Y_2=p_2^1y\partial_x+p_2^2y\partial_y+p_2^3y\partial_z,\\ Y_3=(p_2^1x+p_3^1y+p_2^1y^2/2)\partial_x+(p_2^2x+p_3^2y+p_2^2y^2/2)\partial_y+(p_2^3x+p_3^3y+p_2^3y^2/2)\partial_z.\end{gathered}\tag{3.5}$$

Далее воспользуемся условием замкнутости коммутаторов и теоремой 1 для выделения нужных шестимерных алгебр Ли. Легко заметить, что коммутаторы $[X_1,Y_1]$, $[X_2,Y_1]$, $[X_3,Y_1]$, $[Y_1,Y_2]$, $[Y_1,Y_3]$ и $[Y_2,Y_3]$ замкнуты.

Исследуем на замкнутость коммутаторы $[Y_1,Y_2]$, $[Y_1,Y_3]$ и $[Y_2,Y_3]$ для систем (3.3) и (3.4). Сначала вычисляем коммутаторы $[Y_1,Y_2]$ и $[Y_2,Y_3]$:

$$\begin{gathered}[Y_1,Y_2]=e^{2(\lambda x+\mu y+\nu z)}[[\lambda+\mu(m_1x+m_2y+m_3z+(n_1x+n_2y+n_3z)^2/2)\\ +\nu(n_1x+n_2y+n_3z)]\partial_y]-\mu[\partial_x+(m_1x+m_2y+m_3z+(n_1x+n_2y+n_3z)^2/2)\partial_y\\ +(n_1x+n_2y+n_3z)\partial_z]-(m_2+n_2(n_1x+n_2y+n_3z))\partial_y-n_2\partial_z]=0;\\ [Y_1,Y_2]=e^{2(\lambda x+\mu y+\nu z)}[[\lambda+\mu(m_1x+m_2y+m_3z+(n_1x+n_2y+n_3z)^2/2)\\ +\nu(l_1x+l_2y+l_3z)]\partial_y]-\mu[\partial_x+(m_1x+m_2y+m_3z+(n_1x+n_2y+n_3z)^2/2)\partial_y\\ +(l_1x+l_2y+l_3z)\partial_z]-(m_2+n_2(n_1x+n_2y+n_3z))\partial_y-l_2\partial_z]=0;\\ [Y_2,Y_3]=e^{2(\lambda x+\mu y+\nu z)}[\mu[(n_1x+n_2y+n_3z)\partial_y+\partial_z]+n_2\partial_y\\ -\mu(n_1x+n_2y+n_3z)]\partial_y-\nu\partial_y]=0.\end{gathered}$$

В результате системы (3.3) и (3.4) принимают вид:

$$\begin{gathered}X_1=\partial_x,\quad X_2=\partial_y,\quad X_3=\partial_z,\\ Y_1=e^{\lambda x}[\partial_x+(m_1x+\lambda y+m_3z+(n_1x+n_3z)^2/2)\partial_y+(n_1x+n_3z)\partial_z],\\ Y_2=e^{\lambda x}\partial_y,\quad Y_3=e^{\lambda x}[(n_1x+n_3z)\partial_y+\partial_z],\quad \mu_2=1,\quad \lambda\neq 0;\\ X_1=\partial_x,\quad X_2=\partial_y,\quad X_3=\partial_z,\\ Y_1=e^{\lambda x}[\partial_x+(m_1x+\lambda y+m_3z+(n_1x+n_3z)^2/2)\partial_y+(l_1x+l_3z)\partial_z],\\ Y_2=e^{\lambda x}\partial_y,\quad Y_3=e^{\lambda x}[(n_1x+n_3z)\partial_y+\partial_z],\quad \mu_2\neq 1,\quad \lambda\neq 0.\end{gathered}$$

Остается проверить на замкнутость коммутатор $[Y_1,Y_3]$:

$$\begin{gathered}[Y_1,Y_3]=e^{2\lambda x}[\lambda\partial_z+n_1\partial_y-m_3\partial_y-n_3\partial_z]=0;\\ [Y_1,Y_3]=e^{2\lambda x}[\lambda\partial_z+n_1\partial_y+n_3(l_1x+l_3z)\partial_y-(m_3+n_3(n_1x+n_3z)\partial_y-l_3\partial_z]=0.\end{gathered}$$

