ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ
МЕХАНИКА 2021. Т. 31. Вып. 1. С. 102–115.

УДК 531.392

© *Г. В. Горр*

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ В ИССЛЕДОВАНИИ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТА С ПЕРЕМЕННЫМ ГИРОСТАТИЧЕСКИМ МОМЕНТОМ

Рассмотрена задача о движении гиростата, имеющего неподвижную точку, с переменным гиростатическим моментом под действием силы тяжести. Предложен новый метод интегрирования уравнений движения системы, состоящей из тела-носителя и трех роторов, которые вращаются вокруг главных осей. Его можно отнести к методу вариации постоянной в функции для гиростатического момента, который линейно зависит от вектора вертикали. При постоянном множителе гиростатический момент удовлетворяет уравнению Пуассона, а вариация его находится из интеграла площадей. Выполнена редукция исходных уравнений к системе пятого порядка. Получены новые решения данных уравнений в случае сферического распределения масс гиростата и для прецессионных движений тела-носителя. Установлен явный вид гиростатического момента для случая трех инвариантных соотношений.

Ключевые слова: гиростат, поле силы тяжести, инвариантные соотношения, редукция уравнений, сферический гиростат.

DOI: 10.35634/vm210108

Введение

Задача о движении гиростата рассматривалась У. Томсоном [1], В. Вольтеррой [2], Н. Е. Жуковским [3], А. Греем [4], В. В. Румянцевым [5], П. В. Харламовым [6], Й. Виттенбургом [7] и многими другими учеными. Она может быть условно разбита на две независимые задачи. Первая задача (У. Томсон, Н. Е. Жуковский, А. Грей, В. В. Румянцев, П. В. Харламов и др.) характеризуется тем, что в процессе движения роторы равномерно вращаются вокруг своих осей. В постановке Жуковского–Вольтерры предполагается, что гиростат содержит полости с циркулирующей в них жидкостью с постоянной циркуляцией. Актуальность такой задачи обусловлена тем, что уравнения движения гиростата допускают, как и в классической задаче, три первых интеграла.

Вторая задача (Н. Е. Жуковский, П. В. Харламов, В. В. Румянцев и др.) отличается от первой тем, что гиростатический момент зависит от времени; уравнения движения тяжелого гиростата имеют только два первых интеграла. Обзор результатов, полученных в построении решений уравнений движения гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил, дан в монографии [8]. Исследования по данной теме в других постановках указаны в [9, 10].

Изучение задачи о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом имеет важное значение в динамике космического полета, так как для переменной по составу ракетно-космической системы необходимо управление движением с помощью двигателей. Укажем несколько статей по данному управлению: [11–14].

В данной статье предложен новый метод изучения движения тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом. С помощью метода вариации постоянной в выражении гиростатического момента получена система пяти дифференциальных уравнений, решения которой рассмотрены на трех инвариантных соотношениях, полученных в задаче о движении твердого тела в потенциальном поле сил [15–17], а также в случае полиномиальных решений класса Н. Ковалевского [18], В. А. Стеклова [19], Д. Н. Горячева [20]. Отметим, что данные решения обобщены П. В. Харламовым [21] в задаче о движении гиростата с постоянным гиростатическим моментом.

Решения в конечном виде установлены для случаев сферического распределения масс гиростата и прецессионных движений тела-носителя.

§ 1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой, несущего три ротора, которые вращаются вокруг главных осей инерции. Уравнения движения системы S, состоящей из тела-носителя и трех роторов S_1, S_2, S_3, запишем в виде [6]

$$\overset{\bullet}{\boldsymbol{\lambda}} - \boldsymbol{\lambda} \times a\boldsymbol{x} = -\overset{\bullet}{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{x} \times a\boldsymbol{x} + \boldsymbol{s} \times \boldsymbol{\nu}, \tag{1.1}$$

$$\overset{\bullet}{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times a\boldsymbol{x}, \tag{1.2}$$

где $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ — момент количества движения; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ — единичный вектор, направленный по силе тяжести; $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ — гиростатический момент; $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, s_3)$ — вектор, направленный из неподвижной точки O в центр тяжести гиростата C ($s = mg|\overline{OC}|$); $a = \mathrm{diag}(a_1, a_2, a_3)$ — гирационный тензор; точка над переменными $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\lambda}$ обозначает производную по времени t в подвижной системе координат. Уравнения (1.1), (1.2) необходимо дополнить системой дифференциальных уравнений [6]

$$\overset{\bullet}{\lambda}_i(t) = L_i(t), \quad i = \overline{1,3}, \tag{1.3}$$

где

$$\lambda_i(t) = D_i(t) = \left(a\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\mathrm{э}}_i + \overset{\bullet}{\varkappa}_i\right), \quad i = \overline{1,3}, \tag{1.4}$$

D_i — моменты инерции роторов S_i относительно главных осей подвижной системы координат $Oxyz$ с единичными векторами $\boldsymbol{\mathrm{э}}_i$; $\overset{\bullet}{\varkappa}_i$ — скорости вращения тел S_i относительно осей данной системы координат; L_i — проекции моментов M_i, действующих со стороны тела-носителя S_0 на роторы S_i. Уравнения (1.3) можно рассматривать на основании двух подходов: если в результате интегрирования уравнений (1.1), (1.2) найдены функции $x_i = x_i(t)$, $\lambda_i = \lambda_i(t)$ и известны скорости вращения $\overset{\bullet}{\varkappa}_i(t)$, то уравнения (1.3) служат для определения функций $L_i(t)$; если известны функции $L_i(t)$, а скорости $\overset{\bullet}{\varkappa}_i(t)$ не заданы, то уравнения (1.3), в силу (1.4), служат для определения $\overset{\bullet}{\varkappa}_i(t)$.

