МАТЕМАТИКА 2022. Т. 32. Вып. 1. С. 44–61.

УДК 512.646.7

© *С. П. Кузнецов, В. В. Мочалов, В. П. Чуев*

О ТЕОРЕМЕ ПАУЛИ В АЛГЕБРАХ КЛИФФОРДА НЕЧЕТНОЙ РАЗМЕРНОСТИ

В действительных алгебрах Клиффорда нечетной размерности исследуется теорема Паули. В алгебрах Клиффорда $R_{3,0}$ и $R_{5,0}$ дается алгоритм построения оператора Паули. Этот алгоритм переносится на произвольную алгебру Клиффорда нечетной размерности $R_{p,q+1}$ ($R_{p+1,q}$). Получена итерационная формула для нахождения оператора Паули. Показано, что проблема построения оператора Паули связана с проблемой делителей нуля в алгебрах Клиффорда. При построении операторов Паули используется два вида сопряжения: сопряжение Клиффорда и сопряжение «реверс». Если $p+q+1 \equiv 3 \pmod 4$, то при построении оператора Паули используется сопряжение Клиффорда, если $p+q+1 \equiv 1 \pmod 4$, то используется сопряжение «реверс».

Ключевые слова: нечетные алгебры Клиффорда, теорема Паули, делители нуля.

DOI: 10.35634/vm220104

Введение

Пусть $R_{p,q}$ — действительная алгебра Клиффорда размерности $m = 2^n$ $(n = p + q)$ с базисом $e_\alpha = e_{i_1} \dots e_{i_k}$, $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n$, где мультииндекс $\alpha = i_1 \dots i_k$ пробегает все подмножества в множестве $\{1,\dots,n\}$, совокупность которых обозначим через Γ_n. При этом для удобства далее будем называть размерностью алгебры Клиффорда число $n = p+q$, а не число 2^n.

Пусть $e_0 = e_\varnothing$ — единица алгебры, $e_1, \dots, e_n$ — порождающий базис, $e_\tau = e_1 \cdot \ldots \cdot e_n = e_{1\dots n}$. Произведение в $R_{p,q}$ определяется соотношением

$$e_i e_j + e_j e_i = 2\delta_{ij}\varepsilon_i, \tag{0.1}$$

где $\varepsilon_i = e_i^2 = e_0$, $i = 1, \dots, p$, $\varepsilon_i = e_i^2 = -e_0$, $i = p+1, \dots, p+q$.

Алгебра $R_{p,q}$ называется четной (нечетной), если n — четное (нечетное) число. Произвольный элемент w алгебры Клиффорда $R_{p,q}$ записывается в виде

$$w = \sum_{\alpha\in\Gamma_n} x_\alpha e_\alpha,$$

где x_α — действительные числа. Множество элементов алгебры Клиффорда, коммутирующих со всеми элементами базиса называется центром. Известно [1, 2], что для нечетной алгебры Клиффорда центр Z имеет вид $x_0 e_0 + x_\tau e_\tau$; для четной алгебры Клиффорда центр представляется в виде $x_0 e_0$.

Обозначим через $R_{p,q}^{(k)}$, $k = 0, \dots, n$, векторные подпространства пространства $R_{p,q}$, натянутые на базисные элементы $e_\alpha = e_{i_1} \dots e_{i_k}$, занумерованные упорядоченными мультииндексами длины k. Элементы из $R_{p,q}^{(k)}$ называются элементами ранга k. Имеем [1, 3]:

$$R_{p,q} = R_{p,q}^{\{0\}} \oplus \ldots \oplus R_{p,q}^{(n)} = R_{p,q}^{even} \oplus R_{p,q}^{odd},$$
$$R_{p,q}^{even} = R_{p,q}^{(0)} \oplus R_{p,q}^{(2)} \oplus \ldots, \quad R_{p,q}^{odd} = R_{p,q}^{(1)} \oplus R_{p,q}^{(3)} \oplus \ldots, \quad \dim R_{p,q}^{(k)} = C_n^k,$$
$$\dim R_{p,q}^{even} = \dim R_{p,q}^{odd} = 2^{n-1},$$

C_n^k — биноминальные коэффициенты. Элементы подпространства $R_{p,q}^{even}$ называются четными элементами, а элементы $R_{p,q}^{odd}$ — нечетными элементами алгебры Клиффорда.

Произвольный элемент алгебры $w \in R_{p,q}$ можно записать в виде суммы элементов рангов от 0 до n: $w = \sum_{k=0}^{n} \overset{k}{w}$. В [1], [2, с. 95–97] введены три операции сопряжения: реверс, четностное сопряжение, клиффордовое сопряжение. Операция сопряжения реверс: $w \to \tilde{w}$ такова, что она обращает порядок следования множителей в произведении генераторов: $(\widetilde{e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_k}}) = e_{i_k} \dots e_{i_2} e_{i_1}$. Для элемента $w \in R_{p,q}$ имеем: $\tilde{w} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \overset{k}{w}$. Операция четностного сопряжения $w \to \hat{w}$ такова, что нечетные элементы умножаются на -1, а четные элементы не меняются: $\hat{w} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \overset{k}{w}$. Клиффордовое сопряжение — это суперпозиция четностного сопряжения и реверса: $w \to \bar{w} = \hat{\tilde{w}}$. Для элемента $w \in R_{p,q}$ имеем: $\bar{w} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} \overset{k}{w}$. Эти операции обладают свойствами [2, с. 95–97]:

$$\tilde{\tilde{w}} = w, \quad \widetilde{(uv)} = \tilde{v} \cdot \tilde{u}, \quad \widetilde{(u+v)} = \tilde{u} + \tilde{v}, \quad \hat{\hat{w}} = w, \quad \widehat{(uv)} = \hat{u}\hat{v}, \quad \widehat{(u+v)} = \hat{u} + \hat{v},$$
$$\bar{\bar{w}} = w, \quad \overline{uv} = \bar{v} \cdot \bar{u}, \quad \overline{u+v} = \bar{u} + \bar{v}.$$

Выражение $e_\alpha U e^\alpha$, где суммирование подразумевается по упорядоченному мультииндексу α длины от 0 до n, $e^\alpha = \varepsilon_\alpha e_\alpha$, называется сверткой. Выражение $\beta_\alpha U \gamma^\alpha$, где $\beta_i, \gamma_i, i = 1, \dots, n$ удовлетворяют (0.1), называется обобщенной сверткой.

В монографии [2], в статьях [4–7] в произвольной алгебре Клиффорда исследуется обобщенная теорема Паули. Получены следующие результаты:

Теорема 1. *Пусть $R_{p,q}$ — действительная четная алгебра Клиффорда. Пусть два множества элементов алгебры Клиффорда $\gamma_i, \beta_i, i = 1, 2, \dots, n$, удовлетворяют соотношениям (0.1). Тогда оба набора порождают базисы алгебры Клиффорда. Кроме того, существует единственный с точностью до умножения на вещественное число элемент алгебры Клиффорда T такой, что $\gamma_i = T^{-1}\beta_i T$, для любого $i = 1, \dots, n$. Более того, $T = H(U) = \frac{1}{2^n}\beta_\alpha U \gamma^\alpha$ представляет собой обобщенную свертку, U — элемент соответственно из множества $\{\gamma_\alpha, \alpha \in I_{even}, |\alpha| - \text{четное}\}$, если $\beta_{1\dots n} \neq -\gamma_{1\dots n}$; $\{\gamma_\alpha, \alpha \in I_{odd}, |\alpha| - \text{нечетное}\}$, если $\beta_{1\dots n} \neq \gamma_{1\dots n}$ такой, что $H(U) \neq 0$.*

Теорема 2. *Пусть $R_{p,q}$ – действительная нечетная алгебра Клиффорда. Пусть два множества элементов алгебры Клиффорда $\gamma_i, \beta_i, i = 1, 2, \dots, n$ удовлетворяют соотношениям (0.1). Тогда для алгебры Клиффорда $R_{p,q}$ сигнатуры $p - q \equiv 1 \pmod 4$ элементы $\gamma_{1\dots n}$, $\beta_{1\dots n}$ либо принимают значения $\pm e_{1\dots n}$ и, соответственно, оба набора образуют базис, либо принимают значения $\pm e_0$ и тогда не образуют базиса. Тогда мы имеем случаи 1)–4). Для алгебры Клиффорда $R_{p,q}$ сигнатуры $p - q \equiv 3 \pmod 4$, элементы $\gamma_{1\dots n}$, $\beta_{1\dots n}$ всегда принимают значения $\pm e_{1\dots n}$ и соответствующие множества образуют базис. В этом случае выполняются 1)–2).*

Существует единственный элемент T алгебры Клиффорда (с точностью до обратного элемента центра алгебры Клиффорда) такой, что

1) $\gamma_\alpha = T^{-1}\beta_\alpha T$ для любого $\alpha = 1, \dots, n \Leftrightarrow \beta_{1\dots n} = \gamma_{1\dots n}$;
2) $\gamma_\alpha = -T^{-1}\beta_\alpha T$ для любого $\alpha = 1, \dots, n \Leftrightarrow \beta_{1\dots n} = -\gamma_{1\dots n}$;
3) $\gamma_\alpha = e_{1\dots n} T^{-1}\beta_\alpha T$ для любого $\alpha = 1, \dots, n \Leftrightarrow \beta_{1\dots n} = e_{1\dots n}\gamma_{1\dots n}$;
4) $\gamma_\alpha = -e_{1\dots n} T^{-1}\beta_\alpha T$ для любого $\alpha = 1, \dots, n \Leftrightarrow \beta_{1\dots n} = -e_{1\dots n}\gamma_{1\dots n}$.

В случае действительной алгебры Клиффорда $R_{p,q}$ сигнатуры $p - q \equiv 1 \pmod 4$, $T = H_{even}(U) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{\alpha \in I_{even}} \beta_\alpha U \gamma^\alpha$, где U — элемент множества $\{\gamma_\alpha + \gamma_\beta, \alpha, \beta \in I_{even}\}$. В случае алгебры Клиффорда $R_{p,q}$ сигнатуры $p - q \equiv 3 \pmod 4$, $T = H_{even}(U)$, где U — такой элемент множества $\{\gamma_\alpha, \alpha, \in I_{even}\}$, что $H_{even}(U) \neq 0$.

В монографии [2], в статьях [6, 8–10] дается приложение теоремы Паули при описании n-мерных спиноров, связи спинорных и ортогональных групп, вводится понятие спиноров Майорана, находится решение коммутаторных уравнений.

В работе [11] для четной алгебры Клиффорда дается другой алгоритм построения оператора Паули. Показано, что построение оператора Паули T связано с проблемой делителей нуля. В отличие от работ Широкова Д. С. [4–7], нахождение оператора Паули не требует перебора элементов из базиса алгебры Клиффорда. В работах [12, 13] этот алгоритм применяется для построения оператора Паули в алгебрах Клиффорда $R_{1,3}$, $R_{0,4}$.

В настоящей работе алгоритм, предложенный в работах [11–13], применяется в нечетных алгебрах Клиффорда. Показано, что построение оператора Паули связано с проблемой делителей нуля. Доказывается, что оператор Паули в нечетных алгебрах Клиффорда $R_{p+1,q}$ ($R_{p,q+1}$) связан с оператором Паули в алгебре Клиффорда $R_{p,q}$ четной размерности.

