МАТЕМАТИКА 2022. Т. 32. Вып. 1. С. 26–43.

УДК 519.644.5

© *Д. Ю. Иванов*

О РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ АППРОКСИМАЦИЙ ПОТЕНЦИАЛА ДВОЙНОГО СЛОЯ ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ ДВУМЕРНОЙ ОБЛАСТИ

На основе кусочно-квадратичной интерполяции получены полуаналитические аппроксимации потенциала двойного слоя вблизи и на границе двумерной области. Для вычисления интегралов, образующихся после интерполяции функции плотности, используется точное интегрирование по переменной $\rho = \left(r^2 - d^2\right)^{1/2}$, где d и r — расстояния от наблюдаемой точки до границы области и до граничной точки интегрирования соответственно. Доказана устойчивая сходимость таких аппроксимаций с кубической скоростью равномерно вблизи границы класса C^5, а также на самой границе. Также доказано, что использование для вычисления интегралов стандартных квадратурных формул не нарушает равномерной кубической сходимости аппроксимаций прямого значения потенциала на границе класса C^6. При некоторых упрощениях доказано, что использование для вычисления интегралов стандартных квадратурных формул влечет отсутствие равномерной сходимости аппроксимаций потенциала внутри области вблизи любой граничной точки. Теоретические выводы подтверждены результатами численного решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круговой области.

Ключевые слова: квадратурная формула, потенциал двойного слоя, метод граничных элементов, почти сингулярный интеграл, эффект пограничного слоя, равномерная сходимость.

DOI: 10.35634/vm220103

Метод граничных элементов (МГЭ) [1, с. 64] наряду с методом конечных элементов (МКЭ) и методом конечных разностей (МКР) является одним из основных методов приближенного решения задач математической физики [1, с. 44]. В отличие от двух других методов для реализации МГЭ требуется дискретизация только границы $\partial\Omega$ открытой области Ω. В рамках непрямого МГЭ [1, с. 58] решение краевой задачи в любой точке $x \in \Omega$ получают в виде потенциала $u(x)$, выраженного с помощью интегрального оператора через функцию плотности $v(x')$. Функция $v(x')$ задана на границе $\partial\Omega$ и является решением граничного интегрального уравнения (ГИУ). Граница $\partial\Omega$ разбивается на граничные элементы (ГЭ) Γ_i, на каждом из которых осуществляется полиномиальная аппроксимация функции $v(x')$, после чего возникает необходимость приближенного вычисления интегралов на ГЭ. Так как ядра интегральных операторов имеют особенности в точках $x = x'$, ГЭ разделяют на три типа: сингулярные ГЭ (СГЭ), если $x \in \Gamma_i$; несингулярные ГЭ (НСГЭ), если точка x находится достаточно далеко от Γ_i, и почти сингулярные ГЭ (ПСГЭ), если $x \notin \Gamma_i$ и $x \in \Omega$, но расстояние от точки x до Γ_i мало́ по сравнению с размером Γ_i [2]. Мы выделим здесь еще четвертый тип — околосингулярные ГЭ (ОСГЭ), если $x \in \partial\Omega$, $x \notin \Gamma_i$, но ГЭ примыкает к ПСГЭ (или СГЭ) или отделен от него фиксированным числом других ОСГЭ, так что при неограниченном уменьшении шагов дискретизации точки ОСГЭ неограниченно приближаются к точке x_0 — ближайшей к x граничной точке.

Интегралы на НСГЭ обычно вычисляют с помощью простых квадратурных формул Гаусса (ПКФГ) [1, с. 68]. Если интегралы на СГЭ несобственные, то для вычисления интегралов требуются специальные методы: метод адаптивного деления СГЭ [3], полуаналитические методы [4, 5], методы нелинейного преобразования переменной интегрирования [6]. Интегралы на ПСГЭ тоже, как правило, не могут быть удовлетворительно вычислены с помощью ПКФГ, поэтому по аналогии с СГЭ используются метод адаптивного деления ПСГЭ [3, 7, 8], полуаналитические методы [5, 8–14], методы нелинейного преобразования переменной интегрирования: экспоненциальные преобразования [15–19], $\sinh$-преобразования [2, 6, 11, 20–23], преобразования функции расстояния [2, 16].

Невозможность удовлетворительно вычислить интегралы на ПСГЭ с помощью ПКФГ называется эффектом пограничного слоя [16, 18, 22]. Необходимость точного вычисления потенциалов вблизи границы области возникает при решении задач в тонкостенных и многослойных конструкциях, тонких покрытиях, пленках [10, 13, 15, 23], на концах трещин [21]. МКЭ и МКР не могут гарантировать точности при решении таких задач, так как требуют дискретизации области Ω [6]. Кроме того, в указанных задачах большое значение имеет точная аппроксимация границы $\partial\Omega$. Поэтому линейная аппроксимация ПСГЭ, применяемая, например, в работах [2, 5, 6, 8, 9, 13, 14, 16, 17], считается для этих целей неудовлетворительной [9, 11, 18, 19], и проделана работа по реализации МГЭ в случае квадратичной аппроксимации ПСГЭ [3, 10–12, 15, 18, 20–22]. Но в последнее время отмечена необходимость еще более точной аппроксимации границы $\partial\Omega$, и такая аппроксимация была осуществлена в рамках метода адаптивного деления [3, 7], экспоненциального преобразования [19] и $\sinh$-преобразования [23]. Эти методы легче реализуются для более сложной геометрии ПСГЭ по сравнению с полуаналитическими, так как интегралы в них вычисляются численно с помощью ПКФГ и аппроксимация границы для этого необязательна, тогда как в большинстве полуаналитических методов точное интегрирование становится возможным только после аппроксимации координатных функций суммой первых членов ряда Тейлора [5, 8, 9, 12–14], а с увеличением числа таких членов увеличивается сложность интегралов. Но, как отмечено в работах [2, 6, 10, 21, 23], методы адаптивного деления ПСГЭ не обеспечивают точность или требуют больших затрат машинного времени при очень малых расстояниях от точки x до границы $\partial\Omega$. Также приведены результаты численных экспериментов [7], согласно которым точность методов нелинейного преобразования в значительной мере зависит от положения проекции точки x на границу $\partial\Omega$.

Возможность использования точной границы $\partial\Omega$ заложена также в полуаналитическом методе, предложенном в работах [10, 11] для аппроксимации двумерных потенциалов и их производных. Здесь для вычисления интегралов на квадратичных ПСГЭ применяется точное интегрирование по переменной $\rho \equiv (r^2 - d^2)^{1/2}$, где d и r — расстояния от наблюдаемой точки x до границы $\partial\Omega$ и до граничной точки интегрирования x' соответственно. Для того чтобы точное интегрирование по ρ стало возможным, подынтегральная функция представляется в виде произведения двух функций, одна из которых при малых значениях d является быстро изменяющейся вблизи $\rho = 0$ и берется в качестве весовой, а другая является медленно изменяющейся и аппроксимируется с помощью полиномиальной интерполяции по переменной ρ. Хотя в работах [10, 11] этот метод предложен только для вычисления интегралов на квадратичных ПСГЭ, на самом деле он может быть использован для любой достаточно гладкой аналитически заданной кривой $\partial\Omega$, так как интегралы по переменной ρ зависят от кривой $\partial\Omega$ только параметрически и всегда могут быть вычислены аналитически с помощью формулы Ньютона–Лейбница. В более ранней работе [4] аналогичный метод предложен для вычисления интегралов на линейных и квадратичных СГЭ, когда $\rho = r$.

В работе автора [24] получены условия, при которых возможна замена переменной интегрирования $\rho = \rho(s)$, где s — криволинейная координата кривой $\partial\Omega$. В более ранней работе автора [25] получены условия для такой замены, когда $x \in \partial\Omega$ и $\rho = r$. В настоящей работе данный метод использован для получения аппроксимаций потенциала двойного слоя (ПДС) для двумерного уравнения Лапласа.

Как и в работах [15, 19, 23], в работе [11] считается, что подынтегральные функции на ПСГЭ, возникающие при аппроксимации производных потенциала простого слоя для двумерного уравнения Лапласа, имеют вид: $f(s)\,(\rho^2+d^2)^{-1}$, где $f(s)$ — медленно изменяющаяся функция. В настоящей работе подынтегральные функции, возникающие при аппроксимации ПДС, представлены в виде суммы функций с более слабыми особенностями: $f_1(s)\,\rho^2\,(\rho^2+d^2)^{-1}+f_2(s)\,d\,(\rho^2+d^2)^{-1}$, при этом $f_1(s)$ и $f_2(s)$ — медленно изменяющиеся функции. С помощью точного интегрирования по переменной ρ вычисляются интегралы на ГЭ, если величины d и ρ не превосходят приблизительно трети радиуса круга Ляпунова, а остальные интегралы вычисляются с помощью ПКФГ. Медленно изменяющиеся функции $f_1(s)$, $f_2(s)$ и функция плотности $v(x')$ аппроксимируются с помощью кусочно-квадратичной интерполяции (ККИ). Доказано, что такие аппроксимации ПДС устойчиво сходятся с кубической скоростью равномерно вблизи и на самой границе $\partial\Omega$ класса C^5. В случае кусочно-постоянной интерполяции функции $v(x')$ доказано, что вычисление интегралов и на ПСГЭ, и на ОСГЭ с помощью ПКФГ или квадратурных формул Ньютона–Котеса (КФНК) влечет отсутствие равномерной сходимости аппроксимаций ПДС вблизи любой граничной точки. Поэтому точное интегрирование по ρ необходимо осуществлять в фиксированной области, а не только на ПСГЭ, как предлагается в работе [11]. В связи с этим отметим также работы [5, 8, 14], где аналитическое интегрирование осуществляется на всех ГЭ.

Известно [26, с. 308], что ядро интегрального оператора прямого значения ПДС на границе $\partial\Omega$ может быть доопределено в точках $x=x'$ до непрерывной функции на множестве $\partial\Omega\times\partial\Omega$, то есть интегралы на СГЭ не являются несобственными. В настоящей работе доказано, что использование для аппроксимации интегралов на ГЭ исключительно ПКФГ не нарушает равномерную кубическую сходимость аппроксимаций прямого значения ПДС на границе $\partial\Omega$ класса C^6, то есть применение специальных методов для вычисления интегралов на СГЭ и ОСГЭ не требуется.

Представлены результаты численного решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в единичном круге с помощью ПДС, которые подтверждают теоретические выводы. Численные решения, полученные на основе точного интегрирования по ρ, равномерно сходятся с кубической скоростью и имеют практически одинаковые погрешности в диапазоне значений d от 10^{-2} до 10^{-15}, тогда как у решений, при вычислении которых вместо точного интегрирования по ρ используется ПКФГ, отсутствует равномерная сходимость и существенно снижается точность вблизи границы $\partial\Omega$.

Ранее в работах автора [24, 27] на основе точного интегрирования по переменной ρ и ККИ были получены аппроксимации тепловых потенциалов простого и двойных слоев, равномерно сходящиеся с кубической скоростью вблизи и на самой границе двумерной области Ω класса C^5.