Сравнивая коэффициенты, получаем:

$$\begin{gathered}X_1=\partial_x,\quad X_2=\partial_y,\quad X_3=\partial_z,\\ Y_1=e^{\lambda x}[\partial_x+(m_1x+\lambda y+n_1z+(n_1x+\lambda z)^2/2)\partial_y+(n_1x+\lambda z)\partial_z],\\ Y_2=e^{\lambda x}\partial_y,\quad Y_3=e^{\lambda x}[(n_1x+\lambda z)\partial_y+\partial_z],\quad \mu_2=1,\quad \lambda\neq 0;\end{gathered}\tag{3.6}$$

$$\begin{gathered}X_1=\partial_x,\quad X_2=\partial_y,\quad X_3=\partial_z,\\ Y_1=e^{\lambda x}[\partial_x+(m_1x+\lambda y+n_1z+(n_1x)^2/2)\partial_y+(l_1x+\lambda z)\partial_z],\\ Y_2=e^{\lambda x}\partial_y,\quad Y_3=e^{\lambda x}[n_1x\partial_y+\partial_z],\quad \mu_2\neq 1,\quad \lambda\neq 0.\end{gathered}$$

Дополнительная проверка второй системы операторов на замкнутость коммутаторов $[X_1, Y_1]$, $[X_2, Y_1]$, $[X_3, Y_3]$, приводит к результату:

$$\begin{gathered}X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = \partial_z,\\ Y_1 = e^{\lambda x}[\partial_x + (m_1 x + \lambda y)\partial_y + (l_1 x + \lambda z)\partial_z],\\ Y_2 = e^{\lambda x}\partial_y, \quad Y_3 = e^{\lambda x}\partial_z, \quad \mu_2 \neq 1, \quad \lambda \neq 0.\end{gathered} \tag{3.7}$$

В системе (3.6) вводим замену координат $x' = \lambda x$, $y' = \lambda y + m_1 x$, $z' = \lambda z + n_1 x$, после чего линейно комбинируем операторы и возвращаемся к прежним обозначениям координат и операторов:

$$\begin{gathered}X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = \partial_z,\\ Y_1 = e^{x}[\partial_x + (y + z^2/2)\partial_y + z\partial_z], \quad Y_2 = e^x\partial_y, \quad Y_3 = e^x[z\partial_y + \partial_z].\end{gathered} \tag{3.8}$$

В системе (3.7) вводим замену $x' = \lambda x$, $y' = \lambda y + m_1 x$, $z' = \lambda z + n_1 x$, после чего линейно комбинируем операторы и возвращаемся к прежним обозначениям координат. В результате получаем алгебру (2.3).

Приступим теперь к упрощению системы (3.5). Вычисляя коммутатор $[Y_1, Y_3]$, получаем слагаемое $p_2^2 y^4 \partial_y$, которое не компенсируется линейной комбинацией операторов, поэтому $p_2^2 = 0$. Тогда в Y_2, с точностью до переобозначения $x \leftrightarrow z$, можно считать $p_2^1 \neq 0$, поэтому вводим замену координат: $\partial_{x'} = p_2^1\partial_x + p_2^3\partial_z$, $\partial_{y'} = \partial_y$, $\partial_{z'} = \partial_z$, в результате получаем:

$$\begin{gathered}X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = \partial_z,\\ Y_1 = (g_1^1 x + p_1^1 y + q_1^1 z + p_3^1 y^2/2 + p_2^1 xy + y^3/6)\partial_x\\ + (g_1^2 x + p_1^2 y + q_1^2 z + p_3^2 y^2/2)\partial_y + (g_1^3 x + p_1^3 y + q_1^3 z + p_3^3 y^2/2)\partial_z,\\ Y_2 = y\partial_x, \quad Y_3 = (p_2^1 x + p_3^1 y + y^2/2)\partial_x + p_3^2 y\partial_y + p_3^3 y\partial_z, \quad p_2^1 \neq 0.\end{gathered}$$