§ 1. Алгебра $R_{3,0}$

В этом параграфе на примере алгебры Клиффорда $R_{3,0}$ дается метод построения оператора Паули в нечетной алгебре Клиффорда. При этом рассмотрены все возможные случаи, которые возникают в процессе построения.

Алгебра Паули $R_{3,0}$ — это действительная, ассоциативная, некоммутативная алгебра размерности $m = 8$, порожденная векторами e_1, e_2, e_3. Базис алгебры образуют элементы

$$\{e_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma_3} = \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_{12}, e_3, e_{13}, e_{23}, e_{123}\},$$

где e_0 — единица алгебры, $e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = e_0$, $e_{12}^2 = e_{13}^2 = e_{23}^2 = e_{123}^2 = -e_0$.

Произвольный элемент алгебры можно представить в действительной и комплексной форме

$$w = \sum_{\alpha\in\Gamma_3} x_\alpha e_\alpha = \sum_{\alpha\in\Gamma_2} z_\alpha e_\alpha,$$

где $z_0 = x_0e_0 + x_{123}e_{123}$, $z_1 = x_1e_0 + x_{23}e_{123}$, $z_2 = x_2e_0 - x_{13}e_{123}$, $z_{12} = x_{12}e_0 - x_3e_{123}$ — комплексные числа (e_{123} — заменяет мнимую единицу); множество $\{e_0, e_1, e_2, e_{12}\}$ совпадает с базисом алгебры $R_{2,0}$ и обладает теми же свойствами. Клиффордово сопряженный элемент алгебры представим в виде

$$\bar{w} = \sum_{\alpha\in\Gamma_3} x_\alpha \bar{e}_\alpha = \sum_{\alpha\in\Gamma_2} z_\alpha \bar{e}_\alpha.$$

Центр алгебры Z имеет вид $x_0e_0 + x_{123}e_{123}$ и представляет собой комплексное число. Произведение $w\cdot\bar{w} = \bar{w}\cdot w = z_0^2 - z_1^2 - z_2^2 + z_{12}^2 \in Z$. Делители нуля в $R_{3,0}$ определяются равенством: $w\cdot\bar{w} = \bar{w}\cdot w = z_0^2 - z_1^2 - z_2^2 + z_{12}^2 = 0$.

Рассмотрим другой образующий базис $\{e_{\gamma_1}, e_{\gamma_2}, e_{\gamma_3}\}$, элементы которого удовлетворяют условиям:

$$e_{\gamma_1}^2 = e_{\gamma_2}^2 = e_{\gamma_3}^2 = e_0, \quad e_{\gamma_1}e_{\gamma_2} + e_{\gamma_2}e_{\gamma_1} = 0. \tag{1.1}$$

Так как e_0, $e_{123} \in Z$, то для того, чтобы выполнялись условия (1.1), e_{γ_i} должны состоять из элементов пространств $R_{3,0}^{(1)}$ и $R_{3,0}^{(2)}$. Сначала рассмотрим случай, когда e_{γ_i} составлены из элементов первого ранга:

$$e_{\gamma_i} = \sum_{k=1}^{3} \alpha_k^{(i)} e_k, \tag{1.2}$$

где $\alpha_k^{(i)}$ — действительные числа. Элементы (1.2) удовлетворяют равенствам (1.1), если

$$\sum_{k=1}^{3}(\alpha_k^{(i)})^2 = 1, \quad \sum_{k=1}^{3}\alpha_k^{(i)}\alpha_k^{(j)} = 0, \quad i \neq j.$$

Заметим, что $\bar{e}_{\gamma_i} = -e_{\gamma_i}$. В [2, с. 421–425] показано, что $e_{\gamma_1}e_{\gamma_2}e_{\gamma_3} = \pm e_1e_2e_3$.

Найдем оператор Паули T, который имеет обратный T^{-1} и удовлетворяет соотношениям: $Te_i = e_{\gamma_i}T$, $i = 1, 2, 3$. Таким образом, нужно найти такой оператор T, который имеет обратный и удовлетворяет равенствам

$$Te_i = e_{\gamma_i}T, \quad i = 1, 2, 3.$$

Теорема 3. *Пусть в алгебре Клиффорда $R_{3,0}$ элементы нового базиса представимы в виде* (1.2) *и* $e_{\gamma_1}e_{\gamma_2}e_{\gamma_3} = e_1e_2e_3$. *Тогда существует единственный* (*с точностью до комплексного числа*) *элемент алгебры T такой, что $Te_iT^{-1} = e_{\gamma_i}$, $i = 1, 2, 3$. Оператор Паули $T = T_2u$ находится по итерационной формуле*

$$T_1 = e_0 \pm e_{\gamma_1}e_1, \tag{1.3}$$

$$T_2 = T_1 \pm e_{\gamma_2}T_1e_2, \tag{1.4}$$

где в равенстве (1.3) *берется знак плюс, если $\alpha_1^{(1)} \neq -1$; знак минус, если $\alpha_1^{(1)} = -1$; в равенстве* (1.4) *берется знак плюс, если $(\bar{T}_1T_2 + \bar{T}_2T_1) \neq 0$; знак минус, если $(\bar{T}_1T_2 + \bar{T}_2T_1) = 0$; $u = e_0$, если $\alpha_1^{(1)} \neq -1, (\bar{T}_1T_2 + \bar{T}_2T_1) \neq 0$; $u = e_1$, если $\alpha_1^{(1)} \neq -1, (\bar{T}_1T_2 + \bar{T}_2T_1) = 0$; $u = e_2$, если $\alpha_1^{(1)} = -1, (\bar{T}_1T_2 + \bar{T}_2T_1) \neq 0$; $u = e_{12}$, если $\alpha_1^{(1)} = -1, (\bar{T}_1T_2 + \bar{T}_2T_1) = 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем искать оператор T в виде $T = \sum_{\alpha\in\Gamma_2} a_\alpha e_\alpha$, где $a_\alpha \in Z$ — произвольные комплексные числа. Подберем коэффициенты a_α так, чтобы выполнялось соотношение $Te_1 = e_{\gamma_1}T$. Базис $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma_2}$ состоит из 4 элементов $\{e_0, e_1, e_2, e_{12}\}$. Элемент e_1 коммутирует с e_0, e_1 и антикоммутирует с e_2, e_{12}. Обозначим $w_1 = a_0e_0 + a_1e_1$, $v_1 = a_2e_2 + a_{12}e_{12}$.
Имеем

$$(e_1 - e_{\gamma_1})w_1 = (e_1 + e_{\gamma_1})v_1. \tag{1.5}$$

Умножим равенство (1.5) слева на $(\overline{e_1 + e_{\gamma_1}}) = -(e_1 + e_{\gamma_1})$, получим

$$(\overline{e_1 + e_{\gamma_1}})(e_1 - e_{\gamma_1})w_1 = (\overline{e_1 + e_{\gamma_1}})(e_1 + e_{\gamma_1})v_1. \tag{1.6}$$

Заметим, что $(\overline{e_1 + e_{\gamma_1}})(e_1 + e_{\gamma_1}) = -(e_1 + e_{\gamma_1})^2 = -2(1 + \alpha_1^{(1)})e_0 \in Z$. Если $\alpha_1^{(1)} = -1$, то $(\overline{e_1 + e_{\gamma_1}})$ делитель нуля для $(e_1 + e_{\gamma_1})$. В этом случае $(\overline{e_1 - e_{\gamma_1}})$ не является делителем нуля для $(e_1 - e_{\gamma_1})$, так как

$$(\overline{e_1 - e_{\gamma_1}})(e_1 - e_{\gamma_1}) = -(e_1 - e_{\gamma_1})^2 = -(e_1^2 - e_1e_{\gamma_1} - e_{\gamma_1}e_1 + e_{\gamma_1}^2) = -4e_0.$$

Возможны два варианта действий:
а) Если $(\overline{e_1 + e_{\gamma_1}})(e_1 + e_{\gamma_1}) \neq 0$, то из равенства (1.6) находим

$$v_1 = \frac{(e_1 + e_{\gamma_1})(e_1 - e_{\gamma_1})}{(e_1 + e_{\gamma_1})^2}w_1,$$

$$T = \left(1 + \frac{(e_1 + e_{\gamma_1})(e_1 - e_{\gamma_1})}{(e_1 + e_{\gamma_1})^2}\right)w_1 = \frac{2(e_0 + e_{\gamma_1}e_1)}{(e_1 + e_{\gamma_1})^2}w_1 = \frac{2T_1}{(e_1 + e_{\gamma_1})^2}w_1, \quad T_1 = (e_0 + e_{\gamma_1}e_1).$$

б) Если $(\overline{e_1 + e_{\gamma_1}})(e_1 + e_{\gamma_1}) = 0$, то умножим равенство (1.5) слева на $(\overline{e_1 - e_{\gamma_1}}) = -(e_1 - e_{\gamma_1})$.
Имеем цепочку равенств

$$\overline{(e_1 - e_{\gamma_1})}(e_1 - e_{\gamma_1})w_1 = \overline{(e_1 - e_{\gamma_1})}(e_1 + e_{\gamma_1})v_1,$$

$$w_1 = \frac{(e_1 - e_{\gamma_1})(e_1 + e_{\gamma_1})}{(e_1 - e_{\gamma_1})^2}v_1, \quad T = \frac{T_1^*}{2}v_1, \quad T_1^* = (e_0 - e_{\gamma_1}e_1).$$

Для операторов T_1, T_1^* справедливы равенства:

$$e_{\gamma_1}T_1 = T_1e_1, \quad e_{\gamma_1}T_1^* = -T_1^*e_1, \quad \bar{T}_1T_1 = T_1\bar{T}_1 = 2(1+\alpha_1^{(1)})e_0 \neq 0,$$
$$\bar{T}_1^*T_1^* = T_1{}^*\bar{T}_1^* = 4e_0.$$

На втором этапе подберем коэффициенты a_k из w_1 (v_1) так, чтобы $Te_2 = e_{\gamma_2}T$. Если $(\overline{e_1+e_{\gamma_1}})(e_1+e_{\gamma_1}) \neq 0$, то имеем

$$(T_1e_2 - e_{\gamma_2}T_1)a_0e_0 = (T_1e_2 + e_{\gamma_2}T_1)a_1e_1. \tag{1.7}$$

Умножим равенство (1.7) слева на выражение $(\overline{T_1e_2 + e_{\gamma_2}T_1})$, получим

$$(\overline{T_1e_2 + e_{\gamma_2}T_1})(T_1e_2 - e_{\gamma_2}T_1)w_2 = (\overline{T_1e_2 + e_{\gamma_2}T_1})(T_1e_2 + e_{\gamma_2}T_1)v_2,$$

где $w_2 = a_0e_0$, $v_2 = a_1e_1$.

Имеем

$$(\overline{T_1e_2 + e_{\gamma_2}T_1})(T_1e_2 + e_{\gamma_2}T_1) = -(e_2\bar{T}_1 + \bar{T}_1e_{\gamma_2})(T_1e_2 + e_{\gamma_2}T_1) =$$
$$= -(e_2\bar{T}_1T_1e_2 + \bar{T}_1e_{\gamma_2}e_{\gamma_2}T_1 + e_2\bar{T}_1e_{\gamma_2}T_1 + \bar{T}_1e_{\gamma_2}T_1e_2) =$$
$$= -(\bar{T}_1(T_1 + e_{\gamma_2}T_1e_2) + (\bar{T}_1 + e_2\bar{T}_1e_{\gamma_2})T_1) = -(\bar{T}_1T_2 + \bar{T}_2T_1),$$

где $T_2 = T_1 + e_{\gamma_2}T_1e_2 = e_0 + e_{\gamma_1}e_1 + e_{\gamma_2}e_2 + e_{\gamma_2}e_{\gamma_1}e_1e_2$.

