МЕХАНИКА 2021. Т. 31. Вып. 1. С. 89–101.

УДК 531.381

© *В. В. Войтик, Н. Г. Мигранов*

МАЛАЯ НУТАЦИЯ СИММЕТРИЧНОГО ГИРОСКОПА: ДВЕ ТОЧКИ ЗРЕНИЯ

Статья посвящена малой нутации осесимметричного гироскопа в поле сил тяжести. Получено разложение известного решения уравнения нутации как функции времени, по степеням амплитуды. При этом частотами комбинационного колебания третьего порядка являются как утроенная частота, так и частота, совпадающая с исходной. Найдена формула для амплитуды нутации как функции интегралов движения гироскопа. Также вычислена частота бесконечно малой нутации. Другой способ получения разложения заключается в использовании результатов общей теории свободных одномерных колебаний. Этот способ основывается на возможности представить нутацию гироскопа как движение материальной точки единичной массы в поле, которое кубично-квадратично зависит от координаты. В этом случае единственной частотой комбинационного колебания третьего порядка является только утроенная исходная частота. Таким образом, оба способа дают одинаковый результат лишь для колебаний не выше второго порядка. В третьем приближении существующая теория колебаний недостаточна.

Ключевые слова: неуравновешенный гироскоп, псевдорегулярное вращение, малая нутация, ангармонические колебания.

DOI: 10.35634/vm210107

Введение

Гироскопы применяются во многих областях техники, например в качестве гироинтегратора линейных ускорений. Вследствие этого обстоятельства движение твердого тела с одной закрепленной точкой в поле сил тяжести имеет большое научное и практическое значение. Достаточно сказать, что решение уравнений движения такого гироскопа приводится в базовых курсах механики. Оно известно как случай Лагранжа (например [1]).

Вращение оси симметрии $\mathbf{n}$ неуравновешенного гироскопа вокруг вертикали, то есть *прецессия* гироскопа, сопровождается его *нутацией*. Нутацией называется периодическое изменение координаты, характеризующей ориентацию вектора $\mathbf{n}$ к вертикали. Если эта нутация отсутствует, то в этом случае прецессия гироскопа является равномерной и называется *регулярной*. В том случае, если нутация достаточно мала, то такое вращение гироскопа называют *псевдорегулярным*.

Иногда [2–4] подчеркивается, что работа уравновешенного гироскопа также основана на принципе псевдорегулярной прецессии, который формулируется как проявление его инерции. При скорости вращения гироскопа вокруг своей оси значительно выше скорости вращения его оси этот гироскоп сохраняет неизменным направление оси своего вращения при отсутствии внешних сил. Когда на гироскоп действует внешний крутящий момент, он противодействует ему с такой же интенсивностью. Если устройство установлено в карданном кольце, то его положение остается почти фиксированным независимо от движения платформы, на которой оно установлено.

Псевдорегулярное движение гироскопа служит примером и для специализированных наук, например для климатологии. Так, в [5, с. 415] предлагается проводить аналогию в первом приближении между прецессионным движением Земли и псевдорегулярной прецессией.

Теория псевдорегулярного движения гироскопа для специальных начальных условий и больших угловых скоростей собственного вращения в последнее время излагалась в ряде монографий и учебных пособий [6, гл. V, с. 326–342], [7, с. 75–77], [8, п. 5.7, с. 264], [9, с. 65–69], [10, с. 349], [11], [12, с. 136–137].

В настоящее время в теории псевдорегулярного движения исследуется ряд вопросов, касающихся возмущенного вращения твердого тела Лагранжа, близкого к псевдорегулярной прецессии, и, в частности, учитывающих трение. Любопытно отметить, что для гибкого ротора, если рассматривается ограниченное возмущение, псевдорегулярная прецессия также должна быть устойчивой [13]. В работах [14, 15] авторы получили и исследовали в случаях (а) сопротивления, приложенного средой, и (б) постоянного крутящего момента, соединенного с телом, усредненные системы уравнений движения по углу нутации. Кроме того, была выяснена эволюция со временем углов прецессии и нутации. В [16] в качестве первоначального приближения рассматривается задача о движении по гладкой горизонтальной плоскости эллипсоида вращения, центр масс которого совпадает с геометрическим центром, а ось вращения является осью динамической симметрии. В статье указывается, что при некоторых значениях постоянных движение эллипсоида является псевдорегулярной прецессией вокруг центра масс, равномерно движущегося вдоль плоскости.

Интерес представляют и возможные новые способы решения задач. Например, в [17] предлагается новый расчетный метод для вращения симметричного твердого тела: вводится новая комплексная векторная угловая скорость $\boldsymbol{\omega} = (\dot{\boldsymbol{\theta}} + i\,\dot{\boldsymbol{\varphi}}\sin\theta)\,e^{-i\psi}$. При этом предполагается, что волчок является быстрым и его ось симметрии всегда близка к вертикали. Полученные решения уравнения движения учитывают нутацию и псевдорегулярность прецессии твердого тела.