Замкнутость коммутатора $[Y_2, Y_3]$ очевидна. Теперь проверим коммутатор $[Y_1, Y_2]$:

$$\begin{aligned}[Y_1, Y_2] &= (g_1^2 x + p_1^2 y + q_1^2 z + p_3^2 y^2/2)\partial_x - g_1^1 y\partial_x - p_2^1 y^2\partial_x - g_1^2 y\partial_y - g_1^3 y\partial_z\\ &= (p_1^2 - g_1^1 - \alpha p_3^1)Y_2 + \alpha Y_3.\end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты перед операторами дифференцирования, получаем $g_1^2 = \alpha p_2^1$, $q_1^2 = 0$, $p_3^2 - 2p_2^1 = \alpha$, $-g_1^2 = \alpha p_3^2$, $-g_1^3 = \alpha p_3^3$. В итоге имеем две системы:

$$\begin{gathered}X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = \partial_z,\\ Y_1 = (g_1^1 x + q_1^1 z + p_3^1 y^2/2 + p_2^1 xy + y^3/6)\partial_x\\ + (p_1^2 y + p_2^1 y^2)\partial_y + (p_1^3 y + q_1^3 z + p_3^3 y^2/2)\partial_z,\\ Y_2 = y\partial_x, \quad Y_3 = (p_2^1 x + y^2/2)\partial_x + 2p_2^1 y\partial_y + p_3^3 y\partial_z, \quad p_2^1 \neq 0;\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = \partial_z,\\ Y_1 = (g_1^1 x + q_1^1 z + p_3^1 y^2/2 - \alpha xy/3 + y^3/6)\partial_x\\ + (-\alpha^2 x/3 + p_1^2 y + \alpha y^2/6)\partial_y + (-\alpha p_3^3 x + p_1^3 y + q_1^3 z + p_3^3 y^2/2)\partial_z,\\ Y_2 = y\partial_x, \quad Y_3 = (-\alpha x/3 + y^2/2)\partial_x + \alpha y/3\partial_y + p_3^3 y\partial_z, \quad \alpha \neq 0.\end{gathered}$$

Теперь проверим коммутатор $[Y_1, Y_3]$. Для второй системы тогда получим $\alpha = 0$, что недопустимо. Первая система принимает вид:

$$\begin{gathered}X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = \partial_z,\\ Y_1 = (p_2^1 xy + y^3/6)\partial_x + p_2^1 y^2\partial_y + (p_1^3 y + p_3^3 y^2/2)\partial_z,\\ Y_2 = y\partial_x, \quad Y_3 = (p_2^1 x + y^2/2)\partial_x + 2p_2^1 y\partial_y + p_3^3 y\partial_z, \quad p_2^1 \neq 0.\end{gathered}$$

Вводя замену координат $x = 2p_2^1 x'$, $y = 2p_2^1 y'$, $z = z' + p_3^3 y'$, затем линейно комбинируем операторы, переобозначаем коэффициенты, в прежних обозначениях координат и операторов получаем

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = \partial_z,$$
$$Y_1 = (xy + y^3/3)\partial_x + y^2\partial_y + by\partial_z, \quad Y_2 = y\partial_x, \quad Y_3 = (x + y^2)\partial_x + 2y\partial_y.$$

Согласно теореме 1 $b \neq 0$, поэтому вводим замену $x' = x$, $y' = y$, $z' = bz$, значит предыдущая система примет следующий вид:

$$\begin{gathered} X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = \partial_z, \\ Y_1 = (xy + y^3/3)\partial_x + y^2\partial_y + y\partial_z, \quad Y_2 = y\partial_x, \quad Y_3 = (x + y^2)\partial_x + 2y\partial_y. \end{gathered} \tag{3.9}$$

Нами доказана теорема.

Теорема 3. *Алгебра Ли, определяемая матрицами* **6**, *локально ограниченно точно дважды транзитивной группы Ли преобразований пространства R^3, полученной расширением группы параллельных переносов этого же пространства, изоморфна одной из алгебр Ли из списка:* (2.3), (3.8), (3.9). *Базисные операторы* (2.3), (3.8), (3.9) *записаны в подходящих координатах.*

§ 4. Исследование найденных алгебр Ли

Сначала приводятся определения по работе [24]. Идеал $L^{(1)} = [L, L]$ называется первым коммутантом алгебры Ли L, $L^{(2)} = [L^{(1)}, L^{(1)}]$ — вторым коммутантом алгебры Ли L, а $L^{(k+1)} = [L^{(k)}, L^{(k)}]$ — $(k+1)$-м коммутантом алгебры Ли L. В итоге возникает ряд коммутантов:

$$L \supset L^{(1)} \supset L^{(2)} \supset \ldots \supset L^{(k)} \supset \ldots$$