Для оператора T_2 справедливы равенства: $e_{\gamma_i}T_2 = T_2e_i$. В самом деле

$$e_{\gamma_1}T_2 = e_{\gamma_1}T_1 + e_{\gamma_1}e_{\gamma_2}T_1e_2 = T_1e_1 - e_{\gamma_2}T_1e_1e_2 = (T_1 + e_{\gamma_2}T_1e_2)e_1 = T_2e_1;$$
$$e_{\gamma_2}T_2 = e_{\gamma_2}T_1 + T_1e_2 = (T_1 + e_{\gamma_2}T_1e_2)e_2 = T_2e_2.$$

Из доказанных равенств следует, что

$$(\bar{T}_1T_2 + \bar{T}_2T_1) = (e_0 + e_1e_{\gamma_1})T_2 + \bar{T}_2(e_0 + e_{\gamma_1}e_1) =$$
$$= T_2 + e_1T_2e_1 + \bar{T}_2 + e_1\bar{T}_2e_1 = (T_2 + \bar{T}_2) + e_1(T_2 + \bar{T}_2)e_1$$

— действительное число. Если $(\bar{T}_1T_2 + \bar{T}_2T_1) \neq 0$, то

$$v_2 = \frac{(\overline{T_1e_2 + e_{\gamma_2}T_1})(T_1e_2 - e_{\gamma_2}T_1)}{(\overline{T_1e_2 + e_{\gamma_2}T_1})(T_1e_2 + e_{\gamma_2}T_1)}w_2.$$

Оператор

$$T = \frac{4T_1\bar{T}_1(T_1 + e_{\gamma_2}T_1e_2)}{(e_1 + e_{\gamma_1})^2(\bar{T}_1T_2 + \bar{T}_2T_1)}a_0e_0 = \frac{4T_2}{\bar{T}_1T_2 + \bar{T}_2T_1}a_0e_0.$$

Покажем, что найденный оператор удовлетворяет равенству $Te_3 = e_{\gamma_3}T$. Воспользуемся равенством $e_1e_2e_3 = e_{\gamma_1}e_{\gamma_2}e_{\gamma_3}$. Отсюда следуют равенства: $e_{\gamma_3} = e_{\gamma_2}e_{\gamma_1}e_1e_2e_3$, $e_{\gamma_3}e_{\gamma_1} = e_{\gamma_2}e_1e_2e_3$, $e_{\gamma_3}e_{\gamma_2} = -e_{\gamma_1}e_1e_2e_3$. Из этих равенств получаем

$$e_{\gamma_3}T_2 = e_{\gamma_3}(e_0 + e_{\gamma_1}e_1 + e_{\gamma_2}e_2 + e_{\gamma_2}e_{\gamma_1}e_1e_2) = e_{\gamma_3}e_0 + e_{\gamma_3}e_{\gamma_1}e_1 + e_{\gamma_3}e_{\gamma_2}e_2 + e_{\gamma_3}e_{\gamma_2}e_{\gamma_1}e_1e_2 =$$
$$= e_{\gamma_2}e_{\gamma_1}e_1e_2e_3 + e_{\gamma_2}e_2e_3 + e_{\gamma_1}e_1e_2 + e_3 = (e_{\gamma_2}e_{\gamma_1}e_1e_2 + e_{\gamma_2}e_2 + e_{\gamma_1}e_1 + e_0)e_3 = T_2e_3.$$

Если $(\bar{T}_1T_2 + \bar{T}_2T_1) = 0$, то равенство (1.7) умножим слева на выражение $(\overline{T_1e_2 - e_{\gamma_2}T_1}) = -(e_2\bar{T}_1 - \bar{T}_1e_{\gamma_2})$. Имеем цепочку равенств

$$(\overline{T_1e_2 - e_{\gamma_2}T_1})(T_1e_2 - e_{\gamma_2}T_1) = -8(1+\alpha_1^{(1)})e_0 \neq 0,$$
$$w_2 + v_2 = \frac{2\bar{T}_1(T_1 - e_{\gamma_2}T_1e_2)}{8(1+\alpha_1^{(1)})e_0}v_2,$$
$$T = \frac{(T_1 - e_{\gamma_2}T_1e_2)}{2(1+\alpha_1^{(1)})e_0}a_1e_1 = \frac{(e_0 + e_{\gamma_1}e_1 - e_{\gamma_2}e_2 - e_{\gamma_2}e_{\gamma_1}e_1e_2)e_1}{2(1+\alpha_1^{(1)})}a_1.$$

Пусть теперь $(\overline{e_1 + e_{\gamma_1}})(e_1 + e_{\gamma_1}) = 0$, тогда на втором этапе имеем

$$(T_1^* e_2 - e_{\gamma_2} T_1^*)(a_2 e_2 + a_{13} e_{13}) = (T_1^* e_2 + e_{\gamma_2} T_1^*)(a_3 e_3 + a_{12} e_{12}). \tag{1.8}$$

Умножим слева равенство (1.8) на выражение $(\overline{T_1^* e_2 + e_{\gamma_2} T_1^*})$, получим

$$(\overline{T_1^* e_2 + e_{\gamma_2} T_1^*})(T_1^* e_2 - e_{\gamma_2} T_1^*) a_2 e_2 = (\overline{T_1^* e_2 + e_{\gamma_2} T_1^*})(T_1^* e_2 + e_{\gamma_2} T_1^*) a_{12} e_{12}.$$

Произведение $(\overline{T_1^* e_2 + e_{\gamma_2} T_1^*})(T_1^* e_2 + e_{\gamma_2} T_1^*) = -(\bar{T}_1^* T_2^* + \bar{T}_2^* T_1^*)$, где $T_2^* = (T_1^* + e_{\gamma_2} T_1^* e_2) =$ $= (e_0 - e_{\gamma_1} e_1 + e_{\gamma_2} e_2 - e_{\gamma_2} e_{\gamma_1} e_1 e_2)$. Для оператора T_2^* справедливы равенства: $e_{\gamma_1} T_2^* = -T_2^* e_1$, $e_{\gamma_2} T_2^* = T_2^* e_2$. Из этих равенств следует, что

$$(\bar{T}_1^* T_2^* + \bar{T}_2^* T_1^*) = -(T_2^* + e_1 T_2^* e_1 + \bar{T}_2^* + e_1 \bar{T}_2^* e_1) = -((T_2^{\cdot *} + \hat{T}_2^*) + e_1 (T_2^* + \hat{T}_2^*) e_1).$$

Если $(\bar{T}_1^* T_2^* + \bar{T}_2^* T_1^*) \neq 0$, то

$$T = \frac{4(e_0 - e_{\gamma_1} e_1 + e_{\gamma_2} e_2 - e_{\gamma_2} e_{\gamma_1} e_1 e_2) e_2}{\bar{T}_1^* T_2^* + \bar{T}_2^* T_1^{\cdot *}} a_2.$$

Если $(\bar{T}_1^* T_2^* + \bar{T}_2^* T_1^*) = 0$, то равенство (1.8) умножим слева на выражение $(\overline{T_1^* e_2 - e_{\gamma_2} T_1^*})$. Заметим, что произведение $(\overline{T_1^* e_2 - e_{\gamma_2} T_1^*})(T_1^* e_2 - e_{\gamma_2} T_1^*) = 16 e_0$. В этом случае оператор

$$T = \frac{(e_0 - e_{\gamma_1} e_1 - e_{\gamma_2} e_2 + e_{\gamma_2} e_{\gamma_1} e_1 e_2) e_{12}}{4} a_{12}.$$

Таким образом,
1) если $(\overline{e_1 + e_{\gamma_1}})(e_1 + e_{\gamma_1}) \neq 0$, $(\bar{T}_1 T_2 + \bar{T}_2 T_1) \neq 0$, то

$$T = \frac{4(e_0 + e_{\gamma_1} e_1 + e_{\gamma_2} e_2 + e_{\gamma_2} e_{\gamma_1} e_1 e_2)}{\bar{T}_1 T_2 + \bar{T}_2 T_1} a_0 e_0.$$

2) если $(\overline{e_1 + e_{\gamma_1}})(e_1 + e_{\gamma_1}) \neq 0$, $(\bar{T}_1 T_2 + \bar{T}_2 T_1) = 0$, то

$$T = \frac{(e_0 + e_{\gamma_1} e_1 - e_{\gamma_2} e_2 - e_{\gamma_2} e_{\gamma_1} e_1 e_2) e_1}{2(1 + \alpha_1^{(1)})} a_1.$$

3) если $(\overline{e_1 + e_{\gamma_1}})(e_1 + e_{\gamma_1}) = 0$, $(\bar{T}_1^* T_2^* + \bar{T}_2^* T_1^*) \neq 0$, то

$$T = \frac{4(e_0 - e_{\gamma_1} e_1 + e_{\gamma_2} e_2 - e_{\gamma_2} e_{\gamma_1} e_1 e_2) e_2}{\bar{T}_1^* T_2^* + \bar{T}_2^* T_1^{\cdot *}} a_2.$$

4) если $(\overline{e_1 + e_{\gamma_1}})(e_1 + e_{\gamma_1}) = 0$, $(\bar{T}_1 T_2 + \bar{T}_2 T_1) = 0$, то

$$T = \frac{(e_0 - e_{\gamma_1} e_1 - e_{\gamma_2} e_2 + e_{\gamma_2} e_{\gamma_1} e_1 e_2) e_{12}}{4} a_{12}. \qquad \square$$

Замечание 1. Если в качестве базиса взять элементы $e'_{\gamma_i} = -e_{\gamma_i}$, то $e'_{\gamma_1} e'_{\gamma_2} e'_{\gamma_3} = -e_1 e_2 e_3$. Оператор Паули удовлетворяет равенствам $T e_i = -e_{\gamma_i} T$, $i = 1, 2, 3$. Имеем теорему.

Теорема 4. *Пусть в алгебре Клиффорда $R_{3,0}$ элементы нового базиса представимы в виде $e'_{\gamma_i} = -e_{\gamma_i}$ и $e'_{\gamma_1} e'_{\gamma_2} e'_{\gamma_3} = -e_1 e_2 e_3$. Тогда существует единственный (с точностью до комплексного числа) элемент алгебры T такой, что $T e_i T^{-1} = -e_{\gamma_i}$, $i = 1, 2, 3$. Оператор Паули $T = T_2 u$ находится по итерационной формуле*

$$T_1 = e_0 \mp e_{\gamma_1} e_1, \quad T_2 = T_1 \mp e_{\gamma_2} T_1 e_2,$$

где в первом равенстве берется знак минус, если $\alpha_1^1 \neq 1$, знак плюс, если $\alpha_1^1 = 1$; во втором равенстве берется знак минус, если $(\bar{T}_1 T_2 + \bar{T}_2 T_1) \neq 0$, знак плюс, если $(\bar{T}_1 T_2 + \bar{T}_2 T_1) = 0$; $u = e_0$, если $\alpha_1^{(1)} \neq 1$, $(\bar{T}_1 T_2 + \bar{T}_2 T_1) \neq 0$; $u = e_1$, если $\alpha_1^{(1)} \neq 1$, $(\bar{T}_1 T_2 + \bar{T}_2 T_1) = 0$; $u = e_2$, если $\alpha_1^{(1)} = 1$, $(\bar{T}_1 T_2 + \bar{T}_2 T_1) \neq 0$; $u = e_{12}$, если $\alpha_1^{(1)} = 1$, $(\bar{T}_1 T_2 + \bar{T}_2 T_1) = 0$.