Таким образом, несмотря на то, что псевдорегулярное движение гироскопа в основном хорошо изучено, в этой области всё еще имеются некоторые интересные вопросы. Неожиданно[1] оказалось, что одним из таких вопросов является более точное определение такого движения. Обычное изложение псевдорегулярного движения гироскопа в литературе основывается на эффекте первого порядка, в котором пренебрегается квадратом амплитуды нутации. Это отвечает гармоническим колебаниям. В отличие от предыдущих исследований предлагаемая статья посвящена учету следующих приближений в разложении закона движения оси симметрии (с точностью до кубов амплитуды нутации). Эти более точные приближения рассматриваются в статье с двух точек зрения. Первым и наиболее очевидным методом получения ангармонических членов второго и третьего порядка является разложение точного закона движения оси симметрии гироскопа по степеням амплитуды колебания (см. § 2). Данная задача интересна даже с математической точки зрения. Дело в том, что получение первых членов искомого ряда само по себе является нетривиальной задачей.

Другим способом является использование результатов общей теории ангармонических колебаний [18, п. 28, с. 113–117]. Аналитически данный способ основан на возможности представить нутацию оси симметрии гироскопа как движение материальной точки единичной массы в особом поле, которое кубично-квадратично зависит от координаты (см. § 3). Эти методы, разумеется, должны давать один и тот же результат. Поэтому более точное разложение в ряд закона нутации гироскопа является важной и независимой проверкой существующей теории колебаний.

§ 1. Точное решение задачи о движении гироскопа

Псевдорегулярное движение гироскопа с одной закрепленной точкой можно рассматривать в наиболее общем виде, не делая заранее никаких предположений. Будем использовать

[1] На первый взгляд, если известно точное решение уравнений движения, более грубое приближение к этому движению не представляет интереса.

обозначения из [18, с. 148]. Функция Лагранжа гироскопа в поле сил тяжести есть

$$L = \frac{I_1'}{2}\,(\dot\theta^{\,2} + \dot\varphi^2\,\sin^2\theta) + \frac{I_3}{2}\,(\dot\psi + \dot\varphi\,\cos\theta)^2 - \mu g\,l\,\cos\theta,$$

где μ — масса гироскопа, l — расстояние от точки опоры до центра масс, $I_1' = I_1 + \mu l^2$, I_1 — момент инерции вдоль оси перпендикулярной оси симметрии, I_3 — момент инерции вдоль оси симметрии гироскопа. Поскольку циклическими координатами являются φ, ψ, t, то для гироскопа существуют три интеграла движения:

$$\frac{\partial L}{\partial\dot\psi} = I_3(\dot\psi + \dot\varphi\,\cos\theta) = M_3 = \text{const}, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} = (I_1'\sin^2\theta + I_3\cos^2\theta)\dot\varphi + I_3\dot\psi\,\cos\theta = M_z = \text{const}, \tag{1.2}$$

$$\frac{I_1'}{2}(\dot\theta^{\,2} + \dot\varphi^2\,\sin^2\theta) + \frac{I_3}{2}(\dot\psi + \dot\varphi\,\cos\theta)^2 + \mu gl\,\cos\theta = E = \text{const}. \tag{1.3}$$

Выразим $\dot\psi$, $\dot\varphi$ из (1.1), (1.2):

$$\dot\varphi = \frac{M_z - M_3\cos\theta}{I_1'\sin^2\theta}, \qquad \dot\psi = \frac{M_3}{I_3} - \frac{(M_z - M_3\cos\theta)\cos\theta}{I_1'\sin^2\theta},$$

подставим в (1.3). Получим, что

$$\frac{I_1'}{2}\,\dot\theta^{\,2} = E - \frac{M_3^2}{2I_3} - \mu g\,l\,\cos\theta - \frac{(M_z - M_3\cos\theta)^2}{2I_1'\sin^2\theta}. \tag{1.4}$$

Стандартной операцией является умножение обеих частей уравнения нутации (1.4) на $\sin^2\theta$ и замена переменной θ на x согласно

$$\cos\theta = x.$$

В этом случае

$$\frac{I_1'}{2}\,\dot x^{\,2} = \epsilon(x), \tag{1.5}$$

где функция $\epsilon(x)$ есть

$$\epsilon(x) = \mu gl\,x^3 - \left(E - \frac{M_3^2}{2I_3} + \frac{M_3^2}{2I_1'}\right)x^2 + \left(\frac{M_zM_3}{I_1'} - \mu gl\right)x + \left(E - \frac{M_3^2}{2I_3} - \frac{M_z^2}{2I_1'}\right). \tag{1.6}$$

Перепишем полином в правой части (1.6), переобозначив

$$E - \frac{M_3^2}{2I_3} + \frac{M_3^2}{2I_1'} = b, \tag{1.7}$$

$$\frac{M_zM_3}{I_1'} - \mu gl = c, \tag{1.8}$$

$$E - \frac{M_3^2}{2I_3} - \frac{M_z^2}{2I_1'} = d. \tag{1.9}$$

Получим

$$\epsilon(x) = \mu gl\,x^3 - b\,x^2 + c\,x + d. \tag{1.10}$$

Полином $\epsilon\,(x)$ можно разложить на множители. Учитывая, что коэффициент при старшем члене есть $\mu g l$, получим

$$\epsilon(x) = \mu g l\,(x - x_1)(x_2 - x)(x_3 - x), \qquad x_2 > x_1, \quad x_3 > x_2, \tag{1.11}$$

где x_1, x_2, x_3 являются корнями. Корни этого полинома мы найдем далее.