Уравнения (1.1), (1.2) допускают два первых интеграла:

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1, \qquad (\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{\nu} = k. \tag{1.5}$$

Здесь k — постоянная, зависящая от начальных данных уравнений (1.1), (1.2). Отметим, что векторы $\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\nu}$ имеют следующие разложения по базису $\boldsymbol{\mathrm{э}}_1$, $\boldsymbol{\mathrm{э}}_2$, $\boldsymbol{\mathrm{э}}_3$:

$$\boldsymbol{\lambda} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \boldsymbol{\mathrm{э}}_i, \qquad \boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{3} x_i \boldsymbol{\mathrm{э}}_i, \qquad \boldsymbol{\nu} = \sum_{i=1}^{3} \nu_i \boldsymbol{\mathrm{э}}_i.$$

Задача о движении тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом изучалась во многих статьях и монографиях, указанных во введении. Наибольшее количество решений уравнений (1.1), (1.2) получено для программных движений гиростата, которые характеризуются свойствами прецессионности [8]. При этом полагалось, что инвариантные соотношения, описывающие эти движения, содержат и компоненты гиростатического момента.

В данной статье применяется другой метод исследования уравнений (1.1), (1.2). Его условно можно отнести к методу вариации постоянной в гиростатическом моменте. Действительно, для его применения обратимся к уравнениям (1.1), (1.2), положив в (1.1)

$$\overset{\bullet}{\boldsymbol{\lambda}} - \boldsymbol{\lambda} \times a\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}. \tag{1.6}$$

Сопоставляя уравнения (1.2) и (1.6), приходим к выводу о том, что функция $\boldsymbol{\lambda}(t)$ удовлетворяет уравнению, аналогичному уравнению (1.2). То есть вектор $\boldsymbol{\lambda}(t)$ имеет вид

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = c\,\boldsymbol{\nu}(t), \tag{1.7}$$

где c — постоянная, равная $|\boldsymbol{\lambda}(t)|$. При выполнении равенства (1.6) уравнения (1.1), (1.2) описывают задачу о движении тяжелого твердого тела. Данный результат показывает, что при условии (1.7) решениям уравнений Эйлера–Пуассона (см. обзоры [21–24]) можно сопоставить решения уравнений (1.1), (1.2), в которых гиростатический момент (1.7) зависит только от функции $\boldsymbol{\nu}(t)$. В силу очевидности данного утверждения будем полагать, что гиростатический момент $\boldsymbol{\lambda}(t)$ изменяется по величине, то есть

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = c(t)\boldsymbol{\nu}(t), \tag{1.8}$$

где $c(t)$ — дифференцируемая функция времени. Подставим значение (1.8) в интеграл момента количества движения из системы (1.5):

$$c(t) = k - \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\nu}. \tag{1.9}$$

Вычислим производную $\overset{\bullet}{c}(t)$, учитывая только уравнение (1.2):

$$\overset{\bullet}{c}(t) = -\overset{\bullet}{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{x}\,(\boldsymbol{\nu} \times a\boldsymbol{x}). \tag{1.10}$$

Запишем уравнение (1.1) с учетом равенств (1.8)–(1.10):

$$\boldsymbol{\nu}\left[\overset{\bullet}{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{x} \cdot (\boldsymbol{\nu} \times a\boldsymbol{x})\right] - \overset{\bullet}{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{x} \times a\boldsymbol{x} + \boldsymbol{s} \times \boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{0}. \tag{1.11}$$

Таким образом, суть метода вариации постоянной в гиростатическом моменте отражена формулой (1.10).

Будем полагать, что векторы $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{s}$ составляют независимый базис, то есть равномерные вращения гиростата исключаем из рассмотрения. При умножении левой части уравнения (1.11) скалярно на $\boldsymbol{\nu}$ получим тождество. Результат умножения левой части уравнения (1.11) скалярно на векторы $\boldsymbol{s}$ и $\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{s}$ запишем на основании принятых ранее обозначений:

$$\begin{gathered}
(s_3\nu_2 - s_2\nu_3)\left[\overset{\bullet}{x}_1 + (a_3 - a_2)\,x_2x_3 + (s_3\nu_2 - s_2\nu_3)\right] + \\
+ (s_1\nu_3 - s_3\nu_1)\left[\overset{\bullet}{x}_2 + (a_1 - a_3)\,x_3x_1 + (s_1\nu_3 - s_3\nu_1)\right] + \\
+ (s_2\nu_1 - s_1\nu_2)\left[\overset{\bullet}{x}_3 + (a_2 - a_1)\,x_1x_2 + (s_2\nu_1 - s_1\nu_2)\right] = 0,
\end{gathered} \tag{1.12}$$

$$\begin{aligned}&\Big[\overset{\bullet}{x}_1+(a_3-a_2)x_2x_3\Big]\ [-\nu_2\,(s_2\nu_1-s_1\nu_2)+\nu_3\,(s_1\nu_3-s_3\nu_1)]+\\&+\Big[\overset{\bullet}{x}_2+(a_1-a_3)\,x_3x_1\Big]\ [-\nu_3\,(s_3\nu_2-s_2\nu_3)+\nu_1\,(s_2\nu_1-s_1\nu_2)]+\\&+\Big[\overset{\bullet}{x}_3+(a_2-a_1)\,x_1x_2\Big]\ [-\nu_1\,(s_1\nu_3-s_3\nu_1)+\nu_2\,(s_3\nu_2-s_2\nu_3)].\end{aligned}\tag{1.13}$$

Уравнения (1.12), (1.13) необходимо изучать совместно с уравнением (1.2), которое в скалярном виде дает систему трех уравнений:

$$\overset{\bullet}{\nu}_1=a_3x_3\nu_2-a_2x_2\nu_3,\quad \overset{\bullet}{\nu}_2=a_1x_1\nu_3-a_3x_3\nu_1,\quad \overset{\bullet}{\nu}_3=a_2x_2\nu_1-a_1x_1\nu_2,\tag{1.14}$$

имеющую первый интеграл

$$\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2=1.\tag{1.15}$$

Таким образом, система (1.12) – (1.14) состоит из пяти дифференциальных уравнений на шесть функций $x_i(t)$, $\nu_i(t)$, $i=\overline{1,3}$. После интегрирования данной системы значение $\boldsymbol{\lambda}(t)$ находим из (1.8), (1.9):

$$\boldsymbol{\lambda}(t)=\big[k-(x_1(t)\nu_1(t)+x_2(t)\nu_2(t)+x_3(t)\nu_3(t))\,\big]\boldsymbol{\nu}(t).\tag{1.16}$$