Замечание 2. Пусть теперь элементы e_{γ_i} составлены из элементов второго ранга:

$$e_{\gamma_i} = \alpha_{12}^{(i)} e_{12} + \alpha_{13}^{(i)} e_{13} + \alpha_{23}^{(i)} e_{23}. \tag{1.9}$$

Элементы (1.9) удовлетворяют равенствам (1.1), если

$$(\alpha_{12}^{(i)})^2 + (\alpha_{13}^{(i)})^2 + (\alpha_{23}^{(i)})^2 = 1, \quad \alpha_{12}^{(i)}\alpha_{12}^{(j)} + \alpha_{13}^{(i)}\alpha_{13}^{(j)} + \alpha_{23}^{(i)}\alpha_{23}^{(j)} = 0, \quad i \neq j.$$

Заметим, что $\bar{e}_{\gamma_i} = -e_{\gamma_i}$, однако эти элементы не образуют базиса в алгебре Клиффорда $R_{3,0}$. Умножим равенства (1.9) на e_{123}, тогда имеем

$$e'_{\gamma_i} = e_{123} e_{\gamma_i} = -\alpha_{12}^{(i)} e_3 + \alpha_{13}^{(i)} e_2 + \alpha_{23}^{(i)} e_1.$$

Получили элементы пространства $R_{3,0}^{(1)}$, которые образуют базис. Существует оператор Паули T, который имеет обратный и удовлетворяет равенствам $Te_i = e'_{\gamma_i} T$ или $Te_i = e_{123} e_{\gamma_i} T$, $i = 1, 2, 3$.

Замечание 3. В общем случае элементы e_{γ_i} можно записать в виде

$$e_{\gamma_i} = \sum_{k=1}^{3} b_k^{(i)} e_k, \tag{1.10}$$

где $b_k^{(i)} = \alpha_k^{(i)} e_0 + \beta_k^{(i)} e_{123} \in Z$ — комплексные числа. Элементы (1.10) удовлетворяют равенствам (1.1), если

$$\sum_{k=1}^{3} (b_k^{(i)})^2 = 1, \quad \sum_{k=1}^{3} b_k^{(i)} b_k^{(j)} = 0, \quad i \neq j.$$

Так как элемент центра $\bar{e}_\tau = \bar{e}_{123} = e_{123}$, то из (1.10) следует, что $\bar{e}_{\gamma_i} = -e_{\gamma_i}$.

Если элементы вида (1.10) образуют базис в алгебре Клиффорда $R_{3,0}$, то, дословно повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве Теоремы 3, мы построим оператор Паули в этом случае.

Если элементы вида (1.10) не образуют базиса в алгебре Клиффорда $R_{3,0}$, то умножим (1.10) на e_{123}. Элементы $e'_{\gamma_i} = \sum_{k=1}^{3} e_{123} b_k^{(i)} e_k$ образуют базис и оператор Паули для этого базиса можно построить методом, предложенным в Теореме 3.

§ 2. Алгебра $R_{5,0}$

2.1. Алгебра $R_{5,0}$ — это действительная, ассоциативная, некоммутативная алгебра размерности $m = 32$, порожденная векторами e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, для которых выполняются равенства (0.1). Базис алгебры образуют элементы $\{e_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma_5}$, центр — элементы e_0 и $e_\tau = e_{12345}$, $e_\tau^2 = e_0$, то есть центр образуют двойные числа $x_0 e_0 + x_\tau e_\tau$. Произвольный элемент алгебры представим в виде

$$w = \sum_{\alpha \in \Gamma_5} x_\alpha e_\alpha = \sum_{\alpha \in \Gamma_4} z_\alpha e_\alpha,$$

$$\begin{aligned}
&z_0 = x_0 e_0 + x_\tau e_\tau, && z_1 = x_1 e_0 + x_{2345} e_\tau, && z_2 = x_2 e_0 - x_{1345} e_\tau, && z_{12} = x_{12} e_0 - x_{345} e_\tau,\\
&z_3 = x_3 e_0 + x_{1245} e_\tau, && z_{13} = x_{13} e_0 + x_{245} e_\tau, && z_{23} = x_{23} e_0 - x_{145} e_\tau, && z_{123} = x_{123} e_0 - x_{45} e_\tau,\\
&z_4 = x_4 e_0 - x_{1235} e_\tau, && z_{14} = x_{14} e_0 - x_{235} e_\tau, && z_{24} = x_{24} e_0 + x_{135} e_\tau, && z_{124} = x_{124} e_0 + x_{35} e_\tau,\\
&z_{34} = x_{34} e_0 - x_{125} e_\tau, && z_{134} = x_{134} e_0 - x_{25} e_\tau, && z_{234} = x_{234} e_0 + x_{15} e_\tau, && z_{1234} = x_{1234} e_0 + x_5 e_\tau.
\end{aligned}$$

Заметим, что

$$
\begin{gathered}
e_1^2=e_2^2=e_3^2=e_4^2=e_5^2=e_0,\\
e_{12}^2=e_{13}^2=e_{23}^2=e_{14}^2=e_{24}^2=e_{34}^2=e_{15}^2=e_{25}^2=e_{35}^2=e_{45}^2=-e_0,\\
e_{123}^2=e_{124}^2=e_{125}^2=e_{134}^2=e_{135}^2=e_{145}^2=e_{234}^2=e_{235}^2=e_{245}^2=e_{345}^2=-e_0,\\
e_{1234}^2=e_{1235}^2=e_{1245}^2=e_{1345}^2=e_{2345}^2=e_0.
\end{gathered}
$$

Рассмотрим другой генерирующий базис $\{e_{\gamma_1}, e_{\gamma_2}, e_{\gamma_3}, e_{\gamma_4}, e_{\gamma_5}\}$, образованный элементами пространства $R_{5,0}^{(1)}$:

$$
e_{\gamma_i}=\sum_{k=1}^{5}\alpha_k^{(i)}e_k, \tag{2.1}
$$

для которых выполняются условия (0.1):

$$
e_{\gamma_1}^2=e_{\gamma_2}^2=e_{\gamma_3}^2=e_{\gamma_4}^2=e_{\gamma_5}^2=e_0,\quad e_{\gamma_i}e_{\gamma_j}+e_{\gamma_j}e_{\gamma_i}=0,\quad i\neq j.
$$

Элементы (2.1) удовлетворяют этим соотношениям, если

$$
\sum_{k=1}^{5}(\alpha_k^{(i)})^2=1,\quad \sum_{k=1}^{3}\alpha_k^{(i)}\alpha_k^{(j)}=0,\quad i\neq j.
$$

Из равенств (2.1) следует, что $\bar{e}_{\gamma_i}=-e_{\gamma_i}$. Найдем оператор T, который имеет обратный и удовлетворяет системе уравнений

$$
Te_i=e_{\gamma_i}T,\quad i=1,2,3,4,5. \tag{2.2}
$$

Будем искать оператор в виде: $T=\sum_{\alpha\in\Gamma_4}a_\alpha e_\alpha$, где $a_\alpha\in Z$ — двойные числа. Построение оператора T состоит из пяти шагов. На первом шаге находится общее решение первого уравнения системы (2.2). На втором шаге находится общее решение системы двух уравнений методом подстановки общего решения во второе уравнение. На третьем и четвертом шагах продолжается этот процесс. На пятом шаге доказывается, что полученный оператор удовлетворяет последнему уравнению системы (2.2).

Теорема 5. *Пусть в алгебре Клиффорда $R_{5,0}$ элементы нового базиса представимы в виде* (2.1) *и $e_{\gamma_1}e_{\gamma_2}e_{\gamma_3}e_{\gamma_4}e_{\gamma_5}=e_1e_2e_3e_4e_5$. Тогда существует оператор T_1, который имеет обратный и удовлетворяет уравнению $Te_1=e_{\gamma_1}T$. Оператор T_1 имеет вид: $T_1=e_0+e_{\gamma_1}e_1$, если $\alpha_1^{(1)}\neq-1$; $T_1=e_0-e_{\gamma_1}e_1$, если $\alpha_1^{(1)}=-1$. Общее решение уравнения имеет вид: $T=T_1w_1$, если $\alpha_1^{(1)}\neq-1$; $T=T_1v_1$, если $\alpha_1^{(1)}=-1$, где $w_1(v_1)$ — произвольные элементы алгебры Клиффорда, коммутирующие* (*антикоммутирующие*) *с e_1.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Базис $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma_4}$ состоит из 16 элементов. Элемент e_1 коммутирует с половиной элементов базиса и антикоммутирует с другой половиной. Оператор $T_1=w_1+v_1$, где $w_1=\sum a_\alpha e_\alpha$, $v_1=\sum a_\alpha e_\alpha$ — элементы $R_{5,0}$, которые, соответственно, коммутируют и антикоммутируют с e_1. Подберем коэффициенты a_α так, чтобы выполнялось равенство $Te_1=e_{\gamma_1}T$. Имеем

$$
(e_1-e_{\gamma_1})w_1=(e_1+e_{\gamma_1})v_1. \tag{2.3}
$$

Умножим равенство (2.3) слева на $(\overline{e_1+e_{\gamma_1}})=-(e_1+e_{\gamma_1})$, получим

$$
(e_1+e_{\gamma_1})(e_1-e_{\gamma_1})w_1=(e_1+e_{\gamma_1})(e_1+e_{\gamma_1})v_1.
$$

Выражение $(\overline{e_1 + e_{\gamma_1}})(e_1 + e_{\gamma_1}) = -2(1 + \alpha_1^{(1)})e_0$. Если $\alpha_1^{(1)} = -1$, то $(\overline{e_1 + e_{\gamma_1}})$ является делителем нуля для $(e_1 + e_{\gamma_1})$. В этом случае $(\overline{e_1 - e_{\gamma_1}}) = -(e_1 - e_{\gamma_1})$ не является делителем нуля, так как $(\overline{e_1 - e_{\gamma_1}})(e_1 - e_{\gamma_1}) = -4e_0$.
Предположим сначала, что $\alpha_1^{(1)} \neq -1$, тогда имеем

$$v_1 = \frac{(e_1 + e_{\gamma_1})(e_1 - e_{\gamma_1})}{(e_1 + e_{\gamma_1})^2} w_1, \quad T = \frac{T_1}{(1 + \alpha_1^1)} w_1, \quad T_1 = e_0 + e_{\gamma_1} e_1.$$

Если $\alpha_1^{(1)} = -1$, то умножим равенство (2.3) слева на $(\overline{e_1 - e_{\gamma_1}}) = -(e_1 - e_{\gamma_1})$, получим

$$T = \frac{e_0 - e_{\gamma_1} e_1}{2} v_1, \quad T_1 = e_0 - e_{\gamma_1} e_1. \qquad \square$$

Анализ теоремы 5 показывает, что для построения оператора T_1 необходимо, чтобы выражение $(\overline{e_1 + e_{\gamma_1}})(e_1 + e_{\gamma_1})$ было действительным числом. Если оно отлично от нуля, то оператор $T_1 = e_0 + e_{\gamma_1} e_1$; если оно равно нулю, то $T_1 = e_0 - e_{\gamma_1} e_1$. Эта закономерность повторяется на других шагах построения оператора Паули.