§ 1. Предварительные замечания

Пусть Ω — двумерная открытая ограниченная односвязная область с границей $\partial\Omega$. В декартовых координатах $x\equiv(x_1,x_2)$ зададим параметрические уравнения кривой $\partial\Omega$: $x_1=\widetilde{x}_1(s)$, $x_2=\widetilde{x}_2(s)$. Параметр s по модулю равен длине дуги, откладываемой от некоторой фиксированной точки и заканчивающейся в точке $\widetilde{x}(s)\equiv(\widetilde{x}_1(s),\widetilde{x}_2(s))$, с положительным направлением против часовой стрелки. Функции $\widetilde{x}_1(s)$, $\widetilde{x}_2(s)$ $(s\in\mathbb{R})$, периодические с периодом $2S$ (S — половина длины $\partial\Omega$), осуществляют взаимно однозначное отображение множества $I_S\equiv[-S,S)$ на множество $\partial\Omega$. Условимся далее писать $\partial\Omega\in C^n$, если существуют непрерывные производные $\widetilde{x}_i^{(l)}(s)$ $(i=1,2,\ l=\overline{0,n},\ s\in\mathbb{R})$. Будем считать, что $\partial\Omega\in C^2$, если не оговорено особо.

Через $C^n(\partial\Omega)$ $(n\in\mathbb{Z}_+)$ обозначим линейное нормированное пространство комплексных функций $f(s)$ $(s\in I_S)$, имеющих непрерывные на множестве $\overline{I_S}$ производные $f^{(l)}(s)$:

$f^{(l)}(S-0) = f^{(l)}(-S+0)$ $(l=\overline{0,n})$, с нормой $\|f\|_{C^n(\partial\Omega)} = \sum\limits_{l=0}^{n} \sup\limits_{s\in I_S} \left|f^{(l)}(s)\right|$ $(C(\partial\Omega)\equiv C^0(\partial\Omega))$ [28, с. 242]. На множестве $\Omega' \equiv \mathbb{R}^2 \backslash \partial\Omega$ определим функцию $u(x) \equiv G(x)v$, где

$$G(x)\,v \equiv \int_{I_S} g(x,s')\,v(s')\,ds', \quad g(x,s') \equiv \partial_{\vec{n}(s')} \ln r^{-1}, \quad v \in C(\partial\Omega).$$

Функция $u(x)$ называется ПДС с плотностью v. Здесь $r \equiv |\vec{r}|$, $\vec{r} \equiv x' - x$, $x \in \Omega'$, $x' \equiv \widetilde{x}(s')$, $s' \in I_S$; дифференцирование $\partial_{\vec{n}(s')}$ осуществляется по переменной x' вдоль вектора $\vec{n}(s') = (-\widetilde{x}_2'(s'), \widetilde{x}_1'(s'))$ — единичной нормали к кривой $\partial\Omega$, проходящей через точку x' и направленной внутрь области Ω.

Пусть $\vec{r}_0 \equiv x' - x$, $r_0 \equiv |\vec{r}_0|$, $\sigma \equiv s' - s$, при этом $x \equiv \widetilde{x}(s)$, $x' \equiv \widetilde{x}(s')$, $s, s' \in I_S$. На множестве $\Theta \equiv \left\{(s,s')\colon s \in \overline{I_S}, \sigma \in \overline{I_S}\right\}$ зададим функции $\psi_i(s,s')$ $(i=\overline{0,2})$: при $s' \neq s$ равенствами $\psi_i \equiv \varphi_i/\sigma^2$, где

$$\varphi_0(s,s') \equiv r_0^2 = [\widetilde{x}_1(s') - \widetilde{x}_1(s)]^2 + [\widetilde{x}_2(s') - \widetilde{x}_2(s)]^2,$$
$$\varphi_1(s,s') \equiv 2^{-1}\partial_{\vec{n}(s')} r_0^2 = -\widetilde{x}_2'(s')\,[\widetilde{x}_1(s') - \widetilde{x}_1(s)] + \widetilde{x}_1'(s')\,[\widetilde{x}_2(s') - \widetilde{x}_2(s)] = \vec{n}(s')\,\vec{r}_0,$$
$$\varphi_2(s,s') \equiv 2^{-1}\partial_{\vec{n}(s)} r_0^2 = \widetilde{x}_2'(s)\,[\widetilde{x}_1(s') - \widetilde{x}_1(s)] - \widetilde{x}_1'(s)\,[\widetilde{x}_2(s') - \widetilde{x}_2(s)] = -\vec{n}(s)\,\vec{r}_0,$$

а при $s' = s$ равенствами:

$$\psi_0(s,s) \equiv 1, \quad \psi_1(s,s) = \psi_2(s,s) \equiv 2^{-1}\,[\widetilde{x}_2'(s)\,\widetilde{x}_1''(s) - \widetilde{x}_1'(s)\,\widetilde{x}_2''(s)].$$

Согласно [29, т. 1] при условии $\partial\Omega \in C^{n+2}$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$ существуют непрерывные на множестве Θ производные $\partial_{s'}^{j}\psi_i$ $(j=\overline{0,n},\ i=\overline{0,2})$.

Так как контур $\partial\Omega$ не имеет точек самопересечения, то $c_r \equiv \inf\limits_{(s,s')\in\Theta} \psi_0 > 0$ $(c_r \leqslant 1)$. Справедлива оценка: $\vartheta \leqslant c_K\,|\sigma| \leqslant c_K' c_r^{-1/2} r_0$, где ϑ — острый угол между нормалями, проходящими через точки $\widetilde{x}(s)$ и $\widetilde{x}(s')$; $c_K \equiv \sup\limits_{s\in I_S} K(s,s)$, $c_K' \equiv \sup\limits_{(s,s')\in\Theta} K(s,s')$, $K(s,s') \equiv |\partial_{s'}^2\varphi_2|$, $K(s,s)$ — кривизна кривой в точке $\widetilde{x}(s)$. Поэтому величина $3D$, где $D \equiv c_r^{1/2}(3c_K')^{-1}$, может быть взята в качестве радиуса круга Ляпунова [30, с. 354]. Введем в рассмотрение местные системы декартовых координат с началами в точках $\widetilde{x}(s)$ и осями ординат, направленными по нормалям $\vec{n}(s)$. Согласно [26, с. 313] точки $\widetilde{x}_d(s)$ $(s \in I_S)$ с местными координатами $(0,d)$ при фиксированном $d \in I_D \equiv [-D,0) \cup (0,D]$ образуют замкнутую линию $\partial\Omega_d \in C^1$, параллельную кривой $\partial\Omega$, т. е. соответствие между точками $\widetilde{x}_d(s)$ и $\widetilde{x}(s)$ взаимно однозначное $(\widetilde{x}_0(s) \equiv \widetilde{x}(s))$.

Местные координаты точек $\widetilde{x}(s')$ равны $(\vec{e}(s)\,\vec{r}_0, \vec{n}(s)\,\vec{r}_0) = (-2^{-1}\partial_s\varphi_0, -\varphi_2)$, где $\vec{e}(s) \equiv (\widetilde{x}_1'(s), \widetilde{x}_2'(s))$, поэтому $r^2 = |\widetilde{x}_d(s) - \widetilde{x}(s')|^2 = \varphi_0' + d^2$, $\varphi_0' \equiv \varphi_0 + 2d\varphi_2$. Так как кривая $\partial\Omega$ и окружность радиуса $d \in I_D$ с центром $\widetilde{x}_d(s)$ имеют только одну общую точку $\widetilde{x}(s)$, то $2d\cos\alpha < r_0$, где α — угол между лучами $\widetilde{x}(s)\widetilde{x}(s')$ и $\widetilde{x}(s)\widetilde{x}_d(s)$, и $\varphi_0' = r_0^2 - 2dr_0\cos\alpha > 0$ при $(d,s,s') \in \Upsilon \equiv \overline{I_D} \times \Theta$, $s \neq s'$. Зададим на множестве Υ функцию $\rho'(d,s,s')$: $\rho' = \sqrt{\varphi_0'}$, если $\sigma \geqslant 0$; $\rho' = -\sqrt{\varphi_0'}$, если $\sigma < 0$, а также функцию $\psi_0'(d,s,s') \equiv \psi_0 + 2d\psi_2$. Так как $\psi_0(s,s) = 1$, $|\psi_2(s,s)| \equiv 2^{-1}K(s,s)$ и $D \leqslant (3c_K)^{-1}$, то при $(d,s) \in I_D \times I_S$ имеем оценку: $\psi_0'(d,s,s) \geqslant 2/3$. Поэтому $\psi_0' > 0$ на множестве Υ.

Так как $r^2 = \varphi_0 + 2d\varphi_2 + d^2$, то $2^{-1}\partial_{\vec{n}(s')} r^2 = \varphi_1 + d\varphi_5$, где $\varphi_5(s,s') \equiv -\widetilde{x}_1'(s)\widetilde{x}_1'(s') - \widetilde{x}_2'(s)\widetilde{x}_2'(s')$, поэтому функция $g(x,s')$ при $x = \widetilde{x}_d(s)$, $(d,s,s') \in \Upsilon$, $s \neq s'$, может быть записана в следующем виде:

$$g(\widetilde{x}_d(s), s') = a_1(d,\rho')\,\delta_1(d,s,s') + a_2(d,\rho')\,\delta_2(d,s,s'), \tag{1}$$

где

$$a_1(d,\rho) \equiv \rho^2 \big/ \left(\rho^2 + d^2\right), \quad a_2(d,\rho) \equiv d \big/ \left(\rho^2 + d^2\right), \quad \delta_1 \equiv -\psi_1 \big/ \psi_0', \quad \delta_2 \equiv -\varphi_5.$$

Так как $\psi_0' > 0$ на множестве Υ, то при условии $\partial\Omega \in C^{n+2}$ ($n \in \mathbb{Z}_+$) существуют непрерывные на множестве Υ производные $\partial_{s'}^j \delta_i$ ($j = \overline{0,n}$, $i = 1,2$).

Пусть E_s — дуга кривой $\partial\Omega$, ограниченная двумя параллельными прямыми, находящимися на расстоянии D от прямой $\widetilde{x}(s)\widetilde{x}_D(s)$, причем $\widetilde{x}(s) \in E_s$. Соответствующие значения σ обозначим через Ξ_s, границы отрезка Ξ_s — через Σ_s' и Σ_s'' ($\Sigma_s' < \Sigma_s''$). Введем в рассмотрение множество $\Upsilon' \equiv \left\{(d,s,s') \colon d \in \overline{I_D}, s \in \overline{I_S}, \sigma \in \Xi_s\right\}$.