§ 2. Преобразование уравнений (1.12)–(1.14) в случае трех инвариантных соотношений

Зададим три инвариантных соотношения (ИС) [15–17]:

$$x_1=\frac{1}{a_1}\big[\nu_1\varepsilon(\nu_3)+\beta_1 g(\nu_3)\big],\qquad x_2=\frac{1}{a_2}\big[\nu_2\varepsilon(\nu_3)+\beta_2 g(\nu_3)\big],\qquad x_3=\frac{\nu_3\varepsilon(\nu_3)}{a_3},\tag{2.1}$$

где β_1 и β_2 — постоянные параметры, $\varepsilon(\nu_3), g(\nu_3)$ — дифференцируемые функции переменной ν_3. Уравнения (1.14) на ИС (2.1) преобразуем так:

$$\overset{\bullet}{\nu}_1=-\beta_2\nu_3 g(\nu_3),\quad \overset{\bullet}{\nu}_2=\beta_1\nu_3 g(\nu_3),\quad \overset{\bullet}{\nu}_3=\big(\beta_2\nu_1-\beta_1\nu_2\big)g(\nu_3).\tag{2.2}$$

Для уравнений (2.2) имеет место дополнительное ИС [15]

$$\beta_1\nu_1+\beta_2\nu_2=c_0,\tag{2.3}$$

где c_0 — постоянная. Введем в равенствах (1.15), (2.3) вместо переменной ν_3 переменную ψ по формуле

$$\nu_3=\frac{\mu_0\sin\psi}{\varkappa_0}\qquad\Big(\varkappa_0=\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2},\ \ \mu_0=\sqrt{\varkappa_0^2-c_0^2}\Big).\tag{2.4}$$

Таким образом, для получения свойства действительности решения уравнений (1.14) необходимо положить

$$\varkappa_0^2-c_0^2>0.$$

Из равенств (1.15), (2.3) и третьего уравнения из (2.2) получим

$$\nu_1=\frac{1}{\varkappa_0^2}\big(c_0\beta_1+\beta_2\mu_0\cos\psi\big),\quad \nu_2=\frac{1}{\varkappa_0^2}\big(c_0\beta_2-\beta_1\mu_0\cos\psi\big),\tag{2.5}$$

$$\overset{\bullet}{\psi} = \varkappa_0 g(\psi). \tag{2.6}$$

Уравнение (2.6) позволяет при заданной функции $g(\psi)$ указать интегральное соотношение

$$\int_{\psi_0}^{\psi} \frac{d\psi}{g(\psi)} = \varkappa_0(t - t_0), \tag{2.7}$$

из которого путем обращения интеграла можно найти свойства функции $\psi(t)$. Следовательно, решения уравнений Пуассона (1.14) на ИС (2.1), (2.3) представлены в виде квадратуры (2.7) и равенств (2.4), (2.5).

Пример решения уравнений (1.12), (1.13). В общем случае указать решения уравнений (1.12), (1.13) на ИС (2.1) затруднительно. Поэтому вначале рассмотрим случай, когда эллипсоид инерции гиростата является сферой:

$$a_1 = a_2 = a_3.$$

Без ограничения общности положим в (1.12), (1.13) $s_2 = s_1 = 0$, $s_3 \neq 0$. Тогда уравнения (1.12), (1.13) в результате подстановки в них значений (2.1), (2.4), (2.5), (2.6) приведем к виду

$$\varepsilon(\psi) = c_0 g'(\psi) \operatorname{tg} \psi, \qquad \Big(g^2(\psi)\Big)' = q_0^2 \cos\psi, \tag{2.8}$$

где

$$q_0^2 = \frac{2a_1 s_3}{\varkappa_0 \mu_0}. \tag{2.9}$$

Параметр g_0 из (2.9), входящий в уравнение (2.8), действителен при выполнении условия $\dfrac{s_3}{\varkappa_0\mu_0} > 0$, которого можно добиться выбором параметра s_3. Из уравнений (2.8) найдем явные зависимости $\varepsilon(\psi)$ и $g(\psi)$:

$$\varepsilon(\psi) = -\frac{c_0 g_0 \sin\psi}{2\sqrt{(b_0 + \sin\psi)^3}}, \qquad g(\psi) = g_0\sqrt{b_0 + \sin\psi}. \tag{2.10}$$

Здесь b_0 — постоянная, удовлетворяющая неравенству $b_0 > 1$. Подставим $g(\psi)$ из (2.10) в формулу (2.7):

$$\int_{\psi_0}^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{b_0 + \sin\psi}} = \varkappa_0 g_0 (t - t_0). \tag{2.11}$$

Из (2.11) следует, что $\psi(t)$ является эллиптической функцией времени. Внося ее в равенства (2.4), (2.5) и (2.1), получим решение уравнений (1.12), (1.13). Для построенного решения гиростатический момент (1.16), в силу значений x_i, ν_i, $i = \overline{1,3}$, из (2.1) и соотношений (2.4), (2.5), примет вид

$$\boldsymbol{\lambda}(\psi) = \left[k - \frac{1}{a_1}\big(\varepsilon(\psi) + c_0 g(\psi)\big)\right] \boldsymbol{\nu}(\psi),$$

где множитель при векторе $\boldsymbol{\nu}$, на основании (2.10), отличен от постоянной. Далее необходимо рассмотреть уравнения (1.3), (1.4) с учетом тех подходов, которые изложены выше.