Далее подставляют (1.11) в (1.5), извлекают квадратный корень и разделяют переменные

$$\sqrt{\frac{2\mu g l}{I_1'}}\; dt = \frac{du}{\sqrt{(x - x_1)(x_2 - x)(x_3 - x)}}.$$

Затем совершают вторую замену:

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)p^2. \tag{1.12}$$

При этом (1.5) сведется к виду

$$\sqrt{\frac{2\mu g l}{I_1'}}\; dt = \frac{2dp}{\sqrt{1 - p^2}\;\sqrt{(x_3 - x_1) - (x_2 - x_1)p^2}}.$$

Далее умножают обе части этого уравнения на величину $\sqrt{x_3 - x_1}/2$, обозначают

$$\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = k^2, \tag{1.13}$$

делают последнюю замену переменной согласно равенству

$$p = \sin\Phi \tag{1.14}$$

и интегрируют. После интегрирования в правой части равенства получается эллиптический интеграл первого рода. Левую же часть обозначим как $\phi^*/2$, а начало отсчета времени выберем так, чтобы постоянная интегрирования равнялась нулю. Таким образом, получим

$$\frac{\phi^*}{2} = F(k, \Phi), \tag{1.15}$$

где

$$\phi^* = \omega^*\, t, \tag{1.16}$$

а

$$\omega^* = \sqrt{\frac{2\mu g l\,(x_3 - x_1)}{I_1'}}. \tag{1.17}$$

Решение уравнения (1.15) записывают в виде

$$\Phi = \mathrm{am}_k\,\frac{\phi^*}{2} \tag{1.18}$$

и называют функцией амплитуды модуля k. Равенство (1.12) с учетом (1.14) имеет вид

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)\,\sin^2\Phi, \tag{1.19}$$

где Φ есть (1.18) и является общим решением движения оси нутации методом Лагранжа.

§ 2. Малая нутация с точки зрения точной теории

Мы утверждаем, что справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* b, c, d *определены с помощью равенств* (1.7)–(1.9) *и* D, ϵ, a *есть соответственно*

$$D = \sqrt{b^2 - 3\mu gl\, c}, \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned}\epsilon &= \frac{3b^2D - D^3 - 2b^3}{27(\mu gl)^2} + \frac{c(b-D)}{3\mu gl} + d = \\ &= \frac{bc}{3\mu gl} + d - \frac{2b^3}{27(\mu gl)^2} + \left[\frac{2b^2}{27(\mu gl)^2} - \frac{2c}{9\mu gl}\right] D,\end{aligned} \tag{2.2}$$

$$a = \sqrt{\frac{\epsilon}{D}}. \tag{2.3}$$

Тогда для достаточно малой $\epsilon > 0$ *закон движения* (1.19)*, будучи разложен в ряд по степеням* a*, имеет вид*

$$x = x_0 + x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)} + \ldots, \tag{2.4}$$

где

$$x_0 = \frac{1}{3\mu gl}\,(b - D), \tag{2.5}$$

$$x^{(1)} = -\, a\, \cos\phi, \tag{2.6}$$

$$x^{(2)} = \frac{3 - \cos 2\phi}{4}\; a^2\, \frac{\mu gl}{D}, \tag{2.7}$$

$$x^{(3)} = -\frac{3\cos 3\phi + 37\cos\phi}{64}\; a^3\, \frac{(\mu gl)^2}{D^2}. \tag{2.8}$$

причем $\phi = \omega\, t$, *и*

$$\omega = \left[1 - \frac{15}{16}\, a^2\, \frac{(\mu gl)^2}{D^2}\right] \sqrt{\frac{2D}{I_1'}}. \tag{2.9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства преобразуем представление решения (1.19) к виду, в котором заданы не границы колебаний x_1 и x_2, а средняя точка между ними и амплитуда колебаний. Для этого воспользуемся известной тригонометрической формулой понижения степени. Получим

$$x = \frac{x_2 + x_1}{2} - \frac{x_2 - x_1}{2}\, \cos 2\Phi. \tag{2.10}$$

Дальнейшее изложение требует вычисления корней x_1, x_2, x_3 кубического полинома (1.10). Уравнение

$$\epsilon(x) = \mu gl\, x^3 - b\, x^2 + c\, x + d = 0 \tag{2.11}$$

имеет простое аналитическое решение в том случае, если два корня этого уравнения — x_1 и x_2 — близки друг к другу. В области действительного движения функция $\epsilon(x)$ в уравнении (1.5) должна быть больше нуля. Это означает, что функция кинетической энергии ϵ между точками поворота x_1 и x_2 имеет максимум. Согласно известной процедуре для того, чтобы вычислить, при какой координате $x = x_0$ имеется этот максимум, надо найти производную правой части (1.10) и решить соответствующее квадратное уравнение:

$$3\mu gl\, x_0^2 - 2b\, x_0 + c = 0.$$

Это уравнение имеет корень

$$x_0 = \frac{1}{3\mu g l}\,(b \pm D),$$

где D удовлетворяет равенству (2.1), причем подкоренное выражение должно быть больше нуля; только в этом случае кубический полином имеет экстремум.