Теорема 1 (см. [24, следствие 2]). *Пусть $\partial\Omega \in C^{n+2}$ ($n \in \mathbb{Z}_+$). Тогда функции $\rho_{d,s}(\sigma) \equiv \equiv \rho'(d,s,s+\sigma)$ при любых фиксированных $s \in \overline{I_S}$, $d \in \overline{I_D}$ взаимно однозначно отображают множества Ξ_s на соответствующие множества $\rho_{d,s}(\Xi_s)$, и на множестве $\widetilde{\Upsilon}' \equiv \{(d,s,\rho)\colon d \in \overline{I_D}, s \in \overline{I_S}, \rho \in \rho_{d,s}(\Xi_s)\}$ обратные функции $\sigma_{d,s}(\rho)$ имеют непрерывные производные $\sigma_{d,s}^{(j)}(\rho)$, $j = \overline{0,n}$.*

Следствие 1. *Пусть $\partial\Omega \in C^{n+2}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда функции $\widetilde{\delta}_0(d,s,\rho) \equiv \delta_0\left(d,s,s+\sigma_{d,s}(\rho)\right)$ $\left(\delta_0(d,s,s') \equiv (\partial_{s'}\rho')^{-1}\right)$, $\widetilde{\delta}_1(d,s,\rho) \equiv \delta_1\left(d,s,s+\sigma_{d,s}(\rho)\right)\widetilde{\delta}_0$, $\widetilde{\delta}_2(d,s,\rho) \equiv \delta_2\left(s,s+\sigma_{d,s}(\rho)\right)\widetilde{\delta}_0$ имеют непрерывные на множестве $\widetilde{\Upsilon}' \equiv \left\{(d,s,\rho)\colon d \in \overline{I_D}, s \in \overline{I_S}, \rho \in \rho_{d,s}(\Xi_s)\right\}$ производные $\partial_\rho^j \widetilde{\delta}_i$, $j = \overline{0,n}$, $i = \overline{0,2}$.*

Обозначим через $\Lambda_m(z)$ и $\widetilde{\Lambda}_m(z)$ ($z \in [a,b]$, $m = \overline{0,2}$) квадратичные интерполяционные полиномы Лагранжа:

$$\Lambda_m(z) \equiv \prod_{j=0\ (j\neq m)}^{2} \frac{z - z_j}{z_m - z_j}, \quad z_j \equiv \overline{z} + q_j h, \quad j = \overline{0,2};$$

$$\widetilde{\Lambda}_m(z) \equiv \prod_{j=0\ (j\neq m)}^{2} \frac{z - \widetilde{z}_j}{\widetilde{z}_m - \widetilde{z}_j}, \quad \widetilde{z}_j \equiv \overline{z} + \widetilde{q}_j h, \quad j = \overline{0,2}.$$

Здесь $h \equiv 2^{-1}(b-a)$, $\overline{z} \equiv 2^{-1}(a+b)$; $q_0 \equiv -1$, $q_1 \equiv 0$, $q_2 \equiv 1$; $\widetilde{q}_0 \equiv -\sqrt{3}\big/2$, $\widetilde{q}_1 \equiv 0$, $\widetilde{q}_2 \equiv \sqrt{3}\big/2$ [31, с. 92]. Пусть $f(z)$ — трижды непрерывно дифференцируемая на промежутке $[a,b]$ комплексная функция. Тогда для функций $\widetilde{f}_1(z) \equiv \sum\limits_{m=0}^{2} f(z_m)\Lambda_m(z)$, $\widetilde{f}_2(z) \equiv \sum\limits_{m=0}^{2} f(\widetilde{z}_m)\widetilde{\Lambda}_m(z)$, а также первых и вторых производных функции $\widetilde{f}_1(z)$ при $z \in [a,b]$ имеют место оценки:

$$\left|\widetilde{f}_1(z) - f(z)\right| \leqslant c_\omega \sup_{z\in[a,b]} \left|f^{(3)}(z)\right| h^3, \quad \left|\widetilde{f}_2(z) - f(z)\right| \leqslant \widetilde{c}_\omega \sup_{z\in[a,b]} \left|f^{(3)}(z)\right| h^3, \tag{2}$$

$$\left|\widetilde{f}_1(z)\right| \leqslant c_\Lambda \max_{m=\overline{0,2}} |f(z_m)|, \quad \left|\widetilde{f}_2(z)\right| \leqslant \widetilde{c}_\Lambda \max_{m=\overline{0,2}} |f(\widetilde{z}_m)|, \tag{3}$$

$$\left|\widetilde{f}_1^{(1)}(z)\right| \leqslant c_\Lambda' \sup_{z\in[a,b]} \left|f^{(1)}(z)\right|, \quad \left|\widetilde{f}_1^{(2)}(z)\right| \leqslant c_\Lambda'' \sup_{z\in[a,b]} \left|f^{(2)}(z)\right|, \tag{4}$$

где $c_\omega \equiv 2\sqrt{3}\big/9$, $\widetilde{c}_\omega \equiv 4^{-1}$, $c_\Lambda \equiv 3$, $\widetilde{c}_\Lambda \equiv 3^{-1}(7 + 2\sqrt{3})$, $c_\Lambda' \equiv 3$, $c_\Lambda'' \equiv 2^{-1}$.

Пусть X и Y — комплексные линейные нормированные пространства [32, с. 119, 139].

Определение 1. Будем говорить, что оператор A *отображает* пространство X в пространство Y, если каждому элементу $f \in X$ поставлен в соответствие некоторый элемент $Af \in Y$ (единственный). Будем обозначать такой оператор как $A\,[X \to Y]$, а если $X = Y$, то $A\,[X]$. Оператор $A\,[X \to Y]$ называется *линейным*, если для любых $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, $f_1, f_2 \in X$ выполняется равенство $A(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 A f_1 + c_2 A f_2$ [32, с. 218].

В соответствии с [32, с. 124] будем называть оператор $A\ [X \to \mathbb{C}]$ линейным функционалом.

Определение 2 (см. [33, с. 145]). Линейный оператор $A\ [X \to Y]$ называется *ограниченным*, если существует хотя бы одно число $c > 0$ такое, что для любых $f \in X$ выполняется неравенство $\|Af\|_Y \leqslant c\|f\|_X$. Наименьшее число c называется *нормой* оператора A и обозначается $\|A\|$.

Имеет место равенство: $\|A\| = \sup_{\|f\|\leqslant 1} \|Af\|$ [32, с. 223]. Ограниченные линейные операторы $A\ [X \to Y]$ *непрерывны*, то есть для любого $\epsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из неравенства $\|f_1 - f_2\|_X < \delta$ $(f_1,\ f_2 \in X)$ следует неравенство $\|Af_1 - Af_2\|_Y < \epsilon$ [32, с. 222]. Ограниченные линейные операторы $A\ [X \to Y]$ образуют линейное пространство с операторной нормой $\|A\|$ [32, с. 224].

Определение 3. Говорят, что линейные операторы $A_n\ [X \to Y]$ $(n \in \mathbb{N})$ *сходятся по операторной норме* к оператору $A\ [X \to Y]$, если $\|A_n - A\| \to 0$ при $n \to \infty$ [33, с. 150].

Определение 4. Говорят, что линейные операторы $A_n\ [X \to Y]$ $(n \in \mathbb{N})$ *сходятся в сильной операторной топологии* к оператору $A\ [X \to Y]$, если $\|A_n f - Af\|_Y \to 0$ при $n \to \infty$ для каждого $f \in X$ [33, с. 150].

Сходимость операторов по операторной норме влечет сходимость операторов в слабой операторной топологии.

Определение 5. Будем говорить, что операторы $A_\alpha\ [X \to Y]$ $(\alpha \in \mathrm{A}$, A — некоторое множество) *ограничены в совокупности*, если существует число $c > 0$ такое, что для всех $\alpha \in \mathrm{A}$ выполняются неравенства $\|A_\alpha\| \leqslant c$.

Очевидно, что из ограниченности в совокупности операторов $A_\alpha\ [X \to Y]$ $(\alpha \in \mathrm{A})$ следует *равномерная* по $\alpha \in \mathrm{A}$ *непрерывность* этих операторов, а именно: для любого $\epsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при условии выполнения неравенства $\|f_1 - f_2\|_X < \delta$ $(f_1,\ f_2 \in X)$ для всех $\alpha \in \mathrm{A}$ выполняются неравенства $\|A_\alpha f_1 - A_\alpha f_2\|_Y < \epsilon$.

Определение 6. Пусть $f_n(\alpha)$, $f(\alpha)$ $(n \in \mathbb{N})$ — функции со значениями в линейном нормированном пространстве X, определенные на некотором множестве A. Будем говорить, что значения функций $f_n(\alpha)$ *сходятся* при $n \to \infty$ к соответствующим значениям функции $f(\alpha)$ в норме пространства X *равномерно* по $\alpha \in A$, если для любого $\epsilon > 0$ существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $\alpha \in A$, $n \geqslant N$, выполняются неравенства $\|f_n(\alpha) - f(\alpha)\|_X < \epsilon$.

§ 2. Аппроксимация потенциала двойного слоя вблизи границы области

Будем полагать, что $x = \widetilde{x}_d(s)$, $d \in \overline{I_D}$, $s \in I_S$. Замкнутую область, ограниченную кривыми $\partial\Omega_{-D}$ и $\partial\Omega_D$, обозначим через Ω_D. В силу равенства (1) и теоремы 1 линейные функционалы $G(x)$ $(x \in \Omega_D)$ могут быть представлены в виде суммы: $G(x) = \sum_{i=1}^{3} G_i(x)$, где

$$G_i(x)f \equiv \int_{\rho_{d,s}(\Xi_s)} a_i(d,\rho)\,\widetilde{\delta}_i(d,s,\rho) f\left(s + \sigma_{d,s}(\rho)\right) d\rho \quad (i = 1, 2),$$

$$G_3(x)f \equiv \int_{I_S \setminus \Xi_s} g(x, s+\sigma) f(s+\sigma) d\sigma.$$

Так как любая прямая, параллельная прямой $\widetilde{x}(s)\widetilde{x}_D(s)$, пересекает границу $\partial\Omega$ внутри круга Ляпунова с центром в $\widetilde{x}(s)$ не более чем в одной точке, то $r \geqslant D$, если

$\sigma \in I_S \backslash \Xi_s$. Учитывая также следствие 1, получаем оценки норм линейных функционалов $G_i(x)$ $[C(\partial\Omega) \to \mathbb{C}]$:

$$\begin{gathered} \|G_i(x)\| \leqslant \breve{a}_i\, \breve{c}_{i,0}, \quad \breve{a}_i \equiv \sup_{d \in \overline{I_D}} \int_{-S}^{S} |a_i(d,\rho)|\, d\rho, \quad \breve{c}_{i,0} \equiv \sup_{(d,s,\rho) \in \widetilde{\Upsilon}'} \left|\widetilde{\delta}_i\right| \quad (i = 1, 2), \\ \|G_3(x)\| \leqslant \breve{a}_3\, \breve{c}_{3,0}, \quad \breve{a}_3 \equiv 2S, \quad \breve{c}_{3,0} \equiv \sup_{|x - \widetilde{x}(s')| \geqslant D} |g(x,s')|\,. \end{gathered} \tag{1}$$

В силу оценок (1) имеем равномерную по $x \in \Omega_D$ ограниченность функционалов $G(x)$ $[C(\partial\Omega) \to \mathbb{C}]$: $\|G(x)\| \leqslant c_G \equiv \breve{a}_1 \breve{c}_{1,0} + \breve{a}_2 \breve{c}_{2,0} + \breve{a}_3 \breve{c}_{3,0}$.

Замечание 1. При $d = 0$ справедливо равенство $G(x) = G_1(x) + G_3(x)$, и функция $u(x) \equiv$ $\equiv G(x)v$ суть прямое значение ПДС на $\partial\Omega$. При этом в силу равенства (1) ядра интегральных операторов $G(x)$ можно доопределить при $s' = s$ до непрерывной на множестве Θ функции: $g(\widetilde{x}(s), s') = -\psi_1/\psi_0$, так как $\psi_0 \neq 0$, и тогда производные $\partial^j_{s'} g$ $(j = \overline{0,n})$ непрерывны при условии $\partial\Omega \in C^{n+2}$. В то же время при $d \in I_D$ и $s \in I_S$ в силу равенств (1) и $\phi_5(s,s) = 1$ имеем равенство $g(\widetilde{x}_d(s), s) = d^{-1}$. Следовательно, хотя функции $g(\widetilde{x}_d(s), s')$, являющиеся ядрами интегральных операторов $G(x)$, имеют при условии $\partial\Omega \in C^{n+1}$ непрерывные на множестве Θ производные $\partial^j_{s'} g$ $(j = \overline{0,n})$, тем не менее они неограниченно возрастают при $d \to 0$ и $s' = s$.