Теорема 6. *Пусть в алгебре Клиффорда $R_{5,0}$ элементы нового базиса представимы в виде* (2.1) *и* $e_{\gamma_1} e_{\gamma_2} e_{\gamma_3} e_{\gamma_4} e_{\gamma_5} = e_1 e_2 e_3 e_4 e_5$. *Тогда существует единственный* (*с точностью до обратного элемента центра*) *такой элемент алгебры Клиффорда T, что $T e_i T^{-1} = e_{\gamma_i}$,* $i = 1, 2, 3, 4, 5$. *Оператор Паули $T = T_4 u$ находится по итерационной формуле:*

$$T_1 = e_0 \pm \varepsilon_1 e_{\gamma_1} e_1, \tag{2.4}$$

$$T_i = T_{i-1} \pm \varepsilon_i e_{\gamma_i} T_{i-1} e_i, \quad i = 2, 3, 4, \tag{2.5}$$

где $\varepsilon_i = e_i^2 = e_{\gamma_i}^2$; *в равенстве* (2.4) *берется знак плюс, если* $\alpha_1^{(1)} \neq -1$; *знак минус, если* $\alpha_1^{(1)} = -1$; *в равенстве* (2.5) *берется знак плюс, если* $(\bar{T}_{i-1} T_i + \bar{T}_i T_{i-1}) \neq 0$; *знак минус, если* $(\bar{T}_{i-1} T_i + \bar{T}_i T_{i-1}) = 0$.

Оператор Паули представляется в виде обобщенной свертки вида

$$T = \sum_{\alpha \in \Gamma_4} \varepsilon_\alpha e_{\gamma_\alpha} u e_\alpha,$$

где $u = e_0$, если в процессе построения оператора нет делителей нуля; $u = e_k e_{\tau'}$, $e_{\tau'} = e_1 e_2 e_3 e_4$, если делители нуля встречаются только на k этапе; $u = e_k e_i$, $i \neq k$, если делители нуля встречаются на i-ом и k-ом этапе; $u = e_k$, если делители нуля встречаюися на трех этапах, кроме k; $u = e_{\tau'}$, если делители нуля имеются на всех четырех этапах.

Доказательство. Первый шаг проведен в теореме 5.

На втором этапе подберем коэффициенты a_k из w_1 так, чтобы $T e_2 = e_{\gamma_2} T$. Если $\alpha_1^{(1)} \neq -1$, то имеем $T_1 w_1 e_2 = e_{\gamma_2} T_1 w_1$,

$$(T_1 e_2 - e_{\gamma_2} T_1) w_2 = (T_1 e_2 + e_{\gamma_2} T_1) v_2, \tag{2.6}$$

где w_2, v_2 — элементы из w_1, которые, соответственно, коммутируют и антикоммутируют с e_2. Умножим равенство (2.6) слева на выражение $(\overline{T_1 e_2 + e_{\gamma_2} T_1})$, получим

$$(\overline{T_1 e_2 + e_{\gamma_2} T_1})(T_1 e_2 - e_{\gamma_2} T_1) w_2 = (\overline{T_1 e_2 + e_{\gamma_2} T_1})(T_1 e_2 + e_{\gamma_2} T_1) v_2.$$

Следуя рассуждениям пункта 1, получаем

$$(\overline{T_1 e_2 + e_{\gamma_2} T_1}), (T_1 e_2 + e_{\gamma_2} T_1) = -(\bar{T}_1 T_2 + \bar{T}_2 T_1),$$

где $T_2 = T_1 + e_{\gamma_2}T_1e_2 = e_0 + e_{\gamma_1}e_1 + e_{\gamma_2}e_2 + e_{\gamma_2}e_{\gamma_1}e_1e_2$. Для оператора T_2 справедливы равенства: $e_{\gamma_i}T_2 = T_2e_i$, $i = 1, 2$. Выражение

$$(\bar{T}_1T_2 + \bar{T}_2T_1) = T_2 + e_1T_2e_1 + \bar{T}_2 + e_1\bar{T}_2e_1 = (T_2 + \bar{T}_2) + e_1(T_2 + \bar{T}_2)e_1$$

— действительное число.

Если $(\bar{T}_1T_2 + \bar{T}_2T_1) \neq 0$, то $v_2 = \dfrac{(\overline{T_1e_2 + e_{\gamma_2}T_1})(T_1e_2 - e_{\gamma_2}T_1)}{(\overline{T_1e_2 + e_{\gamma_2}T_1})(T_1e_2 + e_{\gamma_2}T_1)}w_2$.

Оператор $T = \dfrac{4T_1\bar{T}_1(T_1 + e_{\gamma_2}T_1e_2)}{2(1+\alpha_1^{(1)})(\bar{T}_1T_2 + \bar{T}_2T_1)}w_2 = \dfrac{4T_2}{\bar{T}_1T_2 + \bar{T}_2T_1}w_2$.

Заметим, что оператор T_2 имеет обратный, так как

$$\begin{gathered}\bar{T}_2T_2 = (e_0 + e_1e_{\gamma_1} + e_2e_{\gamma_2} + e_2e_1e_{\gamma_2}e_{\gamma_1})T_2 = \\ = T_2 + e_1T_2e_1 + e_2T_2e_2 + e_2e_1T_2e_1e_2 = 4(\bar{T}_1T_2 + \bar{T}_2T_1) \neq 0, \\ T_2\bar{T}_2 = T_2(e_0 + e_1e_{\gamma_1} + e_2e_{\gamma_2} + e_2e_1e_{\gamma_2}e_{\gamma_1}) = \\ = T_2 + e_{\gamma_1}T_2e_{\gamma_1} + e_{\gamma_2}T_2e_{\gamma_2} + e_{\gamma_2}e_{\gamma_1}T_2e_{\gamma_1}e_{\gamma_2} = 4(\bar{T}_1T_2 + \bar{T}_2T_1) \neq 0.\end{gathered}$$

На третьем этапе подберем коэффициенты a_k из w_2 так, чтобы $Te_3 = e_{\gamma_3}T$. Имеем

$$(T_2e_3 - e_{\gamma_3}T_2)(a_0e_0 + a_{123}e_{123}) = (T_2e_3 + e_{\gamma_3}T_2)(a_{124}e_{124} + a_{34}e_{34}). \tag{2.7}$$

Умножим равенство (2.7) слева на выражение $(\overline{T_2e_3 + e_{\gamma_3}T_2})$. Произведение

$$\begin{gathered}(\overline{T_2e_3 + e_{\gamma_3}T_2})(T_2e_3 + e_{\gamma_3}T_2) = -(e_3\bar{T}_2 + \bar{T}_2e_{\gamma_3})(T_2e_3 + e_{\gamma_3}T_2) = \\ = -(\bar{T}_2(T_2 + e_{\gamma_3}T_2e_3) + (\bar{T}_2 + e_3\bar{T}_2e_{\gamma_3})T_2) = -(\bar{T}_2T_3 + \bar{T}_3T_2),\end{gathered}$$

где $T_3 = T_2 + e_{\gamma_3}T_2e_3$. Аналогично предыдущим утверждениям доказывается, что $e_{\gamma_i}T_3 = T_3e_i$. Из этих равенств следует, что

$$(\bar{T}_2T_3 + \bar{T}_3T_2) = \sum_{\alpha\in\Gamma_2} \varepsilon_\alpha e_\alpha(T_3 + \bar{T}_3)e_\alpha.$$

Операторы $T_2 \in R_{4,0}^{even}$, $T_3 \in R_{4,0}^{even}$, поэтому

$$T_3 + \bar{T}_3 = A_0e_0 + A_1e_{1234}, \quad \sum_{\alpha\in\Gamma_2} \varepsilon_\alpha e_\alpha(T_3 + \bar{T}_3)e_\alpha = 4A_0e_0.$$

Таким образом, $(\bar{T}_2T_3 + \bar{T}_3T_2)$ — действительное число. Если $(\bar{T}_2T_3 + \bar{T}_3T_2) \neq 0$, то

$$T = \frac{8T_3}{\bar{T}_2T_3 + \bar{T}_3T_2}(a_0e_0 + a_{123}e_{123}).$$

Оператор T_3 имеет обратный, так как

$$\bar{T}_3T_3 = \sum_{\alpha\in\Gamma_3} \varepsilon_\alpha e_\alpha T_3e_\alpha = 2(\bar{T}_2T_3 + \bar{T}_3T_2) \neq 0, T_3\bar{T}_3 = \sum_{\alpha\in\Gamma_3} \varepsilon_\alpha e_{\gamma_\alpha}T_3e_{\gamma_\alpha} = 2(\bar{T}_2T_3 + \bar{T}_3T_2) \neq 0.$$

Подберем коэффициенты a_0, a_{123} так, чтобы $Te_4 = e_{\gamma_4}T$. Имеем

$$(T_3e_4 - e_{\gamma_4}T_3)a_0e_0 = (T_3e_4 + e_{\gamma_4}T_3)a_{123}e_{123}. \tag{2.8}$$

Умножим равенство (2.8) слева на выражение $(\overline{T_3e_4 + e_{\gamma_4}T_4})$. Покажем, что выражение

$(\overline{T_3e_4+e_{\gamma_4}T_4})(T_3e_4+e_{\gamma_4}T_3)$ действительное число. Имеем цепочку равенств:

$$(\overline{T_3e_4+e_{\gamma_4}T_4})(T_3e_4+e_{\gamma_4}T_3) = -(e_4\bar{T}_3+\bar{T}_3e_{\gamma_4})(T_3e_4+e_{\gamma_4}T_3) =$$
$$= -(e_4\bar{T}_3T_3e_4+\bar{T}_3e_{\gamma_4}e_{\gamma_4}T_3+e_4\bar{T}_3e_{\gamma_4}T_3+\bar{T}_3e_{\gamma_4}T_3e_4) = -(\bar{T}_3T_4+\bar{T}_4T_3),$$

где $T_4 = T_3+e_{\gamma_4}T_3e_4$. Аналогично предыдущим утверждениям доказывается, что $e_{\gamma_i}T_4 = T_4e_i$. Из этих равенств следует, что $(\bar{T}_3T_4+\bar{T}_4T_3) = \sum_{\alpha\in\Gamma_3}\varepsilon_\alpha e_\alpha(T_4+\bar{T}_4)e_\alpha$ — действительное число. Таким образом, если $(\bar{T}_3T_4+\bar{T}_4T_3)\neq 0$, то

$$T = \frac{16T_4}{\bar{T}_3T_4+\bar{T}_4T_3}a_0e_0, \quad a_0\in Z.$$

Оператор T совпадает с оператором T_4 с точностью до элемента центра. Его можно записать в виде свертки

$$T = \sum_{\alpha\in\Gamma_4}\tilde{e}_{\gamma_\alpha}e_\alpha, \tag{2.9}$$

где $e_{\gamma_0}=e_0$, $e_{\gamma_\alpha}=e_{\gamma_1}e_{\gamma_2}\dots e_{\gamma_k}$, $\tilde{e}_{\gamma_\alpha}=e_{\gamma_k}\dots e_{\gamma_2}e_{\gamma_1}$, $\alpha=i_1,i_2,\dots,i_k$.