Алгебра Ли L называется разрешимой, если ее ряд коммутантов заканчивается нулевым идеалом. Непосредственной проверкой убеждаемся в справедливости теоремы:

Теорема 4. *Алгебры Ли* (2.3), (3.8) *разрешимы и разлагаются в полупрямую сумму коммутативного идеала $N = \{Y_1, Y_2, Y_3\}$ и коммутативной подалгебры $S = \{X_1, X_2, X_3\}$: $L = N \oplus S$.*

Отметим, что результат теоремы 4 можно получить и иначе, воспользовавшись полной классификацией шестимерных разрешимых вещественных алгебр Ли [25–28]. На практике это означает нахождение представлений векторными полями уже известных разрешимых алгебра Ли. Данная задача является технически сложной и долгой.

Несложно установить, что алгебра Ли (3.9) не разрешима и не полупроста.

Теорема 5. *Алгебра Ли* (3.9) *представима в виде полупрямой суммы коммутативного идеала $N = \{X_1, X_3, Y_2\}$ и подалгебры $S = \{-Y_1/2, Y_3, 2X_2 + 2Y_2\}$, изоморфной $sl(2, R)$: $L = N \oplus S$.*

Заметим, что структура этой алгебры Ли описана в работе [29].

Доказательство этих теорем сводится к анализу коммутаторов базисных векторных полей исследуемых алгебр Ли.

Заключение

В данной работе полностью решена задача локального расширения группы параллельных переносов пространства R^3 до локально ограниченно точно дважды транзитивной группы Ли преобразований этого же пространства для случая, когда матрицы T_1, T_2, T_3 одновременно ненулевые и принимают вид **5** и **6** из введения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Deré J., Origlia M. Simply transitive NIL-affine actions of solvable Lie groups // Forum Mathematicum. 2021. Vol. 33. Issue 5. P. 1349–1367. https://doi.org/10.1515/forum-2020-0114
2. Bădiţoiu G. Classification of homogeneous Einstein metrics on pseudo-hyperbolic spaces // Transformation Groups. 2020. Vol. 25. No. 2. P. 335–361. https://doi.org/10.1007/s00031-020-09556-6
3. Globke W. On compact homogeneous $G_{2(2)}$-manifolds // Journal of the Australian Mathematical Society. 2021. Vol. 110. Issue 1. P. 71–80. https://doi.org/10.1017/S1446788719000296
4. Belliart M. A differentiable classification of certain locally free actions of Lie groups // Israel Journal of Mathematics. 2018. Vol. 224. Issue 1. P. 315–342. https://doi.org/10.1007/s11856-018-1649-5
5. Arvanitoyeorgos A., Souris N. P., Statha M. Geodesic orbit metrics in a class of homogeneous bundles over quaternionic Stiefel manifolds // Journal of Geometry and Physics. 2021. Vol. 165. 104223. https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2021.104223
6. Magazev A. A. Constructing a complete integral of the Hamilton–Jacobi equation on pseudo-Riemannian spaces with simply transitive groups of motions // Mathematical Physics, Analysis and Geometry. 2021. Vol. 24. No. 2. Article number: 11. https://doi.org/10.1007/s11040-021-09385-3
7. Avdeev R. On extended weight monoids of spherical homogeneous spaces // Transformation Groups. 2021. Vol. 26. No. 2. P. 403–431. https://doi.org/10.1007/s00031-021-09642-3
8. Peraza J., Paternain M., Reisenberger M. On the classical and quantum Geroch group // Classical and Quantum Gravity. 2021. Vol. 38. No. 1. P. 015013. https://doi.org/10.1088/1361-6382/abc6ba
9. Stephani H., Kramer D., MacCallum M., Hoenselaers C., Herlt E. Exact solutions of Einstein's field equations. Cambridge: Cambridge University Press, 2009. https://doi.org/10.1017/CBO9780511535185
10. Горбацевич В. В. О расширении транзитивных действий групп Ли // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 2017. Т. 81. Вып. 6. С. 86–99. https://doi.org/10.4213/im8506
11. Barbot T., Maquera C. Nil-Anosov actions // Mathematische Zeitschrift. 2017. Vol. 287. No. 3–4. P. 1279–1305. https://doi.org/10.1007/s00209-017-1868-1
12. Tits J. Sur les groupes doublement transitifs continus // Commentarii Mathematici Helvetici. 1952. Vol. 26. P. 203–224 (in French). http://eudml.org/doc/139046
13. Tits J. Sur les groupes doublement transitifs continus: correction et compléments // Commentarii Mathematici Helvetici. 1956. Vol. 30. P. 234–240 (in French). http://eudml.org/doc/139124
14. Kramer L. Two-transitive Lie groups // Journal für die reine und angewandte Mathematik. 2003. No. 563. P. 83–113. https://doi.org/10.1515/crll.2003.085
15. Glasner Y., Gulko D. D. Non-split linear sharply 2-transitive groups // Proceedings of the American Mathematical Society. 2021. Vol. 149. No. 6. P. 2305–2317. https://doi.org/10.1090/proc/15360
16. Kakkar V., Lal R., Lal R., Yadav A. C. Generalized right near domains and sharply 2-transitive groups // Journal of Algebra and Its Applications. 2021. Vol. 20. No. 10. P. 2150176. https://doi.org/10.1142/S0219498821501760
17. Михайличенко Г. Г. Групповая симметрия физических структур. Барнаул: БГПУ, 2003.
18. Кыров В. А. К вопросу о локальном расширении группы параллельных переносов трехмерного пространства // Владикавказский математический журнал. 2021. Т. 23. Вып. 1. С. 32–42. https://doi.org/10.46698/q6524-1245-2359-m
19. Fels M., Olver P. J. Moving coframes: I. A practical algorithm // Acta Applicandae Mathematicae. 1998. Vol. 51. No. 2. P. 161–213. https://doi.org/10.1023/A:1005878210297