Пусть $L/\,2 \in \mathbb{N}$, $s_l \equiv lh$, $l \in \mathbb{Z}$, $h \equiv S/\,(L+1)$. Введем в рассмотрение пространства H_L комплексных сеточных функций f со значениями f_l, заданными в узлах $\widetilde{x}(s_l)$, с нормой: $\|f\|_{H_L} = \max\limits_{-L-1 \leqslant l \leqslant L} |f_l|$. С помощью равенств: $(P_L f)_l = f(s_l)$, $l = \overline{-L-1, L}$, зададим проекционные операторы P_L $[C(\partial\Omega) \to H_L]$. Имеем оценку: $\|P_L\| \leqslant 1$. Введем в рассмотрение операторы $\ddot{P}_L$ $[H_L \to C(\partial\Omega)]$:

$$\left(\ddot{P}_L f\right)(s) \equiv \sum_{m=0}^{2} f_{2l-1+m}\, \Lambda_m(s) \quad (f \in H_L,\ s \in [s_{2l-1}, s_{2l+1}]\,,\ l = \overline{-L/\,2, L/\,2}).$$

Операторы $\ddot{P}_L$ линейны и в силу оценки (3) ограничены в совокупности: $\left\|\ddot{P}_L\right\| \leqslant c_\Lambda$. С помощью равенств $\ddot{G}(x)f \equiv G(x)\ddot{P}_L f$ $(f \in H_L)$ зададим линейные функционалы $\ddot{G}(x)$ $[H_L \to \mathbb{C}]$. Используя оценки (2) и (1), получаем неравенства:

$$\left|\ddot{G}(x) P_L f - G(x) f\right| \leqslant c_G\, c_\omega \left\|f^{(3)}\right\|_{C(\partial\Omega)} h^3 \quad (f \in C^3(\partial\Omega)), \tag{2}$$

согласно которым функционалы $\ddot{G}(x) P_L$ $[C^3(\partial\Omega) \to \mathbb{C}]$ сходятся при $L \to \infty$ по операторной норме к соответствующим функционалам $G(x)$ $[C^3(\partial\Omega) \to \mathbb{C}]$ равномерно по $x \in \Omega_D$ с порядком аппроксимации $O(h^3)$.

Представим функционалы $\ddot{G}(x)$ в виде суммы: $\ddot{G}(x) = \sum\limits_{i=1}^{3} \ddot{G}_i(x)$, где $\ddot{G}_i(x) \equiv G_i(x)\ddot{P}_L$. Введем в рассмотрение линейные функционалы $\widehat{G}_i(x)$, аппроксимирующие линейные функционалы $\ddot{G}_i(x)$. Для этого в выражениях $\ddot{G}_i(x)f$ $(i = 1, 2)$ заменим функции $\widetilde{\delta}_i \ddot{f}$ $(\ddot{f} \equiv \ddot{P}_L f$, $f \in H_L)$ их кусочно-квадратичными интерполянтами по переменной ρ:

$$\widehat{G}_i(x) f \equiv \sum_{l=-L-2}^{L} \int_{\rho_{d,s}(\alpha_{s,l})}^{\rho_{d,s}(\alpha_{s,l+1})} a_i(d,\rho)\, B_{i,l}(d,s,\rho) f\, d\rho,$$

$$B_{i,l}(d,s,\rho)f \equiv \sum_{m=0}^{2} \widetilde{\delta}_i(d,s,\rho_{d,s,l,m}) \ddot{f}\left(s+\sigma_{d,s}(\rho_{d,s,l,m})\right) \widetilde{\Lambda}_m(\rho), \quad \rho \in \left[\rho_{d,s}(\alpha_{s,l}), \rho_{d,s}(\alpha_{s,l+1})\right].$$

Здесь $\rho_{d,s,l,m} \equiv \overline{\rho}_{d,s,l} + \widetilde{q}_m h'_{d,s,l}$, $\overline{\rho}_{d,s,l} \equiv 2^{-1}[\rho_{d,s}(\alpha_{s,l}) + \rho_{d,s}(\alpha_{s,l+1})]$, $h'_{d,s,l} \equiv 2^{-1}[\rho_{d,s}(\alpha_{s,l+1}) - \rho_{d,s}(\alpha_{s,l})]$, $\alpha_{s,0} \equiv 0$; $\alpha_{s,l} \equiv \min\{s_{l+k} - s, \Sigma''_s\}$, если $s_{l+k} \geqslant s \in (s_k, s_{k+1}]$ и $l > 0$; $\alpha_{s,l} \equiv \max\{s_{l+k+1} - s, \Sigma'_s\}$, если $s_{l+k+1} < s$ и $l < 0$. Дополнительный узел $\alpha_{s,0}$ здесь вводится для удобства: он разбивает интервал интегрирования на два подынтервала, на каждом из которых переменная интегрирования ρ имеет определенный знак.

Функционалы $\ddot{G}_3(x)$ аппроксимируем с помощью ПКФГ с γ узлами:

$$\widehat{G}_3(x)f \equiv \sum_{l=-L-1}^{L} h''_{s,l}\, B_{3,l}(x)f, \quad B_{3,l}(x)f \equiv \sum_{j=1}^{\gamma} \omega_j\, g\left(x, \beta_{s,l,j}\right) \ddot{f}\left(\beta_{s,l,j}\right).$$

Здесь $\beta_{s,l,j} \equiv \overline{\beta}_{s,l} + h''_{s,l} z_j$, $\overline{\beta}_{s,l} \equiv 2^{-1}(\beta_{s,l} + \beta_{s,l+1})$, $h''_{s,l} \equiv 2^{-1}(\beta_{s,l+1} - \beta_{s,l})$, $\beta_{s,l} \equiv \max\{s_l, s + \Sigma''_s\}$, если $s_l \geqslant s$, и $\beta_{s,l} \equiv \min\{s_l, s + \Sigma'_s\}$, если $s_l < s$; z_j — корни многочлена $P_\gamma(z) \equiv (d^\gamma / dz^\gamma)(z^2 - 1)^\gamma$ на промежутке $[-1;1]$ [31, с. 258]; для весовых коэффициентов ω_j выполняются условия: $\sum\limits_{j=1}^{\gamma} \omega_j = 2$, $\omega_j > 0$ [31, с. 255].

Пусть $\widehat{G}(x) \equiv \sum\limits_{i=1}^{3} \widehat{G}_i(x)$. В силу оценок (3) линейные функционалы $B_{i,l}$ $[H_L \to \mathbb{C}]$ ограничены в совокупности: $\|B_{i,l}\| \leqslant \widetilde{c}_\Lambda c_\Lambda \breve{c}_{i,0}$ $(i = 1,2)$, $\|B_{3,l}\| \leqslant 2 c_\Lambda \breve{c}_{3,0}$, и имеют место неравенства:

$$\left|\widehat{G}_i(x)f\right| \leqslant \breve{a}_i\, \widetilde{c}_\Lambda\, c_\Lambda\, \breve{c}_{i,0}\, \|f\|_{H_L} \quad (i = 1,2), \qquad \left|\widehat{G}_3(x)f\right| \leqslant \breve{a}_3\, c_\Lambda\, \breve{c}_{3,0}\, \|f\|_{H_L} \quad (f \in H_L),$$

на основании которых получаем утверждение.

Теорема 2. *Пусть $\partial\Omega \in C^2$. Тогда функционалы $\widehat{G}(x)$ $[H_L \to \mathbb{C}]$ $(L/2 \in \mathbb{N},\ x \in \Omega_D)$ ограничены в совокупности.*

В силу следствия 1 и неравенства $r \geqslant D$, имеющего место, если $(x, x') \in \Omega_D \times \partial\Omega \backslash E_s$, при любых $j = \overline{0,n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$ и соответствующих гладкостях кривой $\partial\Omega$ могут быть определены константы:

$$\breve{c}_{i,j} \equiv \sup_{(d,s,\rho) \in \widetilde{\Upsilon}'} \left|\partial_\rho^j \widetilde{\delta}_i\right| \quad (i = \overline{0,2},\ \partial\Omega \in C^{n+2}), \qquad \breve{c}_{3,j} \equiv \sup_{|x - \widetilde{x}(s')| \geqslant D} \left|\partial_{s'}^j g(x,s')\right| \ (\partial\Omega \in C^{n+1}).$$

Используя неравенства (3), (4), (1) и $h'_{d,s,l} \leqslant 2^{-1} c_h h$ $(c_h \equiv \sup\limits_{(d,s,s') \in \Upsilon'} |\partial_{s'} \rho'|)$, при условиях $\partial\Omega \in C^5$, $f \in C^2(\partial\Omega)$ получаем оценки:

$$\left|\widehat{G}_i(x) P_L f - \ddot{G}_i(x) P_L f\right| \leqslant$$

$$\leqslant 8^{-1} \breve{a}_i\, c_h^3\, \widetilde{c}_\omega \sup_{(d,s,\rho) \in \widetilde{\Upsilon}'} \left|\partial_\rho^3 \left[\widetilde{\delta}_i(d,s,\rho) \left(\ddot{P}_L P_L f\right)\left(s + \sigma_{d,s}(\rho)\right)\right]\right| h^3 \leqslant \widehat{c}_i\, \|f\|_{C^2(\partial\Omega)}\, h^3, \tag{3}$$

$$\widehat{c}_i \equiv 8^{-1} \breve{a}_i\, c_h^3\, \widetilde{c}_\omega \left[\breve{c}_{i,3}\, c_\Lambda + (3\breve{c}_{i,2}\, \breve{c}_{0,0} + 3\breve{c}_{i,1}\, \breve{c}_{0,1} + \breve{c}_{i,0}\, \breve{c}_{0,2})\, c'_\Lambda + 3\left(\breve{c}_{i,1}\, \breve{c}_{0,0}^2 + \breve{c}_{i,0}\, \breve{c}_{0,1}\, \breve{c}_{0,0}\right) c''_\Lambda\right],$$

где $i = 1,2$. При условиях $\partial\Omega \in C^{2\gamma+1}$, $f \in C^2(\partial\Omega)$ имеем оценки:

$$\left|\widehat{G}_3(x) P_L f - \ddot{G}_3(x) P_L f\right| \leqslant$$

$$\leqslant \breve{a}_3 \sup_{|x - \widetilde{x}(s')| \geqslant D} \left|\partial_{s'}^{2\gamma} \left[g(x,s') \left(\ddot{P}_L P_L f\right)(s')\right]\right| h^{2\gamma} \leqslant \widehat{c}_3 h^{2\gamma}\, \|f\|_{C^2(\partial\Omega)}, \tag{4}$$

$$\widehat{c}_3 \equiv \breve{a}_3 \left[(2\gamma)!\right]^{-3} (2\gamma+1)^{-1} (\gamma!)^4 \left[\breve{c}_{3,2\gamma}\, c_\Lambda + 2\gamma\, \breve{c}_{3,2\gamma-1}\, c'_\Lambda + \gamma(2\gamma-1)\, \breve{c}_{3,2\gamma-2}\, c''_\Lambda\right]$$

[31, с. 259]. На основании оценок (2), (3), (4) получаем утверждение.

Теорема 3. *Пусть* $\partial\Omega \in C^{2\gamma+1}$, $\gamma \geqslant 2$. *Тогда функционалы* $\widehat{G}(x)P_L\ [C^3(\partial\Omega) \to \mathbb{C}]$ $(L/2 \in \mathbb{N})$ *сходятся при* $L \to \infty$ *по операторной норме к соответствующим функционалам* $G(x)$ $[C^3(\partial\Omega) \to \mathbb{C}]$ *равномерно по* $x \in \Omega_D$ *с порядком аппроксимации* $O(h^3)$.