Покажем, что оператор (2.9) удовлетворяет равенству $e_{\gamma_5}T = Te_5$. Воспользуемся соотношением $e_{\gamma_1}e_{\gamma_2}e_{\gamma_3}e_{\gamma_4}e_{\gamma_5} = e_1e_2e_3e_4e_5$. Умножим равенство (2.9) слева на e_{γ_5}, получим $e_{\gamma_5}T=\sum_{\alpha\in\Gamma_4}e_{\gamma_5}\tilde{e}_{\gamma_\alpha}e_\alpha$. Теперь умножим (2.9) справа на e_5. Имеем $Te_5=\sum_{\alpha\in\Gamma_4}\tilde{e}_{\gamma_\alpha}e_\alpha e_5$.

Покажем, что $\sum_{\alpha\in\Gamma_4}e_{\gamma_5}\tilde{e}_{\gamma_\alpha}e_\alpha = \sum_{\alpha\in\Gamma_4}\tilde{e}_{\gamma_\alpha}e_\alpha e_5$. Рассмотрим $\sum_{\alpha\in\Gamma_4}\tilde{e}_{\gamma_\alpha}e_\alpha e_5$. Индекс $\alpha\in\Gamma_4$, рассмотрим два элемента этой суммы с индексами α и β, которые удовлетворяют соотношениям $e_\alpha e_\beta=\pm e_{\tau'}$, $e_{\gamma_\alpha}e_{\gamma_\beta}=\pm e_{\gamma_{\tau'}}$, где $e_{\tau'}=e_1e_2e_3e_4$, $e_{\gamma_{\tau'}}=e_{\gamma_1}e_{\gamma_2}e_{\gamma_3}e_{\gamma_4}$. Тогда $e_\beta = \pm\varepsilon_\alpha e_\alpha e_{\tau'}$, $e_{\gamma_\beta}=\pm\varepsilon_\alpha e_{\gamma_\alpha}e_{\gamma_{\tau'}}$, $\tilde{e}_{\gamma_\beta}e_\beta = \tilde{e}_{\gamma_{\tau'}}\tilde{e}_{\gamma_\alpha}e_\alpha e_{\tau'}$. Из этих равенств следует, что $\tilde{e}_{\gamma_\beta}e_\beta e_5 = \tilde{e}_{\gamma_{\tau'}}\tilde{e}_{\gamma_\alpha}e_\alpha e_{\tau'}e_5 = e_{\gamma_4}e_{\gamma_3}e_{\gamma_2}e_{\gamma_1}e_\tau\tilde{e}_{\gamma_\alpha}e_\alpha = e_{\gamma_5}\tilde{e}_{\gamma_\alpha}e_\alpha$. Отсюда получаем, что $e_{\gamma_5}T=Te_5$.

Остальные случаи теоремы исследуется по схеме, предложенной в пункте 1. □

Замечание 4. Так как $\tilde{e}_i=e_i$, $\tilde{e}_{\gamma_i}=e_{\gamma_i}$, то оператор Паули T можно построить тем же методом, используя операцию сопряжения «реверс».

2.2. Рассмотрим другой образующий базис

$$e_{\gamma_i} = \sum_{k=1}^{5}b_k^{(i)}e_k, \tag{2.10}$$

где $b_k^{(i)} = \alpha_k^{(i)}e_0+\beta_k^{(i)}e_\tau\in Z$ — двойные числа. Элементы (2.10) удовлетворяют равенствам (0.1), если

$$\sum_{k=1}^{5}(b_k^{(i)})^2 = 1, \quad \sum_{k=1}^{5}b_k^{(i)}b_k^{(j)} = 0, \quad i\neq j.$$

Будем считать, что элементы (2.10) образуют базис в $R_{5,0}$.

Так как элемент центра $\bar{e}_\tau=\bar{e}_{12345}=-e_{12345}=-e_\tau$, то из (2.9) следует, что $\bar{e}_{\gamma_i}\neq -e_{\gamma_i}$. С другой стороны, $\tilde{e}_\tau=\tilde{e}_{12345}=e_{12345}=e_\tau$, $\tilde{e}_{\gamma_i}=\sum_{k=1}^5\tilde{e}_k\tilde{b}_k^{(i)}=e_{\gamma_i}$. Найдем оператор T, который имеет обратный и удовлетворяет системе уравнений (2.2). Будем искать оператор T в виде $T=\sum_{\alpha\in\Gamma_4}a_\alpha e_\alpha$, где $a_\alpha\in Z$ — двойные числа. При построении оператора Паули воспользуемся операцией сопряжения «реверс».

Схема построения оператора Паули остается прежней. Подберем коэффициенты a_α так, чтобы выполнялось равенство $Te_1=e_{\gamma_1}T$. Имеем (2.3). Умножим равенство (2.3) слева на $(\widetilde{e_1+e_{\gamma_1}})=(e_1+e_{\gamma_1})$, получим

$$(\widetilde{e_1+e_{\gamma_1}})(e_1-e_{\gamma_1})w_1 = (\widetilde{e_1+e_{\gamma_1}})(e_1+e_{\gamma_1})v_1.$$

Выражение $(\widetilde{e_1+e_{\gamma_1}})(e_1+e_{\gamma_1}) = 2(1+b_1^{(1)})e_0$. Если $b_1^{(1)} = -1$, то $(\widetilde{e_1+e_{\gamma_1}})$ является делителем нуля для $(e_1+e_{\gamma_1})$. В этом случае $(\widetilde{e_1-e_{\gamma_1}}) = (e_1-e_{\gamma_1})$ не является делителем нуля, так как $(\widetilde{e_1-e_{\gamma_1}})(e_1-e_{\gamma_1}) = 4e_0$.

Предположим, что $b_1^{(1)} \neq -1$, тогда имеем

$$v_1 = \frac{(e_1+e_{\gamma_1})(e_1-e_{\gamma_1})}{(e_1+e_{\gamma_1})^2}w_1, \quad T = \frac{T_1}{(1+b_1^1)}w_1, \quad T_1 = e_0 + e_{\gamma_1}e_1.$$

Оператор T_1 обладает свойствами

$$e_{\gamma_1}T_1 = T_1e_1, \quad T_1 + \tilde{T}_1 = 2(1+b_1^{(1)}), \quad \tilde{T}_1T_1 = T_1\tilde{T}_1 = 2(1+b_1^{(1)}) \neq 0.$$

Если $b_1^{(1)} = -1$, то умножим равенство (2.1) слева на $(\widetilde{e_1-e_{\gamma_1}}) = (e_1-e_{\gamma_1})$, получим

$$T = \frac{e_0 - e_{\gamma_1}e_1}{2}v_1, \quad T_1 = e_0 - e_{\gamma_1}e_1.$$

На втором этапе подберем коэффициенты a_k из w_1 так, чтобы $Te_2 = e_{\gamma_2}T$. Если $b_1^{(1)} \neq -1$, то имеем равенство (2.6). Умножим равенство (2.6) слева на выражение $(\widetilde{T_1e_2+e_{\gamma_2}T_1})$, получим

$$(T_1\widetilde{e_2+e_{\gamma_2}}T_1)(T_1e_2-e_{\gamma_2}T_1)w_2 = (T_1\widetilde{e_2+e_{\gamma_2}}T_1)(T_1e_2+e_{\gamma_2}T_1)v_2.$$

Произведение

$$\begin{aligned}(T_1\widetilde{e_2+e_{\gamma_2}}T_1)(T_1e_2+e_{\gamma_2}T_1) &= (e_2\tilde{T}_1 + \tilde{T}_1e_{\gamma_2})(T_1e_2+e_{\gamma_2}T_1) = \\ &= (e_2\tilde{T}_1T_1e_2 + \tilde{T}_1e_{\gamma_2}e_{\gamma_2}T_1 + e_2\tilde{T}_1e_{\gamma_2}T_1 + \tilde{T}_1e_{\gamma_2}T_1e_2) = \\ &= (\tilde{T}_1(T_1 - e_{\gamma_2}T_1e_2) + (\tilde{T}_1 - e_2\tilde{T}_1e_{\gamma_2})T_1 = (\tilde{T}_1T_2 + \tilde{T}_2T_1),\end{aligned}$$

где $T_2 = T_1 + e_{\gamma_2}T_1e_2 = (e_0 + e_{\gamma_1}e_1 + e_{\gamma_2}e_2 + e_{\gamma_2}e_{\gamma_1}e_1e_2)$.

Для оператора T_2 справедливы равенства: $e_{\gamma_i}T_2 = T_2e_i, i = 1, 2$. Выражение

$$\begin{aligned}(\tilde{T}_1T_2 + \tilde{T}_2T_1) &= T_2 + e_1T_2e_1 + \tilde{T}_2 + e_1\tilde{T}_2e_1 = \\ &= (T_2 + \tilde{T}_2) + e_1(T_2+\tilde{T}_2)e_1 \in Z,\end{aligned}$$

так как

$$T_2+\tilde{T}_2 = A_0e_0+A_1e_{1234}+A_2e_{1235}+A_3e_{1245}, \quad e_1(T_2+\tilde{T}_2)e_1 = A_0e_0-A_1e_{1234}-A_2e_{1235}-A_3e_{1245}.$$

Если $(\tilde{T}_1T_2 + \tilde{T}_2T_1) \neq 0$, то $T = \dfrac{4T_2}{(\tilde{T}_1T_2 + \tilde{T}_2T_1)}w_2$. Оператор T_2 имеет обратный, так как

$$\tilde{T}_2T_2 = \sum_{\alpha\in\Gamma_2}\varepsilon_\alpha e_\alpha T_2 e_\alpha = (\tilde{T}_1T_2 + \tilde{T}_2T_1) \neq 0, \quad T_2\tilde{T}_2 = \sum_{\alpha\in\Gamma_2}\varepsilon_\alpha e_{\gamma_\alpha}T_2e_{\gamma_\alpha} = (\tilde{T}_1T_2 + \tilde{T}_2T_1) \neq 0.$$

На третьем этапе подберем коэффициенты a_k из w_2 так, чтобы $Te_3 = e_{\gamma_3}T$. Имеем уравнение (2.7). Умножим равенство (2.7) слева на выражение $(\widetilde{T_2e_3+e_{\gamma_3}T_2})$. Произведение

$$\begin{aligned}(T_2\widetilde{e_3+e_{\gamma_3}}T_2)(T_2e_3+e_{\gamma_3}T_2) &= (e_3\tilde{T}_2 + \tilde{T}_2e_{\gamma_3})(T_2e_3+e_{\gamma_3}T_2) = \\ &= (\tilde{T}_2(T_2 + e_{\gamma_3}T_2e_3) + (\tilde{T}_2 + e_3\tilde{T}_2e_{\gamma_3})T_2) = (\tilde{T}_2T_3 + \tilde{T}_3T_2),\end{aligned}$$

где $T_3 = T_2 + e_{\gamma_3}T_2e_3$. Аналогично предыдущим утверждениям доказывается, что $e_{\gamma_i}T_3 = T_3e_i$. Из этих равенств следует, что

$$(\tilde{T}_2T_3 + \tilde{T}_3T_2) = \sum_{\alpha\in\Gamma_2} \varepsilon_\alpha e_\alpha(T_3 + \tilde{T}_3)e_\alpha \in Z.$$

Если $(\tilde{T}_2T_3 + \tilde{T}_3T_2) \neq 0$, то

$$T = \frac{8T_3}{\tilde{T}_2T_3 + \tilde{T}_3T_2}(a_0e_0 + a_{123}e_{123}).$$

Оператор T_3 имеет обратный, так как

$$\tilde{T}_3T_3 = \sum_{\alpha\in\Gamma_3} \varepsilon_\alpha e_\alpha T_3 e_\alpha = 2(\tilde{T}_2T_3 + \tilde{T}_3T_2) \neq 0, \quad T_3\tilde{T}_3 = \sum_{\alpha\in\Gamma_3} \varepsilon_\alpha e_{\gamma_\alpha} T_3 e_{\gamma_\alpha} = 2(\tilde{T}_2T_3 + \tilde{T}_3T_2) \neq 0.$$

Подберем коэффициенты a_0, a_{123} так, чтобы $Te_4 = \widetilde{e_{\gamma_4}T}$. Имеем уравнение (2.8).