20. Fels M., Olver P. J. Moving coframes: II. A practical algorithm // Acta Applicandae Mathematicae. 1999. Vol. 55. No. 2. P. 127–208. https://doi.org/10.1023/A:1006195823000
21. Широков И. В. Конструирование алгебр Ли дифференциальных операторов первого порядка // Известия высших учебных заведений. Физика. 1997. Т. 40. № 6. С. 25–32.
22. Кыров В. А., Михайличенко Г. Г. Вложение аддитивной двуметрической феноменологически симметричной геометрии двух множеств ранга $(2, 2)$ в двуметрические феноменологически симметричные геометрии двух множеств ранга $(3, 2)$ // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2018. Т. 28. Вып. 3. С. 305–327. https://doi.org/10.20537/vm180304
23. Bredon G. E. Introduction to compact transformation groups. New York: Academic Press, 1972.
24. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
25. Морозов В. В. Классификация нильпотентных алгебр Ли шестого порядка // Известия высших учебных заведений. Математика. 1958. № 4. С. 161–171. http://mi.mathnet.ru/ivm2960
26. Мубаракзянов Г. М. О разрешимых алгебрах Ли // Известия высших учебных заведений. Математика. 1963. № 1. С. 114–123. http://mi.mathnet.ru/ivm2141
27. Мубаракзянов Г. М. Классификация разрешимых алгебр Ли шестого порядка с одним ненильпотентным базисным элементом // Известия высших учебных заведений. Математика. 1963. № 4. С. 104–116. http://mi.mathnet.ru/ivm8672
28. Turkowski P. Solvable Lie algebras of dimension six // Journal of Mathematical Physics. 1990. Vol. 31. Issue 6. P. 1344–1350. https://doi.org/10.1063/1.528721
29. Turkowski P. Low-dimensional real Lie algebras // Journal of Mathematical Physics. 1988. Vol. 29. Issue 10. P. 2139–2144. https://doi.org/10.1063/1.528140

Поступила в редакцию 19.09.2021

Принята к публикации 10.01.2022

Кыров Владимир Александрович, к. ф.-м. н., доцент, кафедра математики, физики и информатики, Горно-Алтайский государственный университет, 649000, Россия, г. Горно-Алтайск, ул. Ленкина, 1.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5925-7706
E-mail: kyrovVA@yandex.ru

Цитирование: В. А. Кыров. О локальном расширении группы параллельных переносов в трехмерном пространстве // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2022. Т. 32. Вып. 1. С. 62–80.