Интегралы по ρ в операторах $\widehat{G}_1(x)$ и $\widehat{G}_2(x)$ вычисляются аналитически. Значения $\sigma_{d,s}(\rho_{d,s,l,m})$ $(l = \overline{-L-1, L},\ m = \overline{0,2})$ получаем как численные решения уравнений $\rho_{d,s}(\sigma) = \rho_{d,s,l,m}$. Производные $x_i'(s)$ $(i = 1,2)$ вычисляются аналитически, так как аналитические выражения функций $x_i(s)$ считаются известными.

Теорема 3 позволяет получить аппроксимации ПДС: $\widehat{u}(x) \equiv \widehat{G}(x)P_L v \approx u(x)$. В силу теоремы 2 и неравенства $\|P_L\| \leqslant 1$ функционалы $\widehat{G}(x)P_L\ [C(\partial\Omega) \to \mathbb{C}]$ $(x \in \Omega_D$, $L/2 \in \mathbb{N})$ ограничены в совокупности, поэтому функционалы $\widehat{G}(x)P_L\ [C(\partial\Omega) \to \mathbb{C}]$ равномерно непрерывны по $x \in \Omega_D$ и аппроксимации $\widehat{u}(x)$ устойчивы к возмущениям функции плотности v в норме $C(\partial\Omega)$. Сформулируем основной результат настоящей работы.

Следствие 2. *Пусть* $\partial\Omega \in C^{2\gamma+1}$, $\gamma \geqslant 2$, $R > 0$. *Тогда функции* $\widehat{u}(x)$ $(L/2 \in \mathbb{N})$ *сходятся при* $L \to \infty$ *с кубической скоростью к функции* $u(x)$ *равномерно относительно* $x \in \Omega_D$ *и функций* $v \in C^3(\partial\Omega)$, *удовлетворяющих неравенству* $\|v\|_{C^3(\partial\Omega)} \leqslant R$. *Кроме того, функции* $\widehat{u}_\delta(x) \equiv \widehat{G}(x)P_L v_\delta$ *сходятся к функции* $u(x)$ *при* $L \to \infty$, $\delta \to 0$ *равномерно относительно* $x \in \Omega_D$ *и функций* $v \in C^3(\partial\Omega)$, $v_\delta \in C(\partial\Omega)$, *удовлетворяющих неравенствам* $\|v\|_{C^3(\partial\Omega)} \leqslant R$, $\|v_\delta - v\|_{C(\partial\Omega)} \leqslant \delta$.

В заключение этого параграфа рассмотрим аппроксимацию ПДС исключительно с помощью ПКФГ. Для этого введем в рассмотрение аппроксимации $\widetilde{G}'(x)$ функционалов $\ddot{G}'(x) \equiv \ddot{G}_1(x) + \ddot{G}_2(x)$ с помощью ПКФГ с γ' узлами:

$$\widetilde{G}'(x)f \equiv \sum_{l=-L-2}^{L} h_{s,l} \sum_{j=1}^{\gamma'} \omega_j\, g\left(x, \alpha_{s,l,j}\right) \ddot{f}\left(\alpha_{s,l,j}\right) \quad (\ddot{f} \equiv \ddot{P}_L f,\ f \in H_L),$$

$$\alpha_{s,l,j} \equiv \overline{\alpha}_{s,l} + h''_{s,l}\, z_j, \quad \overline{\alpha}_{s,l} \equiv 2^{-1}\left(\alpha_{s,l} + \alpha_{s,l+1}\right), \quad h''_{s,l} \equiv 2^{-1}\left(\alpha_{s,l+1} - \alpha_{s,l}\right).$$

Пусть $\widetilde{G}(x) \equiv \widetilde{G}'(x) + \widetilde{G}''(x)$, где $\widetilde{G}''(x) \equiv \widehat{G}_3(x)$, и $\widetilde{u}(x) \equiv \widetilde{G}(x)P_L v$. При $(s,s') \in \Theta$ имеем $g\left(\widetilde{x}(s), s'\right) = -\psi_1/\psi_0$. Согласно [29, теорема 1] при условии $\partial\Omega \in C^{n+2}$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$ существуют непрерывные производные $\partial^j_{s'}\psi_i$ $(j = \overline{0,n}$, $i = 0,1)$ и $\psi_0 \neq 0$, поэтому могут быть определены константы $\widetilde{c}_j \equiv \sup\limits_{(s,s')\in\Theta} \left|\partial^j_{s'} g(\widetilde{x}(s), s')\right|$ $(j = \overline{0,n})$. Кроме того, при условии $\partial\Omega \in C^{n+1}$ для любой замкнутой области $\Omega'_D \subset \Omega_D \backslash \partial\Omega$ можно определить константы $\check{c}_j \equiv \sup\limits_{x\in\Omega'_D,\, s'\in I_S} \left|\partial^j_{s'} g(x, s')\right|$ $(j = \overline{0,n})$. По аналогии со следствием 2 получаем следующее утверждение.

Следствие 3. *Пусть* $\partial\Omega \in C^{2\gamma'+2}$ $(\partial\Omega \in C^{2\gamma'+1})$, $\gamma' \geqslant \gamma \geqslant 2$, $R > 0$. *Тогда функции* $\widetilde{u}(x)$ $(L/2 \in \mathbb{N})$ *сходятся при* $L \to \infty$ *с кубической скоростью к функции* $u(x)$ *равномерно относительно* $x \in \partial\Omega$ $(x \in \Omega'_D)$ *и функций* $v \in C^3(\partial\Omega)$, *удовлетворяющих неравенству* $\|v\|_{C^3(\partial\Omega)} \leqslant R$. *Кроме того, функции* $\widetilde{u}_\delta(x) \equiv \widetilde{G}(x)P_L v_\delta$ *сходятся к функции* $u(x)$ *при* $L \to \infty$, $\delta \to 0$ *равномерно относительно* $x \in \partial\Omega$ $(x \in \Omega'_D)$ *и функций* $v \in C^3(\partial\Omega)$, $v_\delta \in C(\partial\Omega)$, *удовлетворяющих неравенствам* $\|v\|_{C^3(\partial\Omega)} \leqslant R$, $\|v_\delta - v\|_{C(\partial\Omega)} \leqslant \delta$.

Замечание 2. Так как $\alpha_{s,0} = 0$ и ПКФГ является формулой открытого типа, то точка x не стремится ни к одному из узлов ПКФГ при $d \to 0$, и аппроксимации $\widetilde{u}(x)$ равномерно ограничены относительно $d \in \overline{I_D}$ при фиксированных L.

§ 3. Квадратурные аппроксимации как причина отсутствия равномерной сходимости вблизи границы области

Вычислительные эксперименты показали, что скорость сходимости аппроксимаций ПДС существенно снижается вблизи границы $\partial\Omega$, если для аппроксимации всех интегралов $\displaystyle\int_{s_l}^{s_{l+1}} g(x,s')\ddot{f}(s')\,ds'$ ($\ddot{f} \equiv \ddot{P}_L f$, $f \in H_L$, $l = \overline{-L-1,L}$, $x \in \Omega_D$) использовать ПКФГ или КФНК, причем, как в случае аппроксимации $\widetilde{u}(x)$, это имеет место даже тогда, когда точка $x = \widetilde{x}_d(s)$ не стремится к узлу квадратурной формулы при $d \to 0$. Покажем отсутствие равномерной по $d \in I_D$ сходимости аппроксимаций ПДС при любом $s \in I_S$, если интеграл на ПСГЭ или одном из ОСГЭ аппроксимируется с помощью квадратурной формулы типа ПКФГ или КФНК. Также с целью упрощения будем вместо ККИ рассматривать кусочно-постоянную интерполяцию:

$$\dot{G}(x)f \equiv \sum_{l=-L-1}^{L} g_l(x)f(s_l) \quad (f \in C(\partial\Omega),\ L \in \mathbb{N}), \quad g_l(x) \equiv \int_{s_{l-1/2}}^{s_{l+1/2}} g(x,s)\,ds.$$

Здесь $s_{l+\alpha} \equiv (l+\alpha)h$ ($\alpha \in (-1,1)$). С помощью формулы Тейлора с дополнительным членом в виде определенного интеграла [34, с. 160] получаем оценки:

$$\left|\dot{G}(x)f - G(x)f\right| = \left|\sum_{l=0}^{L-1} \int_{s_{l-1/2}}^{s_{l+1/2}} g(x,s)\,[f(s) - f(s_l)]\,ds\right| =$$

$$= \left|\sum_{l=0}^{L-1} \int_{s_{l-1/2}}^{s_{l+1/2}} ds \int_{s_l}^{s} \left\{\partial^2_{\xi\xi} g(x,\xi)\,[f(\xi) - f(s_l)] + 2\partial_\xi g(x,\xi) f'(\xi) + g(x,\xi) f''(\xi)\right\}(s-\xi)\,d\xi\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(2^{-1}\check{c}_2 \|f'\|_{C(\partial\Omega)} h + 2\check{c}_1 \|f'\|_{C(\partial\Omega)} + \check{c}_0 \|f''\|_{C(\partial\Omega)}\right) \sum_{l=0}^{L-1} \int_{s_{l-1/2}}^{s_{l+1/2}} ds \int_{s_l}^{s} |s-\xi|\,d\xi \leqslant$$

$$\leqslant 12^{-1} S \left(2^{-1}\check{c}_2 \|f'\|_{C(\partial\Omega)} h + 2\check{c}_1 \|f'\|_{C(\partial\Omega)} + \check{c}_0 \|f''\|_{C(\partial\Omega)}\right) h^2 \quad (f \in C^2(\partial\Omega),\ \partial\Omega \in C^3),$$

согласно которым функционалы $\dot{G}(x)$ $[C^2(\partial\Omega) \to \mathbb{C}]$ сходятся при $L \to \infty$ по операторной норме к соответствующим функционалам $G(x)$ $[C^2(\partial\Omega) \to \mathbb{C}]$ с порядком аппроксимации $O(h^2)$ равномерно по $x \in \Omega'_D$. Обозначим через $\breve{G}(\widetilde{x}_d(s))$ функционалы $\dot{G}(\widetilde{x}_d(s))$ ($s \in I_S$, $d \in I_D$), в которых только один интеграл $g_{l'+n}(\widetilde{x}_d(s))$ ($[s_{l'-1/2}, s_{l'+1/2}) \ni s$) при фиксированном $n \in \mathbb{Z}$ заменен его квадратурной аппроксимацией достаточно высокого порядка. Тогда при условии достаточной гладкости кривой $\partial\Omega$ функционалы $\breve{G}(\widetilde{x}_d(s))$ $[C^2(\partial\Omega) \to \mathbb{C}]$ сходятся при $L \to \infty$ по операторной норме к соответствующим функционалам $G(\widetilde{x}_d(s))$ $[C^2(\partial\Omega) \to \mathbb{C}]$ с порядком аппроксимации $O(h^2)$ равномерно по $(|d|, s) \in [d_0, D] \times I_S$ для любого $d_0 \in (0, D)$. В то же время справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть остаточный член квадратурной формулы, используемой для аппроксимации интегралов* $g_{l'+n}(\widetilde{x}_d(s))$ ($[s_{l'-1/2}, s_{l'+1/2}) \ni s$, $d \in I_D$, $n \in \mathbb{Z}$ *фиксировано), имеет вид:* $R_m[f] = c_m(b-a)^{2m+1} f^{(2m)}(\xi)$ ($\xi \in [a,b]$), *где* f *— подынтегральная функция,* $[a,b]$ *— промежуток интегрирования,* c_m *— константа, зависящая только от* $m \in \mathbb{Z}_+$. *Пусть* $\partial\Omega \in C^{2m+2}$. *Тогда при* $L \to \infty$ *отсутствует равномерная по* $|d| \in (0, d_0]$ *сходимость в сильной операторной топологии функционалов* $\breve{G}(\widetilde{x}_d(s))$ $[C^k(\partial\Omega) \to \mathbb{C}]$ *к соответствующим функционалам* $G(\widetilde{x}_d(s))$ $[C^k(\partial\Omega) \to \mathbb{C}]$ *для любых* $k \in \mathbb{Z}_+$, $s \in I_S$, $d_0 \in (0, D]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $s \in I_S$ фиксировано. Заметим, что $g_{l'+n}(\widetilde{x}_d(s)) =$