§ 3. Случай геометрически симметричного гиростата

Рассмотрим уравнения (1.12), (1.13) при условиях

$$s_1 = s_2 = 0, \quad s_3 \neq 0, \quad a_2 = a_1, \tag{3.1}$$

которые характеризуют геометрически симметричный гиростат (гироскоп Лагранжа). Полагаем, что сохраняются равенства (2.1), (2.3), (2.4), (2.5), (2.6). Запишем уравнения (1.12) (1.13) при ограничениях на параметры гиростата, указанных в (3.1):

$$\nu_2\left[\overset{\bullet}{x}_1 + (a_3 - a_1)\,x_2x_3\right] - \nu_1\left[\overset{\bullet}{x}_2 - (a_3 - a_1)\,x_1x_3\right] + s_3\left(1 - \nu_3^2\right) = 0, \tag{3.2}$$

$$\nu_3\left\{\nu_1\left[\overset{\bullet}{x}_1 + (a_3 - a_1)\,x_2x_3\right] + \nu_2\left[\overset{\bullet}{x}_2 - (a_3 - a_1)\,x_1x_3\right]\right\} - \left(1 - \nu_3^2\right)\overset{\bullet}{x}_3 = 0. \tag{3.3}$$

Вычислим значения выражений, которые содержатся в квадратных скобках, на ИС (2.1), (2.3), (2.4), (2.5). Учитывая уравнение (2.6), найдем

$$\begin{aligned} \overset{\bullet}{x}_1 + (a_3 - a_1)\,x_2x_3 = \frac{1}{\varkappa_0 a_1 a_3}\Big[&a_3\varkappa_0^2 g(\psi)\big(\nu_1\varepsilon'(\psi) + \beta_1 g'(\psi)\big) + \\ &+ \mu_0\,(a_3 - a_1)\,\nu_2\varepsilon^2(\psi)\sin\psi - a_1\beta_2\mu_0\varepsilon(\psi)g(\psi)\sin\psi\Big], \\ \overset{\bullet}{x}_1 - (a_3 - a_1)\,x_3x_1 = \frac{1}{\varkappa_0 a_1 a_3}\Big[&a_3\varkappa_0^2 g(\psi)\big(\nu_2\varepsilon'(\psi) + \beta_2 g'(\psi)\big) - \\ &- \mu_0\,(a_3 - a_1)\,\nu_1\varepsilon^2(\psi)\sin\psi + a_1\beta_1\mu_0\varepsilon(\psi)g(\psi)\sin\psi\Big], \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\overset{\bullet}{x}_3 = \frac{\mu_0}{a_3} g(\psi)\big(\varepsilon(\psi)\cos\psi + \varepsilon'(\psi)\sin\psi\big). \tag{3.5}$$

Подставим значения (3.4), (3.5) в уравнения (3.2), (3.3) и учтем равенства (2.4), (2.5):

$$\begin{aligned} g'(\psi) = \frac{1}{a_3\varkappa_0^4\mu_0 g(\psi)\cos\psi}\Big[&\mu_0(a_3 - a_1)(c_0^2 + \mu_0^2\cos^2\psi)\varepsilon^2(\psi)\sin\psi + \\ &+ a_1\varkappa_0^2\mu_0 c_0\varepsilon(\psi)g(\psi)\sin\psi + a_1a_3s_3\varkappa_0(c_0^2 + \mu_0^2\cos^2\psi)\Big], \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon'(\psi) = \frac{-1}{\mu_0\varkappa_0^2(a_3 - a_1)g(\psi)\sin\psi\cos\psi}\Big[&\mu_0(a_3 - a_1)c_0\varepsilon^2(\psi)\sin^2\psi + \\ &+ a_1\mu_0\varkappa_0^2\varepsilon(\psi) + a_1a_3s_3\varkappa_0c_0\sin\psi\Big]. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Таким образом, получена система двух дифференциальных уравнений на функции $g(\psi)$, $\varepsilon(\psi)$. Она представляет собой систему нелинейных уравнений, и в общем случае найти решение в замкнутом виде затруднительно. Поэтому рассмотрим случай

$$c_0 = 0, \tag{3.8}$$

который в силу равенства (2.3) охарактеризует прецессионное движение [22] относительно горизонтальной оси (угол между векторами $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, 0)$ и $\boldsymbol{\nu}(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ равен $\frac{\pi}{2}$). Уравнение (3.7) при условии (3.8) таково:

$$\varepsilon'(\psi) = \frac{a_1\varepsilon(\psi)}{(a_1 - a_3)\sin\psi\cos\psi}. \tag{3.9}$$

Решение уравнения (3.9) имеет вид

$$\varepsilon(\psi) = \varepsilon_0 \Big(\operatorname{tg}\psi \Big)^{\frac{a_1}{a_1 - a_3}}, \tag{3.10}$$

где ε_0 — произвольная постоянная. Из неравенств треугольника на главные моменты инерции найдем условие

$$a_1 < 2a_3. \tag{3.11}$$

Запишем уравнение (3.6) при условии (3.8):

$$\Big(g^2(\psi) \Big)' = \frac{2\mu_0 \cos\psi}{a_3 \varkappa_0^4} \big[\mu_0 (a_3 - a_1) \varepsilon^2(\psi) \sin\psi + a_1 a_3 s_3 \varkappa_0 \big]. \tag{3.12}$$

Подставим функцию (3.10) в уравнение (3.12):

$$\Big(g^2(\psi) \Big)' = \frac{2\mu_0}{a_3 \varkappa_0^4} \Big[\mu_0 \varepsilon_0^2 (a_3 - a_1) \Big(\operatorname{tg}\psi \Big)^{\frac{2a_1}{a_1 - a_3}} \sin\psi \cos\psi + a_1 a_3 s_3 \varkappa_0 \cos\psi \Big]. \tag{3.13}$$

Из (3.13) следует, что функция $g^2(\psi)$ имеет значение

$$g^2(\psi) = g_0^2 + p_1 \int_{\psi_0}^{\psi} \Big(\operatorname{tg}\psi \Big)^{\frac{2a_1}{a_1 - a_3}} \sin\psi \cos\psi d\,\psi + p_2 \sin\psi, \tag{3.14}$$

где g_0 — произвольная постоянная и

$$p_1 = \frac{2\mu_0^2 \varepsilon_0^2 (a_3 - a_1)}{a_3 \varkappa_0^4}, \qquad p_2 = \frac{2\mu_0 a_1 a_3 s_3 \varepsilon_0}{a_3 \varkappa_0^4}.$$