MATHEMATICS 2022. Vol. 32. Issue 1. Pp. 62–80.

V. A. Kyrov

On local extension of the group of parallel translations in three-dimensional space

Keywords: Lie group of transformations, locally boundedly sharply doubly transitive Lie group of transformations, Lie algebra, Jordan form of a matrix.

MSC2020: 22E99

DOI: 10.35634/vm220105

In this paper, we solve the problem of extending the group of parallel translations of a three-dimensional space to a locally boundedly sharply doubly transitive Lie group of transformations of the same space. Local bounded sharply double transitivity means that there is a single transformation that takes an arbitrary pair of non-coincident points from some open neighborhood to almost any pair of points from the same neighborhood. In this article, the problem posed is solved for two cases related to Jordan forms of third-order matrices. These matrices are used to write systems of linear differential equations, whose solutions lead to the basic operators of a six-dimensional linear space. Requiring the closedness of the commutators of these operators, we select the Lie algebras. Checking also the condition of local bounded sharply double transitivity, we obtain the Lie algebras of locally boundedly sharply doubly transitive Lie groups of transformations of a three-dimensional space with a subgroup of parallel translations. As a result, three Lie algebras are obtained, two of which can be represented as a half-line sum of a commutative three-dimensional ideal and a three-dimensional Lie subalgebra, and the third one decomposes into a half-line sum of a commutative three-dimensional ideal and a subalgebra isomorphic to $sl(2, R)$.

REFERENCES

1. Deré J., Origlia M. Simply transitive NIL-affine actions of solvable Lie groups, *Forum Mathematicum*, 2021, vol. 33, issue 5, pp. 1349–1367. https://doi.org/10.1515/forum-2020-0114
2. Băditoiu G. Classification of homogeneous Einstein metrics on pseudo-hyperbolic spaces, *Transformation Groups*, 2020, vol. 25, issue 2, pp. 335–361. https://doi.org/10.1007/s00031-020-09556-6
3. Globke W. On compact homogeneous $G_{2(2)}$-manifolds, *Journal of the Australian Mathematical Society*, 2021, vol. 110, issue 1, pp. 71–80. https://doi.org/10.1017/S1446788719000296
4. Belliart M. A differentiable classification of certain locally free actions of Lie groups, *Israel Journal of Mathematics*, 2018, vol. 224, issue 1, pp. 315–342. https://doi.org/10.1007/s11856-018-1649-5
5. Arvanitoyeorgos A., Souris N. P., Statha M. Geodesic orbit metrics in a class of homogeneous bundles over quaternionic Stiefel manifolds, *Journal of Geometry and Physics*, 2021, vol. 165, 104223. https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2021.104223
6. Magazev A. A. Constructing a complete integral of the Hamilton–Jacobi equation on pseudo-Riemannian spaces with simply transitive groups of motions, *Mathematical Physics, Analysis and Geometry*, 2021, vol. 24, no. 2, article number: 11. https://doi.org/10.1007/s11040-021-09385-3
7. Avdeev R. On extended weight monoids of spherical homogeneous spaces, *Transformation Groups*, 2021, vol. 26, no. 2, pp. 403–431. https://doi.org/10.1007/s00031-021-09642-3
8. Peraza J., Paternain M., Reisenberger M. On the classical and quantum Geroch group, *Classical and Quantum Gravity*, 2021, vol. 38, no. 1, p. 015013. https://doi.org/10.1088/1361-6382/abc6ba
9. Stephani H., Kramer D., MacCallum M., Hoenselaers C., Herlt E. *Exact solutions of Einstein's field equations*, Cambridge: Cambridge University Press, 2009. https://doi.org/10.1017/CBO9780511535185
10. Gorbatsevich V. V. Extension of transitive actions of Lie groups, *Izvestiya: Mathematics*, 2017, vol. 81, no. 6, pp. 1143–1154. https://doi.org/10.1070/IM8506
11. Barbot T., Maquera C. Nil-Anosov actions, *Mathematische Zeitschrift*, 2017, vol. 287, no. 3–4, pp. 1279–1305. https://doi.org/10.1007/s00209-017-1868-1
12. Tits J. Sur les groupes doublement transitifs continus, *Commentarii Mathematici Helvetici*, 1952, vol. 26, pp. 203–224 (in French). http://eudml.org/doc/139046