$= \int_{\Sigma+(n-1)h}^{\Sigma+nh} \widetilde{g}(d,\sigma)\, d\sigma$, где $\Sigma \equiv s_{l'+1/2} - s \in (0,h]$ и

$$\tilde{g}(d,\sigma) \equiv \left(-\sigma^2\widetilde{\psi}_1 - d\,\tilde{\varphi}_5\right) \Big/ \left(\sigma^2\tilde{\psi}_0' + d^2\right),$$
$$\widetilde{\psi}_0'(d,\sigma) \equiv \psi_0'(d,s,s+\sigma), \quad \widetilde{\psi}_1(\sigma) \equiv \psi_1(s,s+\sigma), \quad \widetilde{\varphi}_5(\sigma) \equiv \varphi_5(s,s+\sigma).$$

Достаточно ограничиться рассмотрением значений $d > 0$. С помощью равенств $r_m \equiv \equiv R_m[\widetilde{g}]$, где $d = Kh$ ($K \in \mathbb{N}$), зададим функции $r_m(K,h,\sigma)$ при $h \in (0, D/K]$ и $\sigma \in \in [\Sigma+(n-1)h, \Sigma+nh]$ ($m \in \mathbb{Z}_+$). Учитывая, что $\inf\limits_{(d,s,s')\in\Upsilon} \psi_0' > 0$ и существуют непрерывные производные: $\partial_{s'}^j \psi_0'$ на Υ, $\partial_{s'}^j \psi_1$ и $\partial_{s'}^j \varphi_5$ на Θ ($j = \overline{0,2m}$), можно представить функции r_m в виде:

$$r_m = K \sum_{k=0}^{m} S_{m,k} + o_m, \quad S_{m,k} \equiv a_{m,k}\, \widetilde{\varphi}_5\, (\widetilde{\psi}_0')^{2m-k} \sigma^{2m-2k} h^{2m+2} \left(\sigma^2\widetilde{\psi}_0' + K^2h^2\right)^{-2m+k-1} =$$
$$= a_{m,k}\, \widetilde{\varphi}_5\, (\widetilde{\psi}_0')^{2m-k}\, (\sigma/h)^{2m-2k} \left[(\sigma/h)^2\, \widetilde{\psi}_0' + K^2\right]^{-2m+k-1},$$

где $a_{m,k}$ — постоянные коэффициенты ($|a_{m,m}| \geqslant |c_m|$), $o_m(K,h,\sigma) \to 0$ при $h \to 0$ и фиксированном $K \in \mathbb{N}$ равномерно по $\sigma \in [\Sigma + (n-1)h, \Sigma + nh]$.

Пусть $\breve{\sigma} \equiv \sigma/h$, $\breve{\Sigma} \equiv \Sigma/h$, $\breve{r}_m(K,h,\breve{\sigma}) \equiv r_m(K,h,\breve{\sigma}h)$, $\breve{\varphi}_5(h,\breve{\sigma}) \equiv \widetilde{\varphi}_5(\breve{\sigma}h)$, $\breve{\psi}_0'(K,h,\breve{\sigma}) \equiv \equiv \widetilde{\psi}_0'(Kh,\breve{\sigma}h)$. Тогда

$$\breve{r}_m = K^{-2m-1} \sum_{k=0}^{m} \breve{S}_{m,k} + \breve{o}_m,\ \breve{S}_{m,k} \equiv a_{m,k}\, \breve{\varphi}_5 (\breve{\psi}_0')^{2m-k} K^{-2m+2k} \breve{\sigma}^{2m-2k} \left(\breve{\sigma}^2 K^{-2} \breve{\psi}_0' + 1\right)^{-2m+k-1},$$

где $\breve{o}_m(K,h,\breve{\sigma}) \to 0$ при $h \to 0$ и фиксированном $K \in \mathbb{N}$ равномерно по $\breve{\sigma} \in [\breve{\Sigma}+n-1, \breve{\Sigma}+n]$. Заметим, что слагаемые $\breve{S}_{m,k}(K,h,\breve{\sigma})$ при $k < m$ стремятся к нулю при $K \to \infty$ равномерно по $h \in (0, D/K]$, $\breve{\sigma} \in [\breve{\Sigma} + n - 1, \breve{\Sigma} + n]$. Учитывая, что $\tilde{\psi}_0' = -\tilde{\varphi}_5 = 1$ при $\sigma = d = 0$, и $\breve{\Sigma} \leqslant 1$, имеем неравенства: $\left|\breve{S}_{m,m}(K,0,\breve{\sigma})\right| \geqslant c_m' \equiv ((|n|+1)^2+1)^{-m-1}|c_m| > 0$ при $K \in \mathbb{N}$, $\breve{\sigma} \in [\breve{\Sigma} + n - 1, \breve{\Sigma} + n]$. Следовательно, существуют постоянные $K_m \in \mathbb{N}$, $h_m \in \in (0, D/K_m]$ и $c_m'' \in (0, c_m')$, такие, что при $h \in (0, h_m]$, $\breve{\sigma} \in [\breve{\Sigma} + n - 1, \breve{\Sigma} + n]$ имеют место оценки: $|\breve{r}_m(K_m,h,\breve{\sigma})| \geqslant c_m''' \equiv K_m^{-2m-1} c_m''$. Пусть $L' \in \mathbb{N}$ такое, что $h \in (0,h_m]$ при $L = L', L'+1, \ldots$. Тогда если $d = K_m h$ при $L = L', L'+1, \ldots$, то $|R_m[\tilde{g}]| \geqslant c_m'''$.

Обозначим через $\dot{G}_L(s)$, $\breve{G}_L(s)$ ($L = L', L'+1, \ldots$) функционалы $\dot{G}(\widetilde{x}_d(s))$, $\breve{G}\,(\widetilde{x}_d(s))$ $[C^k(\partial\Omega) \to \mathbb{C}]$, где $d = K_m h$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Для функции $e(s') \equiv 1$ ($s' \in I_S$) имеем оценки $\left|\breve{G}_L(s)e - \dot{G}_L(s)e\right| \geqslant c_m'''$ и равенства $\dot{G}_L(s)e = G(\widetilde{x}_d(s))e$. В результате получаем оценки: $\left|\breve{G}_L(s)e - G(\widetilde{x}_d(s))e\right| \geqslant c_m'''$ ($L = L', L'+1, \ldots$). Теорема доказана. □

§ 4. Вычислительные эксперименты

Для исследования эффективности предлагаемой аппроксимации ПДС рассмотрим численное решение задачи Дирихле:

$$\nabla^2 u(x) = 0 \quad (x \in \Omega,\ \nabla \equiv (\partial_{x_1}, \partial_{x_2})), \quad u(\widetilde{x}(s)) = w(s) \quad (s \in I_S),$$

с помощью ПДС: $u(x) = G(x)\,v$, где функция $v(s)$ является решением ГИУ:

$$\pi\, v(s) + G(\widetilde{x}(s))\, v = w(s) \quad (s \in I_S)$$

[30, с. 397]. Зададим в пространстве H_L линейные операторы $\widehat{G}$, $\widetilde{G}$ с помощью равенств: $\left(\widehat{G}f\right)_l = \widehat{G}(\widetilde{x}(s_l))f$, $\left(\widetilde{G}f\right)_l = \widetilde{G}(\widetilde{x}(s_l))f$ $(l = \overline{-L-1, L})$. Приближенные решения задачи Дирихле вычисляем по формулам:

$$\widehat{u}'(x) \equiv \widehat{G}(x)\left(\pi + \widehat{G}\right)^{-1} P_L\, w, \quad \widetilde{u}'(x) \equiv \widetilde{G}(x)\left(\pi + \widehat{G}\right)^{-1} P_L\, w,$$

$$\widehat{u}''(x) \equiv \widehat{G}(x)\left(\pi + \widetilde{G}\right)^{-1} P_L\, w, \quad \widetilde{u}''(x) \equiv \widetilde{G}(x)\left(\pi + \widetilde{G}\right)^{-1} P_L\, w.$$

Здесь область Ω — единичный круг, граничная функция $w = \cos\varphi$, точное решение задачи $\overline{u} = \rho\cos\varphi$ (φ, ρ — полярные угол и радиус с полюсом в центре круга). Для данной геометрии $D = 2/(3\pi)$, $\Sigma''_s = -\Sigma'_s = \arcsin(2/(3\pi))$ $(s \in I_S)$. Решения $\widehat{u}'$, $\widetilde{u}'$, $\widehat{u}''$, $\widetilde{u}''$, $\overline{u}$ получаем при фиксированных $d \in (0, D]$ в точках $\widetilde{x}_d(s_{l+1/2})$ $(l = \overline{-L-1, L})$. Для вычисления функционалов $\widehat{G}_3(x)$, $\widetilde{G}''(x)$ и операторов $\widetilde{G}$ $[H_L]$ используем $\gamma = \gamma' = 6$ узлов ПКФГ. При $x \in \Omega$ функционалы $\widetilde{G}'(x)$ вычисляем при трех значениях γ': 12, 24, 48, и соответствующие решения $\widetilde{u}'$, $\widetilde{u}''$ обозначаем как $\widetilde{u}'_i$, $\widetilde{u}''_i$ $(i = 1, 2, 3)$. Вычисления осуществляем с двойной точностью. Для определения погрешностей приближенных решений находим их относительные среднеквадратичные отклонения от точного решения: $\delta\widehat{u}' \equiv \|\widehat{u}' - \overline{u}\|/\|\overline{u}\|$, $\delta\widetilde{u}'_i \equiv \|\widetilde{u}'_i - \overline{u}\|/\|\overline{u}\|$, $\delta\widehat{u}'' \equiv \|\widehat{u}'' - \overline{u}\|/\|\overline{u}\|$, $\delta\widetilde{u}''_i \equiv \|\widetilde{u}''_i - \overline{u}\|/\|\overline{u}\|$ ($\|\cdot\|$ — среднеквадратичная норма). В следующей таблице в каждой основной ячейке представлены значения $\delta\widehat{u}'$, $\delta\widetilde{u}'_1$, $\delta\widetilde{u}'_2$, $\delta\widetilde{u}'_3$ в соответствующем порядке сверху вниз.