Действительности функции $g(\psi)$ из (3.14) можно добиться выбором постоянной g_0^2. Для вычисления интеграла, входящего в равенство (3.14), положим

$$\operatorname{tg}\psi = z. \tag{3.15}$$

Тогда из (3.14) получим выражение для интеграла

$$\int_{z_0}^{z} \frac{z^{\frac{3a_1 - a_3}{a_1 - a_3}}}{(1 + z^2)^2}\, dz. \tag{3.16}$$

В общем случае вычисление интеграла представляется сложным. Однако можно привести пример, когда этот интеграл можно представить в конечном виде. Положим в (3.14), (3.16)

$$\frac{3a_1 - a_3}{a_1 - a_3} = 2m + 1, \quad m \in N, \tag{3.17}$$

то есть компоненты гирационного тензора a_1, a_3 удовлетворяют равенству

$$\frac{a_1}{a_3} = \frac{m}{m - 1}. \tag{3.18}$$

Из условий (3.11), (3.18) получим ограничение на параметр m:

$$m > 2.$$

Запишем интеграл (3.16) в силу (3.17):

$$\frac{1}{2}\int_{z_0}^{z}\frac{(z^2)^m\,d(z^2)}{(1+z^2)^2}. \tag{3.19}$$

Рассмотрим (3.18) и первообразную от (3.19) при $m = 3$. Тогда из (3.18) следует

$$a_1 = \frac{3}{2}a_3, \tag{3.20}$$

а из (3.19) найдем

$$\frac{1}{2}\int_{z_0}^{z}\frac{(z^2)^3\,dz^2}{(1+z^2)^2}. \tag{3.21}$$

Интеграл (3.21) вычисляется стандартным методом. На его основании, используя замену (3.15), запишем итоговый результат для функции (3.14):

$$g^2(\psi) = F(\psi) = g_0^2 + p_2\sin\psi + \frac{p_1}{4}\Big[\operatorname{tg}^4\psi - 4\operatorname{tg}^2\psi + 6\ln(\operatorname{tg}^2\psi + 1) + \frac{2}{1+\operatorname{tg}^2\psi}\Big]. \tag{3.22}$$

Зависимость $\psi(t)$, в силу (2.7), определяется путем обращения интеграла

$$\int_{\psi_0}^{\psi}\frac{d\psi}{\sqrt{F(\psi)}} = \varkappa_0(t-t_0), \tag{3.23}$$

где начальное значение $\psi_0 \neq \dfrac{\pi}{2}$.

Запишем значение гиростатического момента на построенном решении уравнений (1.12), (1.13). Используя равенства (1.9), (2.1), (2.3), (2.4), (3.23), определим следующую функцию:

$$\boldsymbol{\lambda}(\psi) = \frac{1}{a_0a_1a_3}\Big[k\varkappa_0a_1a_3 - \varepsilon(\psi)\left(\varkappa_0^2a_3 + \mu_0^2\,(a_1-a_3)\right)\sin^2\psi\Big]\boldsymbol{\nu}. \tag{3.24}$$

Из (3.24) устанавливаем, что на основании значения (3.10) выражение в квадратных скобках отлично от постоянной. То есть имеет место нетривиальный случай интегрирования уравнений (1.12), (1.13). При этом исследование функции $\psi(t)$ из (3.23) можно провести только на конечном промежутке времени.

Отметим результат при $m = 4$:

$$g^2(\psi) = F(\psi) = g_0^2 + p_2\sin\psi + \frac{1}{2}p_1\Big[\frac{\operatorname{tg}^6\psi}{3} - \operatorname{tg}^4\psi + 3\operatorname{tg}^2\psi - 4\ln(\operatorname{tg}^2\psi+1) - \frac{1}{\operatorname{tg}^2\psi+1}\Big]. \tag{3.25}$$

Формула (3.25) является аналогом формулы (3.22) и имеет место при условии

$$a_1 = \frac{4}{3}a_3. \tag{3.26}$$

Замечание. Решения (3.10), (3.14) (в частном случае — решения (3.22), (3.25)), полученные при условиях (3.20), (3.26), представляют теоретический интерес, так как они имеют неустранимые особенности при значениях ψ, удовлетворяющих уравнению $\cos\psi = 0$.

§ 4. Случай динамически симметричного гиростата

Рассмотрим уравнения (1.12), (1.13) при условиях

$$a_2 = a_1, \qquad s_1 = \sigma_0\beta_1, \qquad s_2 = \sigma_0\beta_2, \qquad s_3 = 0, \tag{4.1}$$

где σ_0 — постоянный параметр ($\sigma_0^2 = s^2$). Из равенств (4.1) следует, что центр тяжести гиростата лежит в плоскости, ортогональной оси динамической симметрии гиростата [23] (в частном случае из (4.1) можно получить условия С. В. Ковалевской: $a_3 = 2a_1$ и Д. Н. Горячева, С. А. Чаплыгина: $a_3 = 4a_1$). Как и в § 2, будем полагать, что имеют место ИС (2.1), (2.3), (2.4), (2.5) и уравнение (2.7). Тогда из уравнений (1.12), (1.13) найдем уравнения

$$\varepsilon'(\psi) = \frac{1}{\varkappa_0^2(a_3 - a_1)g(\psi)\cos\psi\sin\psi}\Big[a_1\varkappa_0^2\varepsilon(\psi)g(\psi) + \sigma_0 a_1 a_3\varkappa_0^2 - c_0(a_3 - a_1)\varepsilon^2(\psi)\sin^2\psi\Big], \tag{4.2}$$

$$a_3\varkappa_0^2 g(\psi)g'(\psi) - (a_3 - a_1)\varepsilon^2(\psi)\sin\psi\cos\psi + c_0(a_3 - a_1)g(\psi)\varepsilon'(\psi)\sin^2\psi = 0. \tag{4.3}$$