Выберем теперь начало координат в точке максимума этого полинома, то есть сделаем замену

$$x = x_0 + x_v. \tag{2.12}$$

Подставляя (2.12) в уравнение (2.11) и учитывая при этом соотношение (2.5), в результате получим, что

$$\epsilon\,(x) = \epsilon \pm D\; x_v^2 + \mu g l\, x_v^3. \tag{2.13}$$

Отсюда видно, что для того, чтобы существовало колебательное движение, для точки максимума правильный знак является нижним; только в этом случае функция $\epsilon\,(x)$ при некоторых x_v принимает значение, равное нулю. Вычисление ϵ с учетом (2.5) приводит к выражению (2.2). Величину ϵ назовем *квазиэнергией нутации*. Эта величина должна быть малой для того, чтобы нутация гироскопа была мала и была применима теория малых колебаний. Определим величину a с помощью (2.3). Тогда уравнение (2.13) примет вид

$$\epsilon(x) = D\left(a^2 - x_v^2 + \frac{\mu g l}{D}\; x_v^3\right) = 0.$$

Корни трехчлена в правой части этого равенства можно вычислить, считая, что в нулевом приближении они равны $x_{v1,2} = \pm\, a$. Точная оценка методом последовательных приближений с точностью до третьих степеней по a дает

$$x_{v1} = -\,a + a^2\frac{\mu g l}{2D} - \frac{5}{8}\;a^3\,\frac{(\mu g l)^2}{D^2} + o\,(a^3),$$

$$x_{v2} = a + a^2\frac{\mu g l}{2D} + \frac{5}{8}\;a^3\,\frac{(\mu g l)^2}{D^2} + o\,(a^3),$$

$$x_{v3} = \frac{D}{\mu g l} - a^2\frac{\mu g l}{D} + o\,(a^3).$$

Поэтому

$$x_1 = x_0 - a + \frac{1}{2}\;a^2\,\frac{\mu g l}{D} - \frac{5}{8}\;a^3\,\frac{(\mu g l)^2}{D^2} + o\,(a^3),$$

$$x_2 = x_0 + a + \frac{1}{2}\;a^2\,\frac{\mu g l}{D} + \frac{5}{8}\;a^3\,\frac{(\mu g l)^2}{D^2} + o\,(a^3),$$

$$x_3 = x_0 + \frac{D}{\mu g l} - a^2\,\frac{\mu g l}{D} + o\,(a^3).$$

При этом линейные комбинации корней, входящих в (2.10), есть

$$\frac{x_2 - x_1}{2} = a + \frac{5}{8}\;a^3\,\frac{(\mu g l)^2}{D^2} + o\,(a^3), \tag{2.14}$$

$$\frac{x_2 + x_1}{2} = x_0 + \frac{1}{2}\;a^2\,\frac{\mu g l}{D} + o\,(a^3). \tag{2.15}$$

Найдем теперь отношение $(x_2 - x_1)/(x_3 - x_1)$. Подставляя значения корней, ограничимся при этом лишь поправками второго порядка по a. Получим

$$\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = k^2 = 2\,\frac{\mu g l}{D}\;a - 2\,\frac{(\mu g l)^2}{D^2}\;a^2 + o\,(a^2). \tag{2.16}$$

Вычислим еще значение корня $\sqrt{x_3 - x_1}$:

$$\sqrt{x_3 - x_1} = \sqrt{\frac{D}{\mu gl}} \sqrt{1 + a\,\frac{\mu gl}{D} - \frac{3}{2}\,a^2\,\frac{(\mu gl)^2}{D^2}} = \\ = \sqrt{\frac{D}{\mu gl}} \left[1 + \frac{1}{2}\,a\,\frac{\mu gl}{D} - \frac{7}{8}\,a^2\,\frac{(\mu gl)^2}{D^2} + o\left(a^2\right)\right]. \tag{2.17}$$

Нас интересует разложение закона движения оси $x(t)$ до членов третьего порядка по a включительно. Для этого необходимо решить уравнение (1.15) относительно Φ. Это можно сделать в том случае, если модуль амплитуды мал. Соответствующее решение записывается в виде ряда. Найдем требуемую точность разложения. Из определения $(x_2 - x_1)/2$ видно, что эта величина как раз является амплитудой колебаний и, с другой стороны, равна в основном a (см. (2.14)), поэтому Φ в (2.10) можно вычислить с точностью всего лишь до квадрата амплитуды a включительно. С другой стороны, из (1.13) видно, что k^2 есть величина, пропорциональная амплитуде. Следовательно, в свою очередь, амплитуда нутации является величиной порядка k^2. Поэтому требуемой точностью при вычислении Φ является четвертая степень k включительно. Учитывая это обстоятельство, разложим определение эллиптического интеграла

$$F(k, \Phi) = \int_0^{\Phi} \frac{d\Phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\Phi}}$$

в ряд по степеням k и проинтегрируем. С точностью до k^4 включительно получим, что

$$F(k, \Phi) = \int_0^{\Phi} \left(1 + \frac{k^2}{2}\,\sin^2\Phi + \frac{3k^4}{8}\,\sin^4\Phi\right) d\Phi = \left(1 + \frac{k^2}{4} + \frac{9k^4}{64}\right)\Phi - \\ - \left(\frac{k^2}{8} + \frac{3k^4}{32}\right)\sin 2\Phi + \frac{3k^4}{256}\,\sin 4\Phi = \frac{\phi^*}{2}.$$