Таблица 1. Относительные среднеквадратичные погрешности

d	$h_1 = \pi/3$	$h_2 = \pi/7$	$h_3 = \pi/15$	$h_4 = \pi/31$	$h_5 = \pi/63$
10^{-2}	$6.65 \cdot 10^{-2}$ $6.70 \cdot 10^{-2}$ $6.65 \cdot 10^{-2}$ $6.65 \cdot 10^{-2}$	$5.29 \cdot 10^{-3}$ $5.80 \cdot 10^{-3}$ $5.29 \cdot 10^{-3}$ $5.29 \cdot 10{-}3$	$5.02 \cdot 10^{-4}$ $5.00 \cdot 10^{-4}$ $5.02 \cdot 10^{-4}$ $5.02 \cdot 10^{-4}$	$4.88 \cdot 10^{-5}$ $4.88 \cdot 10^{-5}$ $4.88 \cdot 10^{-5}$ $4.88 \cdot 10^{-5}$	$4.25 \cdot 10^{-6}$ $4.25 \cdot 10^{-6}$ $4.25 \cdot 10^{-6}$ $4.25 \cdot 10^{-6}$
10^{-3}	$6.75 \cdot 10^{-2}$ $2.62 \cdot 10^{-1}$ $6.48 \cdot 10^{-2}$ $6.75 \cdot 10^{-2}$	$5.56 \cdot 10^{-3}$ $2.39 \cdot 10^{-1}$ $3.29 \cdot 10^{-2}$ $5.56 \cdot 10^{-3}$	$5.65 \cdot 10^{-4}$ $2.41 \cdot 10^{-2}$ $2.00 \cdot 10^{-3}$ $5.66 \cdot 10^{-4}$	$6.32 \cdot 10^{-5}$ $2.58 \cdot 10^{-2}$ $8.30 \cdot 10^{-5}$ $6.32 \cdot 10^{-5}$	$7.31 \cdot 10^{-6}$ $2.03 \cdot 10^{-3}$ $8.01 \cdot 10^{-6}$ $7.31 \cdot 10^{-6}$
10^{-4}	$6.76 \cdot 10^{-2}$ $9.10 \cdot 10^{-1}$ $6.63 \cdot 10^{-1}$ $1.01 \cdot 10^{-1}$	$5.59 \cdot 10^{-3}$ $9.07 \cdot 10^{-1}$ $6.54 \cdot 10^{-1}$ $5.85 \cdot 10^{-2}$	$5.72 \cdot 10^{-4}$ $8.12 \cdot 10^{-1}$ $3.58 \cdot 10^{-1}$ $4.72 \cdot 10^{-2}$	$6.48 \cdot 10^{-5}$ $6.22 \cdot 10^{-1}$ $3.23 \cdot 10^{-2}$ $1.98 \cdot 10^{-3}$	$7.71 \cdot 10^{-6}$ $3.14 \cdot 10^{-1}$ $4.39 \cdot 10^{-2}$ $4.55 \cdot 10^{-4}$
10^{-5}	$6.76 \cdot 10^{-2}$ $9.91 \cdot 10^{-1}$ $9.65 \cdot 10^{-1}$ $8.64 \cdot 10^{-1}$	$5.59 \cdot 10^{-3}$ $9.91 \cdot 10^{-1}$ $9.64 \cdot 10^{-1}$ $8.61 \cdot 10^{-1}$	$5.73 \cdot 10^{-4}$ $9.81 \cdot 10^{-1}$ $9.27 \cdot 10^{-1}$ $7.20 \cdot 10^{-1}$	$6.50 \cdot 10^{-5}$ $9.61 \cdot 10^{-1}$ $8.50 \cdot 10^{-1}$ $4.58 \cdot 10^{-1}$	$7.74 \cdot 10^{-6}$ $9.20 \cdot 10^{-1}$ $7.01 \cdot 10^{-1}$ $1.19 \cdot 10^{-1}$
10^{-15}	$6.76 \cdot 10^{-2}$ $1.00 \cdot 10^{0}$ $1.00 \cdot 10^{0}$ $1.00 \cdot 10^{0}$	$5.59 \cdot 10^{-3}$ $1.00 \cdot 10^{0}$ $1.00 \cdot 10^{0}$ $1.00 \cdot 10^{0}$	$5.73 \cdot 10^{-4}$ $1.00 \cdot 10^{0}$ $1.00 \cdot 10^{0}$ $1.00 \cdot 10^{0}$	$6.50 \cdot 10^{-5}$ $1.00 \cdot 10^{0}$ $1.00 \cdot 10^{0}$ $1.00 \cdot 10^{0}$	$7.75 \cdot 10^{-6}$ $1.00 \cdot 10^{0}$ $1.00 \cdot 10^{0}$ $1.00 \cdot 10^{0}$

Можно заметить, что решение $\widehat{u}'$ обладает кубической скоростью сходимости, сохраняющейся даже при очень малых по модулю значениях d. Скорости сходимости решений $\widetilde{u}'_i$ снижаются от кубической до нулевой по мере приближения к границе $\partial\Omega$ при фиксированных h и восстанавливаются до кубической по мере уменьшения h при фиксированных d. Близкие результаты получаются в точках наблюдения $\widetilde{x}_d(s_{l+\alpha})$ и при других значениях $\alpha \in [0,1)$. Полученные результаты хорошо согласуются со следствиями 2, 3 и теоремой 4, поскольку решения $\widehat{u}'$ и $\widetilde{u}_i'$ отличаются лишь способом вычисления ПДС при $x \in \Omega$, и выводы, сделанные относительно приближенных решений задачи Дирихле, можно перенести на соответствующие аппроксимации ПДС при $x \in \Omega$. Практически те же результаты были получены для решений $\widehat{u}''$, $\widetilde{u}_i''$, отличающихся от соответствующих решений $\widehat{u}'$, $\widetilde{u}_i'$ только способом вычисления ПДС при $x \in \partial\Omega$, что хорошо согласуется с утверждением следствия 3 в отношении аппроксимаций прямого значения ПДС.

Заметим, что в случае использования КФНК замкнутого типа вместо ПКФГ для получения аппроксимаций $\widetilde{G}'(x)$ любая точка $\widetilde{x}(s_l)$ является узлом этой квадратурной формулы, и при приближении точек $\widetilde{x}_d(s_l)$ к точкам $\widetilde{x}(s_l)$ возникают вычислительные проблемы: $g(\widetilde{x}_d(s), s) = d^{-1} \to \infty$ при $d \to 0$ и любом $s \in I_S$, и ошибки $\delta\tilde{u}_i'$ и $\delta\tilde{u}_i''$ приобретают катастрофический характер.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Brebbia C. A., Telles J. C. F., Wrobel L. C. Boundary element techniques. Theory and applications in engineering. Berlin: Springer, 1984. https://doi.org/10.1007/978-3-642-48860-3
2. Lv J., Miao Y., Zhu H. The distance sinh transformation for the numerical evaluation of nearly singular integrals over curved surface elements // Computational Mechanics. 2014. Vol. 53. Issue 2. P. 359–367. https://doi.org/10.1007/s00466-013-0913-0
3. Gao X.-W., Zhang J.-B., Zheng B.-J., Zhang C. Element-subdivision method for evaluation of singular integrals over narrow strip boundary elements of super thin and slender structures // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2016. Vol. 66. P. 145–154. https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2016.02.002
4. Gao X. W., Yang K., Wang J. An adaptive element subdivision technique for evaluation of various 2D singular boundary integrals // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2008. Vol. 32. Issue 8. P. 692–696. https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2007.12.004
5. Крутицкий П. А., Федотова А. Д., Колыбасова В. В. Квадратурная формула для потенциала простого слоя // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55. № 9. С. 1269–1284. https://doi.org/10.1134/S0374064119090103
6. Xie G., Li K., Zhong Y., Li H., Hao B., Du W., Sun Ch., Wang H., Wen X., Wang L. A systematic derived sinh based method for singular and nearly singular boundary integrals // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2021. Vol. 123. P. 147–153. https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2020.11.018
7. Zhang J., Wang P., Lu Ch., Dong Y. A spherical element subdivision method for the numerical evaluation of nearly singular integrals in 3D BEM // Engineering Computations. 2017. Vol. 34. Issue 6. P. 2074–2087. https://doi.org/10.1108/EC-06-2016-0226
8. Крутицкий П. А., Колыбасова В. В. Численный метод решения интегральных уравнений в задаче с наклонной производной для уравнения Лапласа вне разомкнутых кривых // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52. № 9. С. 1262–1276. https://doi.org/10.1134/S0374064116090144
9. Niu Zh., Cheng Ch., Zhou H., Hu Z. Analytic formulations for calculating nearly singular integrals in two-dimensional BEM // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2007. Vol. 31. Issue 12. P. 949–964. https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2007.05.001
10. Zhang Y.-M., Gu Y., Chen J.-T. Stress analysis for multilayered coating systems using semi-analytical BEM with geometric non-linearities // Computational Mechanics. 2011. Vol. 47. Issue 5. P. 493–504. https://doi.org/10.1007/s00466-010-0559-0
11. Gu Y., Chen W., Zhang B., Qu W. Two general algorithms for nearly singular integrals in two dimensional anisotropic boundary element method // Computational Mechanics. 2014. Vol. 53. Issue 6. P. 1223–1234. https://doi.org/10.1007/s00466-013-0965-1

12. Niu Zh., Hu Z., Cheng Ch., Zhou H. A novel semi-analytical algorithm of nearly singular integrals on higher order elements in two dimensional BEM // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2015. Vol. 61. P. 42–51. https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2015.06.007
13. Cheng Ch., Pan D., Han Zh., Wu M., Niu Zh. A state space boundary element method with analytical formulas for nearly singular integrals // Acta Mechanica Solida Sinica. 2018. Vol. 31. No. 4. P. 433–444. https://doi.org/10.1007/s10338-018-0040-8
14. Крутицкий П. А., Резниченко И. О. Квадратурная формула для гармонического потенциала двойного слоя // Дифференциальные уравнения. 2021. Т. 57. № 7. С. 932–950. https://doi.org/10.31857/S0374064121070074
15. Zhang Y.-M., Gu Y., Chen J.-T. Boundary element analysis of 2D thin walled structures with high-order geometry elements using transformation // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2011. Vol. 35. Issue 3. P. 581–586. https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2010.07.008
16. Xie G., Zhang J., Qin X., Li G. New variable transformations for evaluating nearly singular integrals in 2D boundary element method // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2011. Vol. 35. Issue 6. P. 811–817. https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2011.01.009
17. Xie G., Zhang J., Dong Y., Huang Ch., Li G. An improved exponential transformation for nearly singular boundary element integrals in elasticity problems // International Journal of Solids and Structures. 2014. Vol. 51. Issue 6. P. 1322–1329. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2013.12.020
18. Zhang Y., Li X., Sladek V., Sladek J., Gao X. A new method for numerical evaluation of nearly singular integrals over high-order geometry elements in 3D BEM // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2015. Vol. 277. P. 57–72. https://doi.org/10.1016/j.cam.2014.08.027
19. Gong Y. P., Dong C. Y., Bai Y. Evaluation of nearly singular integrals in isogeometric boundary element method // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2017. Vol. 75. P. 21–35. https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2016.11.005
20. Gu Y., Chen W., Zhang Ch. The sinh transformation for evaluating nearly singular boundary element integrals over high-order geometry elements // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2013. Vol. 37. Issue 2. P. 301–308. https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2012.11.011
21. Gu Y., Zhang Ch. Fracture analysis of ultra-thin coating/substrate structures with interface cracks // International Journal of Solids and Structures. 2021. Vol. 225. 111074. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2021.111074
22. Zhang Y., Gong Y., Gao X. Calculation of 2D nearly singular integrals over high-order geometry elements using the sinh transformation // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2015. Vol. 60. P. 144–153. https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2014.12.006
23. Gong Y., Dong Ch., Qin F., Hattori G., Trevelyan J. Hybrid nearly singular integration for isogeometric boundary element analysis of coatings and other thin 2D structures // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2020. Vol. 367. 113099. https://doi.org/10.1016/j.cma.2020.113099
24. Иванов Д. Ю. Уточнение коллокационного метода граничных элементов вблизи границы области в случае двумерных задач нестационарной теплопроводности с граничными условиями второго и третьего рода // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. № 57. С. 5–25. https://doi.org/10.17223/19988621/57/1
25. Иванов Д. Ю. О решении плоских задач нестационарной теплопроводности коллокационным методом граничных элементов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2017. № 50. С. 9–29. https://doi.org/10.17223/19988621/50/2
26. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 4. Ч. 2. М.: Наука, 1981.
27. Иванов Д. Ю. Уточнение коллокационного метода граничных элементов вблизи границы двумерной области с помощью полуаналитической аппроксимации теплового потенциала двойного слоя // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. № 65. С. 30–52. https://doi.org/10.17223/19988621/65/3
28. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. М.: ИЛ, 1974.
29. Иванов Д. Ю. Устойчивая разрешимость в пространствах дифференцируемых функций некоторых двумерных интегральных уравнений теплопроводности с операторно-полугрупповым яд-

ром // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 38. С. 33–45. https://doi.org/10.17223/19988621/38/4

30. Михлин С. Г. Курс математической физики. М.: Наука, 1968.
31. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Т. 1. М.: Физматгиз, 1962.
32. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.
33. Kato T. Perturbation theory for linear operators. Berlin–Heidelberg: Springer, 1995. https://doi.org/10.1007/978-3-642-66282-9
34. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М.: Физматлит, 2003.