Исключим в уравнении (4.3) $\varepsilon'(\psi)$ с помощью уравнения (4.2):

$$\Big(g^2(\psi)\Big)' = \frac{2\sin\psi}{a_3\varkappa_0^4\cos\psi}\Big[(a_3 - a_1)\varepsilon^2(\psi)(c_0^2 + \mu_0^2\cos^2\psi) - c_0 a_1\varkappa_0^2\varepsilon(\psi)g(\psi) - c_0\sigma_0\varkappa_0^2 a_1 a_3\Big].$$

Системы (3.6), (3.7) и (4.2), (4.3) имеют определенный аналог. Поэтому представляет интерес рассмотрение уравнений (4.2), (4.3) в случае $c_0 = 0$. Используя уравнение (4.2), найдем

$$g(\psi) = \frac{\sigma_0 a_1 a_3}{(a_3 - a_1)\varepsilon'(\psi)\sin\psi\cos\psi - a_1\varepsilon(\psi)}. \tag{4.4}$$

Подставим значение (4.4) в уравнение (4.3):

$$\begin{gathered}\varkappa_0^2 a_1^2 a_3^3\sigma_0^2\Big[(a_3 - a_1)\varepsilon''(\psi)\sin\psi\cos\psi + \varepsilon(\psi)\big(2(a_3 - a_1)\cos^2\psi - a_3\big)\Big] + \\ + (a_3 - a_1)\varepsilon^2(\psi)\big[(a_3 - a_1)\varepsilon'(\psi)\sin\psi\cos\psi - a_1\varepsilon(\psi)\big]^3 = 0.\end{gathered} \tag{4.5}$$

Уравнение (4.5) не относится к определенному классу, который был бы изучен в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Можно лишь доказать, что оно не допускает конкретных решений. Например, можно показать, что уравнение (4.5) не имеет решения

$$\varepsilon(\psi) = \varepsilon_0\Big(\operatorname{tg}\psi\Big)^{\alpha_0},$$

полученного для случая геометрически симметричного гиростата, которое допускают уравнения (3.6), (3.7).

§ 5. Редукция уравнений (1.12), (1.13) на ИС, которые отвечают решениям Н. Ковалевского, В. А. Стеклова, Д. Н. Горячева

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (1.12)–(1.14) в случае, когда основные переменные задачи имеют вид [18,21]

$$\nu_1 = \varphi(x_1), \qquad \nu_2 = x_2(x_1)\psi(x_1), \qquad \nu_3 = x_3(x_1)\,\theta(x_1), \tag{5.1}$$

$$x_2^2(x_1) = Q(x_1), \qquad x_3^2(x_1) = R(x_1), \tag{5.2}$$

где x_1 — вспомогательная переменная. В уравнениях (1.12), (1.13) полагаем

$$s_3 = 0, \qquad s_2 = 0, \qquad s_1 \neq 0.$$

Функции $\varphi(x_1)$, $\psi(x_1)$, $\theta(x_1)$, $Q(x_1)$, $R(x_1)$ — дифференцируемые функции по переменной x_1 (производные этих функций по x_1 будем обозначать штрихом). Подставим значения (5.1), (5.2) в уравнения (1.14):

$$\dot{x}_1 = \frac{a_3\psi(x_1) - a_2\theta(x_1)}{\varphi'(x_1)}, \tag{5.3}$$

$$\Big[a_3\psi(x_1) - a_2\theta(x_1)\Big]\Big[\theta(x_1)R'(x_1) + 2\theta'(x_1)R(x_1)\Big] - 2\varphi'(x_1)\Big[a_2\varphi(x_1) - a_1x_1\psi(x_1)\Big] = 0, \tag{5.4}$$

$$\Big[a_3\psi(x_1) - a_2\theta(x_1)\Big]\Big[\psi(x_1)Q'(x_1) + 2\psi'(x_1)R(x_1)\Big] - 2\varphi'(x_1)\Big[a_1x_1\theta(x_1) - a_3\varphi(x_1)\Big] = 0. \tag{5.5}$$

В силу геометрического интеграла $\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2 = 1$ и равенств (5.1), (5.2) получим уравнение

$$\varphi^2(x_1) + Q(x_1)\psi^2(x_1) + R(x_1)\theta^2(x_1) = 1,$$

которое можно рассматривать вместо одного из уравнений (5.4), (5.5).

Уравнения (1.12), (1.13) на ИС (5.1), (5.2), с учетом уравнения (5.3), таковы:

$$\begin{gathered}\Big[a_3\psi(x_1) - a_2\theta(x_1)\Big]\Big[\theta(x_1)R(x_1)Q'(x_1) - \psi(x_1)Q(x_1)R'(x_1)\Big] + \\ + 2\varphi'(x_1)\Big\{x_1\Big[(a_1-a_3)\theta(x_1)R(x_1) - (a_2-a_1)\psi(x_1)Q(x_1)\Big] + s_1\big(1-\varphi^2(x_1)\big)\Big\} = 0,\end{gathered} \tag{5.6}$$

$$\begin{gathered}\Big[a_3\psi(x_1) - a_2\theta(x_1)\Big]\Big[2\left(1-\varphi^2(x_1)\right) - \varphi(x_1)\big(\psi(x_1)Q'(x_1) + \theta(x_1)R'(x_1)\big)\Big] - \\ - \big(\varphi^2(x_1)\big)'\Big[(a_1-a_3)\psi(x_1) + (a_2-a_1)\theta(x_1)\Big] = 0.\end{gathered} \tag{5.7}$$

Система дифференциальных уравнений (5.3)–(5.7) является системой пятого порядка на пять функций, входящих в ИС (5.1), (5.2), то есть она является замкнутой.

Уравнение (5.3) служит для определения функции $x_1(t)$ и используется после интегрирования уравнений (5.4), (5.5), (5.6), (5.7). Зависимость гиростатического момента (1.16) от переменной x_1, в силу (5.1), (5.2), имеет вид

$$\boldsymbol{\lambda}(x_1) = \Phi(x_1)\boldsymbol{\nu},$$

где

$$\Phi(x_1) = k - \Big[x_1\varphi(x_1) + Q(x_1)\psi(x_1) + R(x_1)\theta(x_1)\Big].$$

Интегрирование системы уравнений (5.4), (5.5), (5.6), (5.7) можно отнести к перспективной задаче о движении неавтономного гиростата.