Поделим это равенство на $(1 + k^2/4 + 9k^4/64)$. Учитывая, что

$$\frac{\phi^*}{1 + k^2/4 + 9k^4/64} = \left(1 - \frac{k^2}{4} - \frac{5k^4}{64} + o\left(k^4\right)\right)\phi^*,$$

обозначим

$$\left(1 - \frac{k^2}{4} - \frac{5k^4}{64}\right)\phi^* = \phi. \tag{2.18}$$

Тогда получим следующее уравнение:

$$\Phi - \left(\frac{k^2}{8} + \frac{k^4}{16}\right)\sin 2\Phi + \frac{3k^4}{256}\,\sin 4\Phi = \frac{\phi}{2}. \tag{2.19}$$

Его решение будем искать в виде

$$\Phi = \frac{\phi}{2} + \eta\sin\phi + \zeta\sin 2\phi.$$

Тогда

$$\sin 2\Phi = \sin\left(\phi + 2\eta\sin\phi\right) = \sin\phi + 2\eta\sin\phi\cos\phi = \sin\phi + \eta\sin 2\phi,$$

$$\sin 4\Phi = \sin 2\phi.$$

Подставив три последних уравнения в (2.19), найдем, что

$$\eta = \frac{k^2}{8} + \frac{k^4}{16},$$

$$\zeta = \frac{k^4}{256}$$

и, следовательно,

$$2\Phi = 2\,\mathrm{am}_k\,\frac{\phi^*}{2} = \phi + \left(\frac{k^2}{4} + \frac{k^4}{8}\right)\sin\phi + \frac{k^4}{128}\,\sin 2\phi.$$

Поэтому

$$\cos 2\Phi = \cos\phi - k^2\,\frac{\sin^2\phi}{4} - k^4\left(\frac{\sin^2\phi}{8} + \frac{3\sin 2\phi\,\sin\phi}{128}\right), \tag{2.20}$$

где ϕ определяется из (2.18). Подставим сейчас в (2.20) соотношение (2.16). Получим

$$\cos 2\Phi = \cos\phi - \frac{1}{2}\,a\,\frac{\mu g l}{D}\,\sin^2\phi - \frac{3}{64}\,a^2\,\frac{(\mu g l)^2}{D^2}\,(\cos\phi - \cos 3\phi). \tag{2.21}$$

Подстановка (2.21) и равенств (2.14), (2.15) в (2.10) дает (2.4)–(2.8).

Таким образом, для полного доказательства теоремы остается только вычислить значение частоты малых колебаний ω. Из соотношения (2.21) видно, что основной частью разложения $\cos 2\Phi$ по степеням амплитуды является главная гармоника $\cos\phi$. Причем из (2.18) очевидно, что фаза ϕ этой гармоники отличается от фазы ϕ^* в (1.16). Подставим в (2.18) равенства $\phi = \omega t$, $\phi^* = \omega^* t$. Получим, сокращая на t, что

$$\omega = \left(1 - \frac{k^2}{4} - \frac{5k^4}{64}\right)\omega^*$$

или, учитывая (2.16),

$$\omega = \left[1 - \frac{1}{2}\,a\,\frac{\mu g l}{D} + \frac{3}{16}\,a^2\,\frac{(\mu g l)^2}{D^2}\right]\omega^*. \tag{2.22}$$

Подставим теперь равенство (2.17) в (1.17). Получим, что

$$\omega^* = \omega_0\left[1 + \frac{1}{2}\,\frac{\mu g l}{D}\,a - \frac{7}{8}\,\frac{(\mu g l)^2}{D^2}\,a^2 + o\left(a^2\right)\right], \tag{2.23}$$

где

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2D}{I_1'}}. \tag{2.24}$$

Наконец, подставив (2.23) в (2.22), окончательно получим искомое равенство (2.9). □

Из (2.9) очевидно, что поправка к основной частоте, пропорциональная квадрату амплитуды колебания, равна

$$\omega^{(2)} = -\frac{15}{16}\,a^2\,\frac{(\mu g l)^2}{D^2}\,\omega_0. \tag{2.25}$$

Это равенство означает, что частота нутации уменьшается с увеличением амплитуды по квадратичному закону. При этом ω_0 является частотой колебаний оси с бесконечно малой амплитудой. Подставляя в (2.24) значение D из (2.1), где учтено определение b и c из (1.7), (1.8), получим величину частоты «нулевой» нутации:

$$\omega_0 = \sqrt[4]{\frac{4}{I_1'^2}\left[\left(E - \frac{M_3^2}{2I_3} + \frac{M_3^2}{2I_1'}\right)^2 - 3\mu g l\left(\frac{M_z M_3}{I_1'} - \mu g l\right)\right]}. \tag{2.26}$$