Умножим равенство (2.8) слева на выражение $(T_3e_4 + e_{\gamma_4}T_3)$. Покажем, что выражение $(\widetilde{T_3e_4 + e_{\gamma_4}T_3})(T_3e_4 + e_{\gamma_4}T_3) \in Z$. Имеем цепочку равенств:

$$(\widetilde{T_3e_4 + e_{\gamma_4}T_3})(T_3e_4 + e_{\gamma_4}T_3) = (e_4\tilde{T}_3 + \tilde{T}_3e_{\gamma_4})(T_3e_4 + e_{\gamma_4}T_3) =$$

$$= (e_4\tilde{T}_3T_3e_4 + \tilde{T}_3e_{\gamma_4}e_{\gamma_4}T_3 + e_4\tilde{T}_3e_{\gamma_4}T_3 + \tilde{T}_3e_{\gamma_4}T_3e_4) = (\tilde{T}_3T_4 + \tilde{T}_4T_3),$$

где $T_4 = T_3 + e_{\gamma_4}T_3e_4$. Аналогично предыдущим утверждениям доказывается, что $e_{\gamma_i}T_4 = T_4e_i$. Из этих равенств следует, что $(\tilde{T}_3T_4 + \tilde{T}_4T_3) = \sum_{\alpha\in\Gamma_3} \varepsilon_\alpha e_\alpha(T_4 + \tilde{T}_4)e_\alpha \in Z$. Таким образом, если $(\tilde{T}_3T_4 + \tilde{T}_4T_3) \neq 0$, то

$$T = \frac{16T_4}{\tilde{T}_3T_4 + \tilde{T}_4T_3}a_0e_0, \quad a_0 \in Z.$$

Оператор T совпадает с оператором T_4 с точностью до элемента центра. Его можно записать в виде свертки

$$T = \sum_{\alpha\in\Gamma_4} \tilde{e}_{\gamma_\alpha} e_\alpha,$$

где $e_{\gamma_0} = e_0$, $e_{\gamma_\alpha} = e_{\gamma_1}e_{\gamma_2}\ldots e_{\gamma_k}$, $\alpha = i_1, i_2, \ldots, i_k$. Аналогично предыдущим утверждениям доказывается, что $e_{\gamma_5}T = Te_5$.

§ 3. Произвольная алгебра Клиффорда нечетной размерности $R_{p,q+1}$ ($R_{p+1,q}$)

Рассмотрим произвольную алгебру Клиффорда $R_{p,q}$, $p+q=n$, четной размерности. Алгебра $R_{p,q}$ порождается векторами $e_1e_2, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_{p+q}$, $e_i^2 = e_0$, $i = 1, 2, \ldots, p$, $e_i^2 = -e_0$, $i = p+1, \ldots, p+q$. Базис алгебры образуют элементы $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma_n}$. Рассмотрим нечетные алгебры Клиффорда $R_{p,q+1}$ ($R_{p+1,q}$), которые получаются добавлением к порождающему базису элемента $e_{q+1}(e_{p+1})$ соответственно. Центр алгебр образуют элементы e_0 и $e_\tau = e_1e_2\ldots e_{n+1}$. Произвольный элемент алгебры представим в виде

$$w = \sum_{\alpha\in\Gamma_{n+1}} x_\alpha e_\alpha, \quad w = \sum_{\alpha\in\Gamma_n} z_\alpha e_\alpha, \quad z_\alpha \in Z.$$

Рассмотрим другой генерирующий базис $\{e_{\gamma_i}\}_{i=1}^{n+1}$, образованный элементами пространства $R^{(1)}_{p,q+1}$ ($R^{(1)}_{p+1,q}$):

$$e_{\gamma_i} = \sum_{k=1}^{n+1} b_k^{(i)} e_k, \tag{3.1}$$

$b_k^{(i)} = \alpha_k^{(i)} e_0 + \beta_k^{(i)} e_\tau \in Z$, для которых выполняются условия (0.1):

$$e_{\gamma_i}^2 = e_0, \quad i = 1, \dots, p, e_{\gamma_i}^2 = -e_0, \quad i = p+1, \dots, p+q+1, \quad e_{\gamma_i} e_{\gamma_j} + e_{\gamma_j} e_{\gamma_i} = 0, \quad i \neq j.$$

Будем считать, что элементы (3.1) образуют базис. Если $p+q+1 \equiv 3 \pmod 4$, то $\bar{e}_\tau = e_\tau$, $\bar{e}_{\gamma_i} = -e_{\gamma_i}$, $i = 1, \dots, n+1$. Если $p+q+1 \equiv 1 \pmod 4$, то $\tilde{e}_\tau = e_\tau$, $\tilde{e}_{\gamma_i} = e_{\gamma_i}$, $i = 1, \dots, n+$ $+1$. В первом случае при построении оператора Паули применим сопряжение Клиффорда, во втором случае сопряжение «реверс».

Найдем оператор Паули T, который имеет обратный и удовлетворяет системе уравнений

$$Te_i = e_{\gamma_i} T, \quad i = 1, 2, \dots, n+1.$$

Теорема 7. *Пусть $R_{p,q+1}$ ($R_{p+1,q}$), $p+q = n$, — произвольная нечетная алгебра Клиффорда. Пусть элементы нового базиса представимы в виде* (3.1), $e_{\gamma_1} e_{\gamma_2} ... e_{\gamma_{n+1}} = e_1 e_2 \dots e_{n+1}$. *Тогда существует единственный (с точностью до обратного элемента центра) такой элемент алгебры Клиффорда T, что $Te_iT^{-1} = e_{\gamma_i}$, $i = 1, 2, \dots, n+1$. Оператор Паули $T = T_n$и находится по итерационной формуле:*

$$T_1 = e_0 \pm \varepsilon_1 e_{\gamma_1} e_1, \tag{3.2}$$

$$T_i = T_{i-1} \pm \varepsilon_i e_{\gamma_i} T_{i-1} e_i, \quad i = 2, 3, \dots, n, \tag{3.3}$$

где $\varepsilon_i = e_i^2 = e_{\gamma_i}^2$; в равенстве (3.2) *знак плюс берется, если $b_1^{(1)} \neq -1$; знак минус, если $b_1^{(1)} =$ $= -1$; в равенстве* (3.3) *знак плюс берется, если $(\bar{T}_{i-1}T_i + \bar{T}_i T_{i-1}) \neq 0$ $((\tilde{T}_{i-1}T_i + \tilde{T}_i T_{i-1}) \neq 0)$; знак минус, если $(\bar{T}_{i-1}T_i + \bar{T}_i T_{i-1}) = 0$ $((\tilde{T}_{i-1}T_i + \tilde{T}_i T_{i-1}) = 0)$.*
Оператор Паули представляется в виде обобщенной свертки вида

$$T = \sum_{\alpha \in \Gamma_n} \varepsilon_\alpha e_{\gamma_\alpha} u e_\alpha,$$

где $e_{\gamma_0} = e_0$, $e_{\gamma_\alpha} = e_{\gamma_1} e_{\gamma_2} \dots e_{\gamma_k}$, $\alpha = i_1, i_2, \dots, i_k$; $u = e_0$, если в процессе построения оператора Паули нет делителей нуля; если делители нуля встречаются k раз на $i_1, i_2, \dots, i_k$ этапах, то: $u = e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_k}$, если k — четное число; $u = e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_k} e_{\tau'}$, $e_{\tau'} = e_1 \dots e_n$, если k — нечетное число.

Доказательство. Будем искать оператор в виде $T = \sum_{\alpha \in \Gamma_n} a_\alpha e_\alpha, a_\alpha \in Z$. Заметим, что a_α — комплексные числа, если $p+q+1 \equiv 3 \pmod 4$, a_α — двойные числа, если $p+q+1 \equiv 1 \pmod 4$. Базис $\{e_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma_n}$ состоит из 2^n элементов. Элемент e_1 коммутирует с половиной элементов базиса и антикоммутирует с другой половиной элементов, которые обозначены соответственно w_1 и v_1.

На первом шаге подберем коэффициенты a_α так, чтобы выполнялись равенства $Te_1 =$ $= e_{\gamma_1} T$. Имеем

$$(e_1 - e_{\gamma_1}) w_1 = (e_1 + e_{\gamma_1}) v_1. \tag{3.4}$$

Умножим равенство (3.4) слева на $\overline{e_1 + e_{\gamma_1}}$, если $a_\alpha \in Z$ — комплексные числа или на $\widetilde{(e_1 + e_{\gamma_1})}$, если $a_\alpha \in Z$ — двойные числа. Из рассуждений, проведенных в Теореме 5 и пункте 2.2, следует, что $(\overline{e_1 + e_{\gamma_1}})(e_1 + e_{\gamma_1}) = -2\varepsilon_1(1 + b_1^{(1)})e_0$, $\widetilde{(e_1 + e_{\gamma_1})}(e_1 + e_{\gamma_1}) =$ $= 2\varepsilon_1(1 + b_1^{(1)})e_0$, где $\varepsilon_1 = e_1^2 = e_{\gamma_1}^2$. Оператор $T_1 = e_0 \pm \varepsilon_1 e_{\gamma_1} e_1$, где знак плюс берется, если $b_1^{(1)} \neq -1$, знак минус, если $b_1^{(1)} = -1$. Продолжая этот процесс, который подробно изложен в Теореме 6 и в пункте 2.2, получим, что оператор Паули $T = T_n u$. Операторы T_i находятся по итерационной формуле

$$T_i = T_{i-1} \pm \varepsilon_i e_{\gamma_i I} T_{i-1} e_I, \quad i = 2, 3, \ldots, n, \tag{3.5}$$

где $\varepsilon_i = e_i^2 = e_{\gamma_i}^2$; в равенстве (3.5) берется знак плюс, если $(\bar{T}_{i-1}T_i + \bar{T}_i T_{i-1}) \neq 0$ $((\tilde{T}_{i-1}T_i + \tilde{T}_i T_{i-1}) \neq 0)$; знак минус, если $(\bar{T}_{i-1}T_i + \bar{T}_i T_{i-1}) = 0$ $((\tilde{T}_{i-1}T_i + \tilde{T}_i T_{i-1}) = 0)$.