Заключение. В статье предложен новый метод интегрирования уравнений движения гиростата с неподвижной точкой, который основан на вариации постоянной, которая является множителем при гиростатическом моменте, направленном по вектору вертикали. В процессе применения этого метода использованы уравнение Пуассона и интеграл момента количества движения уравнений движения гиростата с переменным гиростатическим моментом. С помощью редуцированной системы уравнений на инвариантном множестве трех линейных инвариантных соотношений найдены новые решения задачи. Определенное значение имеет вид гиростатического момента, который направлен по вектору вертикали.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Thomson W. On the motion of rigid solids in a liquid circulating irrotationally through perforations in them or in any fixed solid // Proceeding of the Royal Society of Edinburg. 1872. Vol. 7. P. 668–682. https://doi.org/10.1017/S0370164600042875
2. Volterra V. Sur la théorie des variations des latitudes // Acta Mathematica. 1899. Vol. 22. P. 201–357. https://doi.org/10.1007/BF02417877
3. Жуковский Н. Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью // Собр. соч. Т. 1. М.: Гостехиздат, 1949. С. 31–152.
4. Gray A. A treatise on gurostatics and rotational motion. Theory and applications. New York: Dover Publications, 1959.
5. Румянцев В. В. Об управлении ориентацией и о стабилизации спутника роторами // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. 1970. № 2. С. 83–96.
6. Харламов П. В. Об уравнениях движения системы твердых тел // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1972. № 4. С. 52–73.
7. Виттенбург Й. Динамика систем твердых тел. М.: Мир, 1980.
8. Горр Г. В., Мазнев А. В., Котов Г. А. Движение гиростата с переменным гиростатическим моментом. Донецк: Изд-во ГУ «Институт прикладной математики и механики», 2017.
9. Леви-Чивита Т., Амальди У. Курс теоретической механики. Т. 2. Динамика систем с конечным числом степеней свободы. Ч. 2. М.: ИЛ, 1951.
10. Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика твердого тела. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.
11. Kane T. R., Fowler R. C. Equivalence of two gyrostatic stability problems // Journal of Applied Mechanics. 1970. Vol. 37. Issue 4. P. 1146–1147. https://doi.org/10.1115/1.3408674
12. Roberson R. E. The equivalence of two classical problems of free spinning gyrostats // Journal of Applied Mechanics. 1971. Vol. 38. Issue 3. P. 1146–1147. https://doi.org/10.1115/1.3408879
13. Асланов В. С., Дорошин А. В. Движение системы соосных тел переменной массы // Прикладная математика и механика. 2004. Т. 68. Вып. 6. С. 999–1009.
14. Асланов В. С., Дорошин А. В. О двух случаях движения неуравновешенного гиростата // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2006. № 4. С. 42–55. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=9282192
15. Горр Г. В. О трех инвариантных соотношениях уравнений движения тела в потенциальном поле сил // Прикладная математика и механика. 2019. Т. 83. № 2. С. 202–214. https://doi.org/10.1134/S0032823519020061
16. Gorr G. V. On three invariant of the equations of motion of a body in a potential field of force // Mechanics of Solid. 2019. Vol. 54. Suppl. 2. P. S104–S114.
17. Gorr G. V., Tkachenko D. N., Shchetinina E. K. Research on the motion of a body in a potential force field in the case of three invariant relations // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2019. Vol. 15. No. 3. P. 327–342. https://doi.org/10.20537/nd190310
18. Kowalewski N. Eine neue partikuläre Lösung der Differentialgleichungen der Bewegung eines schweren starren Körpers um einen festen Punkt // Mathematische Annalen. 1908. Vol. 65. Issue 4. P. 528–537. https://doi.org/10.1007/BF01451168
19. Стеклов В. А. Новое частное решение дифференциальных уравнений движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку // Труды Отделения физических наук Общества любителей естествознания. 1899. Т. 10. Вып. 1. С. 1–3.
20. Горячев Д. Н. Новое частное решение задачи о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки // Труды Отделения физических наук Общества любителей естествознания. 1899. Т. 10. Вып. 1. С. 23–24.
21. Харламов П. В. Полиномиальные решения уравнений движения тела, имеющего неподвижную точку // Прикладная математика и механика. 1965. Т. 29. Вып. 1. С. 26–34.
22. Горр Г. В., Мазнев А. В. Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку. Донецк: ДонНУ, 2010.

23. Горр Г. В., Кудряшова Л. В., Степанова Л. А. Классические задачи динамики твердого тела. Развитие и современное состояние. Киев: Наукова думка, 1978.
24. Гашененко И. Н., Горр Г. В., Ковалёв А. М. Классические задачи динамики твердого тела. Киев: Наукова думка, 2012.

Поступила в редакцию 28.05.2020

Горр Геннадий Викторович, д. ф.-м. н., профессор, главный научный сотрудник, Институт прикладной математики и механики, 83114, Украина, Донецк, ул. Розы Люксембург, 74.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7505-2567
E-mail: gvgorr@gmail.com

Цитирование: Г. В. Горр. Об одном подходе в исследовании движения гиростата с переменным гиростатическим моментом // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2021. Т. 31. Вып. 1. С. 102–115.

MECHANICS 2021. Vol. 31. Issue 1. Pp. 102–115.

G. V. Gorr

An approach in studying gyrostat motion with variable gyrostatic moment

Keywords: gyrostat, gravity field, invariant relations, reduction of equations, spherical gyrostat.

MSC2020: 70E05, 70E17,70E40

DOI: 10.35634/vm210108

The problem of the motion of a gyrostat with a fixed point and a variable gyrostatic moment under the action of gravity force is considered. A new method for integrating the equations of motion of a system consisting of a carrier body and three rotors that rotate around the main axes is proposed. The method can be attributed to the method of variation of the constant in the function for the gyrostatic moment, which linearly depends on the vector of vertical. In case of a constant multiplier, the gyrostatic moment satisfies the Poisson equation, and its variation is found from the integral of areas. The original equations have been reduced to a fifth-order system. New solutions of these equations are obtained in the case of a spherical mass distribution for the gyrostat and for the precessional motions of a carrier body. An explicit form of the gyrostatic moment is established for the case of three invariant relations.