§ 3. Малая нутация с точки зрения существующей теории колебаний

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. *Нутацию оси симметричного гироскопа в поле сил тяжести в координате x_v можно представить как движение материальной точки единичной массы в эффективном поле с потенциальной энергией, изменяющейся с расстоянием по закону*

$$U(x_v) = \frac{1}{2}\,\omega_0^2\,x_v^2 - \frac{1}{2}\,\omega_0^2\,\frac{\mu g l}{D}\,x_v^3. \tag{3.1}$$

Доказательство. Функция $\epsilon(x)$ (1.6) имеет сложный вид. Финитное движение в таком поле, как известно, является колебательным. Каждое колебательное движение в природе обладает своей энергией колебаний. Поэтому у гироскопа должна существовать функция постоянных его движения, которую можно формально назвать его квазиэнергией нутации ϵ. Действительно, подставим (2.13) в (1.5). Получим

$$\frac{I_1'}{2}\,\dot{x}_v^{\,2} = \epsilon - D\,x_v^2 + \mu g l\,x_v^3.$$

Из этого уравнения видно, что квазиэнергией нутации является величина ϵ из (2.2). Название определяется тем обстоятельством, что нулевой энергии нутации $\epsilon = 0$ соответствует отсутствие колебаний — решение $x_v = 0$. Поэтому точка $x = x_0$ является постоянной координатой регулярно движущегося гироскопа.

После деления на I_1', учета (2.24) и переноса членов, содержащих координату x_v, в левую часть получим

$$\frac{\dot{x}_v^2}{2} + \frac{1}{2}\,\omega_0^2\,x_v^2 - \frac{1}{2}\,\omega_0^2\,\frac{\mu g l}{D}\,x_v^3 = \frac{\epsilon}{I_1'}.$$

Это уравнение выражает собой закон сохранения энергии для системы, имеющей функцию Лагранжа вида

$$L = \frac{\dot{x}_v^2}{2} - \frac{1}{2}\,\omega_0^2\,x_v^2 + \frac{1}{2}\,\omega_0^2\,\frac{\mu g l}{D}\,x_v^3. \tag{3.2}$$

Функция Лагранжа простого вида (3.2) является частным случаем функции, использованной в теории ангармонических колебаний [18, п. 28, (28.8)]:

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{m\,\omega_0^2}{2}\,x^2 - \frac{m\alpha}{3}\,x^3 - \frac{m\,\beta}{4}\,x^4. \tag{3.3}$$

Сравнивая между собой (3.2) и (3.3), получаем, что ($m = 1$)

$$\alpha = -\frac{3}{2}\,\omega_0^2\,\frac{\mu g l}{D}, \tag{3.4}$$

$$\beta = 0. \tag{3.5}$$

При этом величина ω_0^2 является коэффициентом «жесткости» этого поля. □

Вышеприведенное утверждение, если полагать существующую одномерную теорию колебаний истинной, имеет простое следствие.

Следствие 1. *Решение уравнения движения в форме Лагранжа для нутации оси гироскопа имеет вид* (2.4)*, где $x^{(1)}$ есть с точностью до знака* (2.6)*, $x^{(2)}$ удовлетворяет равенству* (2.7)*, а $x^{(3)}$ равно*

$$x^{(3)} = -\frac{3\cos 3\phi}{64}\,a^3\,\frac{(\mu g l)^2}{D^2}. \tag{3.6}$$

Доказательство. Формулы (3.4), (3.5) позволяют использовать результаты теории ангармонических колебаний, а именно формулы (28.12), (28.13) в [18]:

$$x^{(2)} = -\frac{\alpha a^2}{2\omega_0^2} + \frac{\alpha a^2}{6\omega_0^2}\cos 2\omega t,$$

$$\omega^{(2)} = \left(\frac{3\beta}{8\omega_0} - \frac{5\alpha^2}{12\omega_0^3}\right) a^2.$$

Подставляя (3.4), (3.5) в эти равенства, мы получим, что они переходят соответственно в равенства (2.7), (2.25). При этом формула (28.10) учебника [18] —

$$x^{(1)} = a\,\cos\phi$$

— совпадает с формулой (2.6), если учесть, что фаза, определенная в [18], и фаза ϕ в этой статье отличаются друг от друга на π. Подставляя же (3.4), (3.5) в комбинационное колебание третьего порядка (формула (28.14)):

$$x^{(3)} = \frac{a^3}{16\omega_0^2}\left(\frac{\alpha^2}{3\omega_0^2} + \frac{\beta}{2}\right)\cos 3\omega t$$

мы получим, что это колебание соответствует только первому слагаемому в множителе $3\cos 3\phi + 37\cos\phi$ в (2.8), второе же слагаемое не учитывается общей теорией вообще. □

Сравнивая (3.6) с (2.8), можно сделать вывод, что в задаче о нутации оси симметрии гироскопа в поле сил тяжести существующая теория колебаний является точной для поправок, пропорциональных квадрату амплитуды, но при вычислении ангармонических колебаний третьего порядка она терпит неудачу.

Заключение

В § 2 данной статьи, исходя из точного закона движения, был вычислен в третьем приближении по амплитуде приближенный закон малой нутации (2.4)–(2.8) оси симметрии гироскопа. Оказалось, что амплитуда нутации есть (2.3), где квазиэнергия колебания ϵ удовлетворяет равенству (2.2). В том же случае, если гироскоп движется регулярно, частота «нулевой» нутации есть (2.26).