13. Tits J. Sur les groupes doublement transitifs continus: correction et compléments, *Commentarii Mathematici Helvetici*, 1956, vol. 30, pp. 234–240 (in French). http://eudml.org/doc/139124
14. Kramer L. Two-transitive Lie groups, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 2003, no. 563, pp. 83–113. https://doi.org/10.1515/crll.2003.085
15. Glasner Y., Gulko D. D. Non-split linear sharply 2-transitive groups, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 2021, vol. 149, no. 6, pp. 2305–2317. https://doi.org/10.1090/proc/15360
16. Kakkar V., Lal R., Lal R., Yadav A. C. Generalized right near domains and sharply 2-transitive groups, *Journal of Algebra and Its Applications*, 2021, vol. 20, no. 10, pp. 2150176. https://doi.org/10.1142/S0219498821501760
17. Mikhailichenko G. G. *Gruppovaya simmetriya fizicheskikh struktur* (Group symmetry of physical structures), Barnaul: Barnaul State Pedagogical Institute, 2003.
18. Kyrov V. A. To the question of local extension of the parallel translations group of three-dimensional space, *Vladikavkazskii Matematicheskii Zhurnal*, 2021, vol. 23, issue 1, pp. 32–47 (in Russian). https://doi.org/10.46698/q6524-1245-2359-m
19. Fels M., Olver P. J. Moving coframes: I. A practical algorithm, *Acta Applicandae Mathematicae*, 1998, vol. 51, no. 2, pp. 161–213. https://doi.org/10.1023/A:1005878210297
20. Fels M., Olver P. J. Moving coframes: II. A practical algorithm, *Acta Applicandae Mathematicae*, 1999, vol. 55, no. 2, pp. 127–208. https://doi.org/10.1023/A:1006195823000
21. Shirokov I. V. Constructing Lie algebras of first-order differential operators, *Russian Physics Journal*, 1997, vol. 40, issue 6, pp. 525–530. https://doi.org/10.1007/BF02766382
22. Kyrov V. A., Mikhailichenko G. G. Embedding of an additive two-dimensional phenomenologically symmetric geometry of two sets of rank $(2,2)$ into two-dimensional phenomenologically symmetric geometries of two sets of rank $(3,2)$, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2018, vol. 28, issue 3, pp. 305–327 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm180304
23. Bredon G. E. *Introduction to compact transformation groups*, New York: Academic Press, 1972.
24. Ovsyannikov L. V. *Gruppovoi analiz differentsial'nykh uravnenii* (Group analysis of differential equations), Moscow: Nauka, 1978.
25. Morozov V. V. Classification of nilpotent Lie algebras of the sixth order, *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika*, 1958, no. 4, pp. 161–171 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/ivm2960
26. Mubarakzyanov G. M. On solvable Lie algebras, *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika*, 1963, no. 1, pp. 114–123 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/ivm2141
27. Mubarakzyanov G. M. Classification of solvable Lie algebras of sixth order with a non-nilpotent basis element, *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika*, 1963, no. 4, pp. 104–116 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/ivm8672
28. Turkowski P. Solvable Lie algebras of dimension six, *Journal of Mathematical Physics*, 1990, vol. 31, issue 6, pp. 1344–1350. https://doi.org/10.1063/1.528721
29. Turkowski P. Low-dimensional real Lie algebras, *Journal of Mathematical Physics*, 1988, vol. 29, issue 10, pp. 2139–2144. https://doi.org/10.1063/1.528140

Received 19.09.2021

Accepted 10.01.2022

Vladimir Alexandrovich Kyrov, Candidate of Physics and Mathematics, Assistant Professor, Department of Mathematics, Physics and Informatics, Gorno-Altaisk State University, ul. Lenkina, 1, Gorno-Altaisk, 649000, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5925-7706
E-mail: kyrovVA@yandex.ru

Citation: V. A. Kyrov. On local extension of the group of parallel translations in three-dimensional space, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2022, vol. 32, issue 1, pp. 62–80.