REFERENCES

1. Thomson W. On the motion of rigid solids in a liquid circulating irrotationally through perforations in them or in any fixed solid, *Proceeding of the Royal Society of Edinburg*, 1872, vol. 7, pp. 668–682. https://doi.org/10.1017/S0370164600042875
2. Volterra V. Sur la théorie des variations des latitudes, *Acta Mathematica*, 1899, vol. 22, pp. 201–357. https://doi.org/10.1007/BF02417877
3. Zhukovskii N. E. On the motion of a solid body having cavities filled with a homogeneous dropping liquid, *Sobranie sochinenii. Tom 1* (Collected works, vol. 1), Moscow: Gostekhizdat, 1949, pp. 31–152 (in Russian).
4. Gray A. *A treatise on gurostatics and rotational motion. Theory and applications*, New York: Dover Publications, 1959.
5. Rumyantsev V. V. About orientation control and satellite stabilization by rotors, *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya I. Matematika, Mekhanika*, 1970, no. 2, pp. 83–96 (in Russian). https://zbmath.org/?q=an:0207.23402
6. Kharlamov P. V. On the equations of motion of a system of solids, *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Mekhanika Tverdogo Tela*, 1972, no. 4, pp. 52–73 (in Russian).
7. Wittenburg J. *Dynamics of systems of rigid bodies*, Stuttgart: B. G. Teubner, 1977.
8. Gorr G. V., Maznev A. V., Kotov G. A. *Dvizhenie girostata s peremennym girostaticheskim momentom* (The movement of the gyrostat with a variable gyrostatic moment), Donetsk: Institute of Applied Mathematics and Mechanics, 2017.
9. Levy-Civita T., Amaldi U. *Lezioni di Meccanica Razionale. Vol. 2. Dinamica dei sistemi con un numero finito di gradi di libertà. Part 2*, Bologna: 1927. (In Italian).
10. Borisov A. V., Mamaev I. S. *Rigid body dynamics*, De Gruyter, 2019. https://doi.org/10.1515/9783110544442
11. Kane T. R., Fowler R. C. Equivalence of two gyrostatic stability problems, *Journal of Applied Mechanics*, 1970, vol. 37, issue 4, pp. 1146–1147. https://doi.org/10.1115/1.3408674
12. Roberson R. E. The equivalence of two classical problems of free spinning gyrostats, *Journal of Applied Mechanics*, 1971, vol. 38, issue 3, pp. 1146–1147. https://doi.org/10.1115/1.3408879
13. Aslanov V. S., Doroshin A. V. The motion of a system of coaxial bodies of variable mass, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2004, vol. 68, issue 6, pp. 899–908. https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2004.11.012
14. Aslanov V. S., Doroshin A. V. Two cases of motion of an unbalanced gyrostat, *Mechanics of Solids*, 2006, vol. 41, issue 4, pp. 29–39. http://mtt.ipmnet.ru/en/Issues.php?y=2006&n=4&p=29

15. Gorr G. V. On three invariant relations of the equations of motion of a body in a potential field of force, *Mechanics of Solids*, 2019, vol. 54, no. 2, pp. 234–244. https://doi.org/10.3103/S0025654419030105
16. Gorr G. V. On three invariant of the equations of motion of a body in a potential field of force, *Mechanics of Solid*, 2019, vol. 54, suppl. 2, pp. S104–S114.
17. Gorr G. V., Tkachenko D. N., Shchetinina E. K. Research on the motion of a body in a potential force field in the case of three invariant relations, *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2019, vol. 15, no. 3, pp. 327–342. https://doi.org/10.20537/nd190310
18. Kowalewski N. Eine neue partikuäre Lösung der Differenzialgleichungen der Bewegung eines schweren starren Körpers um einen festen Punkt, *Mathematische Annalen*, 1908, vol. 65, issue 4, pp. 528–537. https://doi.org/10.1007/BF01451168
19. Steklov V. A. A new particular solution of differential equations of motion of a heavy rigid body with a fixed point, *Trudy Otdeleniya Fizicheskikh Nauk Obshchestva Lyubitelei Estestvoznaniya*, 1899, vol. 10, issue 1, pp. 1–3 (in Russian).
20. Goryachev D. N. A new particular solution to the problem of the motion of a heavy rigid body around a fixed point, *Trudy Otdeleniya Fizicheskikh Nauk Obshchestva Lyubitelei Estestvoznaniya*, 1899, vol. 10, issue 1, pp. 23–24 (in Russian).
21. Kharlamov P. V. Polynomial solutions of the equations of motion of a body with a fixed point, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1965, vol. 29, issue 1, pp. 26–35. https://doi.org/10.1016/0021-8928(65)90147-4
22. Gorr G. V., Maznev A. V. *Dinamika girostata, imeyushchego nepodvizhnuyu tochku* (The dynamics of a gyrostat having a fixed point), Donetsk: Donetsk National University, 2010.
23. Gorr G. V., Kudryashova L. V., Stepanova L. A. *Klassicheskie zadachi dinamiki tverdogo tela. Razvitie i sovremennoe sostoyanie* (Classical problems in the theory of solid bodies. Their development and current state), Kiev: Naukova Dumka, 1978.
24. Gashenenko I.N., Gorr G. V., Kovalev A. M. *Klassicheskie zadachi dinamiki tverdogo tela* (Classical problems of the dynamics of a rigid body), Kiev: Naukova Dumka, 2012. https://zbmath.org/?q=an:1284.70002

Received 28.05.2020

Gorr Gennadiy Viktorovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Chief Researcher, Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Donetsk, ul. R. Luxemburg, 74, Donetsk, 83114, Ukraine.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7505-2567
E-mail: gvgorr@gmail.com

Citation: G. V. Gorr. An approach in studying gyrostat motion with variable gyrostatic moment, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2021, vol. 31, issue 1, pp. 102–115.