Поступила в редакцию 19.12.2021

Принята к публикации 10.03.2022

Иванов Дмитрий Юрьевич, к. ф.-м. н., доцент, кафедра высшей математики, Российский университет транспорта (МИИТ), 127994, Россия, г. Москва, ГСП-4, ул. Образцова, 9.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4551-469X
E-mail: ivanovdyu@yandex.ru

Цитирование: Д. Ю. Иванов. О равномерной сходимости аппроксимаций потенциала двойного слоя вблизи границы двумерной области // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2022. Т. 32. Вып. 1. С. 26–43.

D. Yu. Ivanov

On uniform convergence of approximations of the double layer potential near the boundary of a two-dimensional domain

Keywords: quadrature formula, double layer potential, boundary element method, near singular integral, boundary layer effect, uniform convergence.

MSC2020: 31-08, 31A10

DOI: 10.35634/vm220103

On the basis of piecewise quadratic interpolation, semi-analytical approximations of the double layer potential near and on the boundary of a two-dimensional domain are obtained. To calculate the integrals formed after the interpolation of the density function, exact integration with respect to the variable $\rho = \left(r^2 - d^2\right)^{1/2}$ is used, where d and r are the distances from the observed point to the boundary of the domain and to the boundary point of integration, respectively. The study proves the stable convergence of such approximations with the cubic velocity uniformly near the boundary of the class C^5, and also on the boundary itself. It is also proved that the use of standard quadrature formulas for calculating the integrals does not violate the uniform cubic convergence of approximations of the direct value of the potential on the boundary of the class C^6. With some simplifications, it is proved that the use of standard quadrature formulas for calculating the integrals entails the absence of uniform convergence of potential approximations inside the domain near any boundary point. The theoretical conclusions are confirmed by the results of the numerical solution of the Dirichlet problem for the Laplace equation in a circular domain.

REFERENCES

1. Brebbia C. A., Telles J. C. F., Wrobel L. C. *Boundary element techniques. Theory and applications in engineering*, Berlin: Springer, 1984. https://doi.org/10.1007/978-3-642-48860-3
2. Lv J., Miao Y., Zhu H. The distance sinh transformation for the numerical evaluation of nearly singular integrals over curved surface elements, *Computational Mechanics*, 2014, vol. 53, issue 2, pp. 359–367. https://doi.org/10.1007/s00466-013-0913-0
3. Gao X.-W., Zhang J.-B., Zheng B.-J., Zhang Ch. Element-subdivision method for evaluation of singular integrals over narrow strip boundary elements of super thin and slender structures, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2016, vol. 66, pp. 145–154. https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2016.02.002
4. Gao X. W., Yang K., Wang J. An adaptive element subdivision technique for evaluation of various 2D singular boundary integrals, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2008, vol. 32, issue 8, pp. 692–696. https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2007.12.004
5. Krutitskii P. A., Fedotova A. D., Kolybasova V. V. Quadrature formula for the simple layer potential, *Differential Equations*, 2019, vol. 55, no. 9, pp. 1226–1241. https://doi.org/10.1134/S0012266119090106
6. Xie G., Li K., Zhong Y., Li H., Hao B., Du W., Sun Ch., Wang H., Wen X., Wang L. A systematic derived sinh based method for singular and nearly singular boundary integrals, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2021, vol. 123, pp. 147–153. https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2020.11.018
7. Zhang J., Wang P., Lu Ch., Dong Y. A spherical element subdivision method for the numerical evaluation of nearly singular integrals in 3D BEM, *Engineering Computations*, 2017, vol. 34, issue 6, pp. 2074–2087. https://doi.org/10.1108/EC-06-2016-0226
8. Krutitskii P. A., Kolybasova V. V. Numerical method for the solution of integral equations in a problem with directional derivative for the Laplace equation outside open curves, *Differential Equations*, 2016, vol. 52, no. 9, pp. 1219–1233. https://doi.org/10.1134/S0012266116090135

9. Niu Zh., Cheng Ch., Zhou H., Hu Z. Analytic formulations for calculating nearly singular integrals in two-dimensional BEM, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2007, vol. 31, issue 12, pp. 949–964. https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2007.05.001
10. Zhang Y.-M., Gu Y., Chen J.-T. Stress analysis for multilayered coating systems using semi-analytical BEM with geometric non-linearities, *Computational Mechanics*, 2011, vol. 47, issue 5, pp. 493–504. https://doi.org/10.1007/s00466-010-0559-0
11. Gu Y., Chen W., Zhang B., Qu W. Two general algorithms for nearly singular integrals in two dimensional anisotropic boundary element method, *Computational Mechanics*, 2014, vol. 53, issue 6, pp. 1223–1234. https://doi.org/10.1007/s00466-013-0965-1
12. Niu Zh., Hu Z., Cheng Ch., Zhou H. A novel semi-analytical algorithm of nearly singular integrals on higher order elements in two dimensional BEM, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2015, vol. 61, pp. 42–51. https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2015.06.007
13. Cheng Ch., Pan D., Han Zh., Wu M., Niu Zh. A state space boundary element method with analytical formulas for nearly singular integrals, *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2018, vol. 31, no. 4, pp. 433–444. https://doi.org/10.1007/s10338-018-0040-8
14. Krutitskii P. A., Reznichenko I. O. Quadrature formula for the harmonic double layer potential, *Differential Equations*, 2021, vol. 57, no. 7, pp. 901–920. https://doi.org/10.1134/S0012266121070077
15. Zhang Y.-M., Gu Y., Chen J.-T. Boundary element analysis of 2D thin walled structures with high-order geometry elements using transformation, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2011, vol. 35, issue 3, pp. 581–586. https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2010.07.008
16. Xie G., Zhang J., Qin X., Li G. New variable transformations for evaluating nearly singular integrals in 2D boundary element method, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2011, vol. 35, issue 6, pp. 811–817. https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2011.01.009
17. Xie G., Zhang J., Dong Y., Huang Ch., Li G. An improved exponential transformation for nearly singular boundary element integrals in elasticity problems, *International Journal of Solids and Structures*, 2014, vol. 51, issue 6, pp. 1322–1329. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2013.12.020
18. Zhang Y., Li X., Sladek V., Sladek J., Gao X. A new method for numerical evaluation of nearly singular integrals over high-order geometry elements in 3D BEM, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2015, vol. 277, pp. 57–72. https://doi.org/10.1016/j.cam.2014.08.027
19. Gong Y. P., Dong C. Y., Bai Y. Evaluation of nearly singular integrals in isogeometric boundary element method, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2017, vol. 75, pp. 21–35. https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2016.11.005
20. Gu Y., Chen W., Zhang Ch. The $\sinh$ transformation for evaluating nearly singular boundary element integrals over high-order geometry elements, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2013, vol. 37, issue 2, pp. 301–308. https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2012.11.011
21. Gu Y., Zhang Ch. Fracture analysis of ultra-thin coating/substrate structures with interface cracks, *International Journal of Solids and Structures*, 2021, vol. 225, 111074. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2021.111074
22. Zhang Y., Gong Y., Gao X. Calculation of 2D nearly singular integrals over high-order geometry elements using the sinh transformation, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2015, vol. 60, pp. 144–153. https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2014.12.006
23. Gong Y., Dong Ch., Qin F., Hattori G., Trevelyan J. Hybrid nearly singular integration for isogeometric boundary element analysis of coatings and other thin 2D structures, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2020, vol. 367, 113099. https://doi.org/10.1016/j.cma.2020.113099
24. Ivanov D. Yu. A refinement of the boundary element collocation method near the boundary of domain in the case of two-dimensional problems of non-stationary heat conduction with boundary conditions of the second and third kind, *Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Matematika i Mekhanika*, 2019, no. 57, pp. 5–25 (in Russian). https://doi.org/10.17223/19988621/57/1
25. Ivanov D. Yu. On solving plane problems of non-stationary heat conduction by the collocation boundary element method, *Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Matematika i Mekhanika*, 2017, no. 50. pp. 9–29 (in Russian). https://doi.org/10.17223/19988621/50/2

26. Smirnov V. I. *Kurs vysshei matematiki* (A course of higher mathematics), vol. 4, part 2, Moscow: Nauka, 1981.
27. Ivanov D. Yu. A refinement of the boundary element collocation method near the boundary of a two-dimensional domain using semianalytic approximation of the double layer heat potential, *Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Matematika i Mekhanika*, 2020, no. 65, pp. 30–52 (in Russian). https://doi.org/10.17223/19988621/65/3
28. Dunford N., Schwartz J. T. *Linear operators. Part 1: General theory*, Hoboken: John Wiley and Sons, 1988.
29. Ivanov D. Yu. Stable solvability in spaces of differentiable functions of some two-dimensional integral equations of heat conduction with an operator-semigroup kernel, *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2015, no. 38, pp. 33–45 (in Russian). https://doi.org/10.17223/19988621/38/4
30. Mikhlin S. G. *Mathematical physics, an advanced course*, Amsterdam: North-Holland, 1970. Original Russian text published in Mikhlin S. G. *Kurs matematicheskoi fiziki*, Moscow: Nauka, 1968.
31. Berezin I. S., Zhidkov N. P. *Metody vychislenii* (Methods of computation), vol. 1, Moscow: Fizmatgiz, 1962.
32. Kolmogorov A. N., Fomin S. V. *Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza* (Elements of the theory of functions and functional analysis), Moscow: Nauka, 1976.
33. Kato T. *Perturbation theory for linear operators*, Berlin–Heidelberg: Springer, 1995. https://doi.org/10.1007/978-3-642-66282-9
34. Fikhtengol'ts G. M. *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya* (Differential and integral calculus course), vol. 2, Moscow: Fizmatlit, 2003.

Received 19.12.2021

Accepted 10.03.2022

Dmitrii Yur'evich Ivanov, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Russian University of Transport (MIIT), ul. Obraztsova, 9, GSP-4, Moscow, 127994, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4551-469X
E-mail: ivanovdyu@yandex.ru

Citation: D. Yu. Ivanov. On uniform convergence of approximations of the double layer potential near the boundary of a two-dimensional domain, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2022, vol. 32, issue 1, pp. 26–43.