Другая точка зрения на нутацию основывается на том, что движение оси симметрии гироскопа можно представить в координате косинуса угла нутации как колебания точки единичной массы в поле с потенциальной энергией (3.1). Это позволяет использовать результаты теории колебаний и вычислить комбинационные колебания высших порядков. При этом оказалось, что теория ангармонических колебаний испытывает затруднение при вычислении колебания третьего порядка (§ 3). Объяснение этой неудачи будет дано в следующей статье. Скажем здесь только, что это обстоятельство не случайно и общая теория одномерных свободных колебаний требует некоторого уточнения, впрочем незначительного.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика твердого тела. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.
2. Veljović L., Milosavljević D., Bogdanović G., Radaković A., Lazić M. Nonlinear dynamics of heavy gyro rotors // Mobility and Vehicle Mechanics. 2012. Vol. 38. No. 3. P. 27–40. http://www.mvm.fink.rs/Journal/Archive/2012/2012V38N3.html

3. Veljović L. History and present of gyroscope models and vector rotators // Scientific Technical Review. 2010. Vol. 60. № 3–4. P. 101–111. http://www.vti.mod.gov.rs/ntp/rad2010/34-10/12/e12.htm
4. Hedrih K. R., Veljović L. Vector rotators of rigid body dynamics with coupled rotations around axes without intersection // Mathematical Problems in Engineering. 2011. Vol. 2011. P. 1–26. https://doi.org/10.1155/2011/351269
5. Gorelov V. I., Golosov P. E., Karelova O. L., Tretyakov N. P. The challenge of climate change // Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем: материалы Всероссийской конференции. РУДН. Москва, 2019. С. 414. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=39207988
6. Nagem R. J., Sandri G. On special forms of motion of the heavy symmetric top, particularly pseudoregular precession, and on the stability of motion // The Theory of the Top. Vol. II. Boston: Birkhäuser, 2010. P. 279–391. https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4827-5_2
7. Амелькин Н. И. Динамика твердого тела. М.: МФТИ, 2010.
8. Голдстейн Г., Пул Ч., Сафко Дж. Классическая механика. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевский институт компьютерных исследований, 2012.
9. Черноусько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Лещенко Д. Д. Эволюция движений твердого тела относительно центра масс. М.–Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований, 2015.
10. Поляхов Н. Н., Зегжда С. А., Юшков М. П. Теоретическая механика. М.: Юрайт, 2015.
11. Вильке В. Г. Механика систем материальных точек и твердых тел. М.: Физматлит, 2013.
12. Вильке В. Г. Теоретическая механика. М.: Юрайт, 2020.
13. Быков В. Г., Товстик П. Е. Об устойчивости псевдорегулярной прецессии гибкого ротора при ограниченном возбуждении // Седьмые Поляховские чтения. Международная научная конференция по механике. Санкт-Петербург, 2015. С. 196.
14. Акуленко Л. Д., Лещенко Д. Д., Козаченко Т. А. Эволюция вращений волчка Лагранжа, близких к псевдорегулярной прецессии // Вестник Запорожского национального университета. Физико-математические науки. 2015. № 2. С. 10–19.
15. Козаченко Т. А. Динамика вращающегося твердого тела, близких к псевдорегулярной прецессии // Вестник Одесской государственной академии строительства и архитектуры. 2017. № 68. С. 39–44.
16. Муницына М. А. О переходных процессах в динамике эллипсоида вращения на плоскости с трением // Изв. РАН. МТТ. 2019. № 3. С. 69–75. https://doi.org/10.1134/S0572329919020107
17. Bhattacharjee S. Rotating frame analysis of rigid body dynamics in space phasor variables // American Journal of Physics. 2013. Vol. 81. No. 7. P. 518–526. https://doi.org/10.1119/1.4803531
18. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. М.: Наука, 2012.

Поступила в редакцию 18.06.2020

Войтик Виталий Викторович, к. ф.-м. н., доцент, Башкирский государственный медицинский университет, 450008, Россия, г. Уфа, ул. Ленина, 3а.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9854-4089
E-mail: voytik1@yandex.ru

Мигранов Наиль Галиханович, д. ф.-м. н., профессор, Башкирский государственный медицинский университет, 450008, Россия, г. Уфа, ул. Ленина, 3а.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7993-701X
E-mail: ufangm@yandex.ru

Цитирование: В. В. Войтик, Н. Г. Мигранов. Малая нутация симметричного гироскопа: две точки зрения // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2021. Т. 31. Вып. 1. С. 89–101.

V. V. Voytik, N. G. Migranov

Small nutation of a symmetic gyroscope: two viewpoints

Keywords: unbalanced gyroscope, pseudo-regular rotation, small nutation, anharmonic oscillations.

MSC2020: 42A10, 70E17

DOI: 10.35634/vm210107

The paper is devoted to the small nutation of an axisymmetric gyroscope in the field of gravity. The expansion of the known solution of the nutation equation as a function of time in powers of the amplitude is obtained. In this case, the frequencies of third order Raman oscillations are both the tripled frequency and the frequency coinciding with the initial one. A formula is found for the nutation amplitude as a function of the integrals of the gyroscope motion. The frequency of zero nutation is also calculated. Another way to obtain the decomposition is to use the results of the general theory of free one-dimensional oscillations. This method is based on the ability to represent the gyro nutation as the movement of a material point of unit mass in a field that cubically-quadratically depends on the coordinate. In this case the only frequency of the third-order Raman oscillation is a triple of the original frequency. Thus, both methods give the same result only for oscillations no higher than second order. In the third approximation, the existing theory of oscillations is insufficient.