На последнем этапе с помощью равенства $e_{\gamma_1} e_{\gamma_2} \ldots e_{\gamma_{n+1}} = e_1 e_2 \ldots e_{n+1}$ доказывается, что оператор Паули удовлетворяет равенству $Te_{n+1} = e_{\gamma_{n+1}}$. □

Заключение

Подведем итоги полученных результатов. Пусть $R_{p,q}$, $p + q = n + 1$ — нечетная алгебра Клиффорда. Пусть $\{e_i\}_{i=1}^{n+1}$ образующий базис алгебры Клиффорда, для которого выполняются условия (0.1). Пусть $\{e_{\gamma_i}\}_1^{n+1}$ — другой генерирующий базис вида (2.10) удовлетворяет условиям (0.1), и $e_{\gamma_1} e_{\gamma_2} \ldots e_{\gamma_{n+1}} = e_1 e_2 \ldots e_{n+1}$. Для нечетных алгебр Клиффорда найден метод построения оператора Паули T, который имеет обратный и удовлетворяет равенствам $e_{\gamma_i} = Te_i T^{-1}$, $i = 1, 2, \ldots, n + 1$. Оператор Паули $T = T_n u$ (с точностью до обратного элемента центра) находится по итерационной формуле

$$T_1 = e_0 \pm \varepsilon_1 e_{\gamma_1} e_1, \quad T_i = T_{i-1} \pm \varepsilon_i e_{\gamma_i} T_{i-1} e_i, \quad i = 2, 3, \ldots, n,$$

где $\varepsilon_i = e_i^2 = e_{\gamma_i}^2$; знак плюс берется, если на этапе нет делителей нуля; знак минус, если на этапе имеются делители нуля.

При построении операторов T_i используется два вида сопряжения: сопряжение Клиффорда и сопряжение «реверс». Клиффордовое сопряжение используется, если элементы e_{γ_i} удовлетворяют равенствам $\bar{e}_{\gamma_i} = -e_{\gamma_i}$. Сопряжение «реверс» используется, если элементы e_{γ_i} удовлетворяют равенствам $\tilde{e}_{\gamma_i} = e_{\gamma_i}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lounesto P. Clifford algebras and spinors. Cambridge University Press, 2009. https://doi.org/10.1017/CBO9780511526022
2. Марчук Н. Г., Широков Д. С. Введение в теорию алгебр Клиффорда. М.: Фазис, 2012.
3. Марчук Н. Г. Демонстрационное представление и тензорные произведения алгебр Клиффорда // Труды математического института имени В. А. Стеклова. 2015. Т. 290. С. 154–165. https://doi.org/10.1134/S0371968515030139
4. Широков Д. С. Обобщение теоремы Паули на случай алгебр Клиффорда // Доклады Академии наук. 2011. Т. 440. № 5. С. 607–610. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=17057981
5. Широков Д. С. Обобщение теоремы Паули на случай алгебр Клиффорда // Наноструктуры. Математическая физика и моделирование. 2013. Т. 9. № 1. С. 93–104. https://elibrary.ru/item.asp?id=22078100
6. Shirokov D. S. Calculation of elements of spin groups using generalized Pauli's theorem // Advances in Applied Clifford Algebras. 2015. Vol. 25. No. 1. P. 227–244. https://doi.org/10.1007/s00006-014-0471-3
7. Shirokov D. S. Method of generalized Reynolds operators in Clifford algebras // Mathematical Physics. 2020. P. 1–20. https://arxiv.org/abs/1409.8163v3
8. Широков Д. С. Теорема Паули при описании n-мерных спиноров в формализме алгебр Клиффорда // Теоретическая и математическая физика. 2013. Т. 175. № 1. С. 11–34. https://doi.org/10.4213/tmf8384

9. Широков Д. С. Использование обобщенной теоремы Паули для нечетных элементов алгебры Клиффорда для анализа связей между спинорными и ортогональными группами произвольных размерностей // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». 2013. Вып. 1 (30). С. 279–287. https://doi.org/10.14498/vsgtu1176
10. Shirokov D. S. Method of averaging in Clifford algebras // Advances in Applied Clifford Algebras. 2017. Vol. 27. No. 1. P. 149–163. https://doi.org/10.1007/s00006-015-0630-1
11. Кузнецов С. П., Мочалов В. В., Чуев В. П. О теореме Паули в алгебрах Клиффорда // Известия высших учебных заведений. Математика. 2019. № 11. С. 16–31. https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-11-16-31
12. Kuznetsov S. P., Mochalov V. V., Chuev V. P. On Pauli's theorem in the Clifford algebra $R_{1,3}$ // Advances in Applied Clifford Algebras. 2019. Vol. 29. No. 5. Article number: 103. https://doi.org/10.1007/s00006-019-1009-5
13. Kuznetsov S. P., Mochalov V. V., Chuev V. P. On Pauli's theorem in Clifford algebra $R_{p,q}$ // ANS conference series: scientific heritage of Sergey A. Chaplygin (nonholonomic mechanics, vortex structures and hydrodynamics), 2019. P. 133–135. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=39254854

Поступила в редакцию 22.10.2021

Принята к публикации 16.12.2021

Кузнецов Сергей Петрович, старший преподаватель, кафедра дискретной математики и информатики, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, 428015, Россия, г. Чебоксары, пр. Московский, 15.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6491-2223
E-mail: chevchenka@mail.ru

Мочалов Владимир Викторович, к. ф.-м. н., доцент, кафедра дискретной математики и информатики, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, 428015, Россия, г. Чебоксары, пр. Московский, 15.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8136-3932
E-mail: m622573@gmail.com

Чуев Василий Петрович, к. ф.-м. н., доцент, кафедра дискретной математики и информатики, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, 428015, Россия, г. Чебоксары, пр. Московский, 15.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1490-0929
E-mail: 570065@mail.ru

Цитирование: С. П. Кузнецов, В. В. Мочалов, В. П. Чуев. О теореме Паули в алгебрах Клиффорда нечетной размерности // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2022. Т. 32. Вып. 1. С. 44–61.

VESTNIK UDMURTSKOGO UNIVERSITETA. MATEMATIKA. MEKHANIKA. KOMP'UTERNYE NAUKI
MATHEMATICS 2022. Vol. 32. Issue 1. Pp. 44–61.

S. P. Kuznetsov, V. V. Mochalov, V. P. Chuev

Pauli's theorem in Clifford algebras of odd dimension

Keywords: odd Clifford algebras, Pauli theorem, zero divisors.

MSC2020: 15A66

DOI: 10.35634/vm220104

Pauli's theorem is investigated in real Clifford algebras of odd dimension. In Clifford algebras $R_{3,0}$ and $R_{5,0}$ an algorithm for constructing the Pauli operator is given. This algorithm is transferred to an arbitrary Clifford algebra of odd dimension $R_{p,q+1}$ ($R_{p+1,q}$). An iterative formula for finding the Pauli operator is obtained. It is shown that the problem of constructing the Pauli operator is related to the problem of zero divisors in Clifford algebras. When constructing Pauli operators, two types of conjugations are used: Clifford conjugation and reverse conjugation. If $p+q+1 \equiv 3 \pmod 4$, then when constructing the Pauli operator Clifford conjugation is used; if $p+q+1 \equiv 1 \pmod 4$ then reverse conjugation is used.

REFERENCES

1. Lounesto P. *Clifford algebras and spinors*, Cambridge University Press, 2009. https://doi.org/10.1017/CBO9780511526022
2. Marchuk N. G., Shirokov D. S. *Vvedenie v teoriyu algebr Klifforda* (Introduction in theory of Clifford algebras), Moscow: Fazis, 2012.
3. Marchuk N. G. Demonstration representation and tensor products of Clifford algebras, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2015, vol. 290, no. 1, pp. 143–154. https://doi.org/10.1134/S0081543815060139
4. Shirokov D. S. Extension of Pauli's theorem to Clifford algebras, *Doklady Mathematics*, 2011, vol. 84, no. 2, pp. 699–701. https://doi.org/10.1134/S1064562411060329
5. Shirokov D. S. Generalization of Pauli's theorem on the case of Clifford algebras, *Nanostuctures. Mathematical Physics and Modelling*, 2013, vol. 9, no. 1, pp. 93–104 (in Russian). https://elibrary.ru/item.asp?id=22078100
6. Shirokov D. S. Calculation of elements of spin groups using generalized Pauli's theorem, *Advances in Applied Clifford Algebras*, 2015, vol. 25, no. 1, pp. 227–244. https://doi.org/10.1007/s00006-014-0471-3
7. Shirokov D. S. Method of generalized Reynolds operators in Clifford algebras, *Mathematical Physics*, 2020, pp. 1–10. https://arxiv.org/abs/1409.8163
8. Shirokov D. S. Pauli theorem in the description of n-dimensional spinors in the Clifford algebra formalism, *Theoretical and Mathematical Physics*, 2013, vol. 175, no. 1, pp. 454–474. https://doi.org/10.1007/s11232-013-0038-9
9. Shirokov D. S. The use of the generalized Pauli's theorem for odd elements of Clifford algebra to analyze relations between spin and orthogonal groups of arbitrary dimensions, *Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta. Seriya "Fiziko-Matematicheskie Nauki"*, 2013, issue 1 (30), pp. 279–287 (in Russian). https://doi.org/10.14498/vsgtu1176
10. Shirokov D. S. Method of averaging in Clifford algebras, *Advances in Applied Clifford Algebras*, 2017, vol. 27, no. 1, pp. 149–163. https://doi.org/10.1007/s00006-015-0630-1
11. Kuznetsov S. P., Mochalov V. V., Chuev V. P. On Pauli's theorem in the Clifford algebra, *Russian Mathematics*, 2019, vol. 63, no. 11, pp. 13–27. https://doi.org/10.3103/S1066369X19110033
12. Kuznetsov S. P., Mochalov V. V., Chuev V. P. On Pauli's theorem in the Clifford algebra $R_{1,3}$, *Advances in Applied Clifford Algebras*, 2019, vol. 29, no. 5, article number: 103. https://doi.org/10.1007/s00006-019-1009-5
13. Kuznetsov S. P., Mochalov V. V., Chuev V. P. On Pauli's theorem in Clifford algebra $R_{p,q}$, *ANS conference series: scientific heritage of Sergey A. Chaplygin (nonholonomic mechanics, vortex structures and hydrodynamics)*, 2019, pp. 298–306. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=39254854

Received 22.10.2021

Accepted 16.12.2021

Sergey Petrovich Kuznetsov, Senior Lecturer, Department of Discrete Mathematics and Computer Science, Chuvash State University, pr. Moskovskii, 15, Cheboksary, 428015, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6491-2223
E-mail: chevchenka@mail.ru

Vladimir Viktorovich Mochalov, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Discrete Mathematics and Computer Science, Chuvash State University, pr. Moskovskii, 15, Cheboksary, 428015, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8136-3932
E-mail: m622573@gmail.com

Vasiliy Petrovich Chuev, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Chair of Discrete Mathematics and Computer Science, Chuvash State University, pr. Moskovskii, 15, Cheboksary, 428015, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1490-0929
E-mail: 570065@mail.ru

Citation: S. P. Kuznetsov, V. V. Mochalov, V. P. Chuev. Pauli's theorem in Clifford algebras of odd dimension, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2022, vol. 32, issue 1, pp. 44–61.