REFERENCES

1. Borisov A. V., Mamaev I. S. *Rigid body dynamics*, De Gruyter, 2019. https://doi.org/10.1515/9783110544442
2. Veljović L., Milosavljević D., Bogdanović G., Radaković A., Lazić M. Nonlinear dynamics of heavy gyro rotors, *Mobility and Vehicle Mechanics*, 2012, vol. 38, no. 3, pp. 27–40. http://www.mvm.fink.rs/Journal/Archive/2012/2012V38N3.html
3. Veljović L. History and present of gyroscope models and vector rotators, *Scientific Technical Review*, 2010, vol. 60, no. 3–4, pp. 101–111. http://www.vti.mod.gov.rs/ntp/rad2010/34-10/12/e12.htm
4. Hedrih K. R., Veljović L. Vector rotators of rigid body dynamics with coupled rotations around axes without intersection, *Mathematical Problems in Engineering*, 2011, vol. 2011, pp. 1–26. https://doi.org/10.1155/2011/351269
5. Gorelov V. I., Golosov P. E., Karelova O. L., Tretyakov N. P. The challenge of climate change, *Informatsionno-telekommunikatsionnye Tekhnologii i Matematicheskoe Modelirovanie Vysokotekhnologichnykh Sistem: materialy Vserossiiskoi Konferentsii* (Information and Telecommunication Technologies and Mathematical Modeling of High-Tech Systems: Proc. of the All-Russian Conference), Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, 2019, p. 414. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=39207988
6. Nagem R. J., Sandri G. On special forms of motion of the heavy symmetric top, particularly pseudoregular precession, and on the stability of motion, *The Theory of the Top. Vol. II*, Boston: Birkhäuser, 2010, pp. 279–391. https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4827-5_2
7. Amel'kin N. I. *Dinamika tverdogo tela* (Solid dynamics), Moscow: Moscow Institute of Physics and Technology, 2010.
8. Goldstein H., Poole Ch., Safko J. *Classical mechanics*, San Francisco: Addison Wesley, 2002.
9. Chernousko F. L., Akulenko L. D., Leshchenko D. D. *Evolution of motions of a rigid body about its center of mass*, Cham: Springer, 2017. https://doi.org/10.1007/978-3-319-53928-7
10. Polyakhov N. N., Zegzhda S. A., Yushkov M. P. *Teoreticheskaya mekhanika* (Theoretical mechanics), Moscow: Yurait, 2015.
11. Vil'ke V. G. *Mekhanika sistem material'nykh tochek i tverdykh tel* (Mechanics of systems of material points and solids), Moscow: Fizmatlit, 2013.
12. Vil'ke V. G. *Teoreticheskaya mekhanika* (Theoretical mechanics), Moscow: Yurait, 2020.

13. Bykov V. G., Tovstik P. E. On the stability of the pseudo-regular precession of a flexible rotor with limited excitation, *Sed'mye Polyakhovskie Chteniya: tez. Mezhdunarodnoi Nauchnoi Konferentsii po Mekhanike* (Seventh Polyakhovsky Readings: Abstracts of International Scientific Conference on Mechanics), Saint Petersburg, 2015, p. 196 (in Russian).
14. Akulenko L. D., Leshchenko D. D., Kozachenko T. A. Evolution of rotation of the Lagrange top, close to pseudoregular precession, *Vestnik Zaporozhskogo Natsional'nogo Universiteta. Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2015, no. 2, pp. 10–19 (in Russian).
15. Kozachenko T. A. Dynamics of rotations of a rigid body similar to pseudoregular precession, *Vestnik Odesskoi Gosudarstvennoi Akademii Stroitel'stva i Arkhitektury*, 2017, no. 68, pp. 39–44 (in Russian).
16. Munitsyna M. A. On transients in the dynamics of an ellipsoid of revolution on a plane with friction, *Mechanics of Solids*, 2019, vol. 54, no. 4, pp. 545–550. https://doi.org/10.3103/S0025654419040071
17. Bhattacharjee S. Rotating frame analysis of rigid body dynamics in space phasor variables, *American Journal of Physics*, 2013, vol. 81, no. 7, pp. 518–526. https://doi.org/10.1119/1.4803531
18. Landau L. D., Lifshitz E. M. *Mechanics*, Oxford: Butterworth Heinemann, 2002.

Received 18.06.2020

Voytik Vitaliy Viktorovich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Bashkir State Medical University, ul. Lenina, 3a, Ufa, 450008, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9854-4089
E-mail: voytik1@yandex.ru

Migranov Nail' Galikhanovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Bashkir State Medical University, ul. Lenina, 3a, Ufa, 450008, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7993-701X
E-mail: ufangm@yandex.ru

Citation: V. V. Voytik, N. G. Migranov. Small nutation of a symmetic gyroscope: two viewpoints, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2021, vol. 31, issue 1, pp. 89–101.