МАТЕМАТИКА 2021. Т. 31. Вып. 1. С. 59–69.

УДК 517.926

© *А. Х. Сташ*

ОБ ОТСУТСТВИИ СВОЙСТВА ОСТАТОЧНОСТИ У СИЛЬНЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ КОЛЕБЛЕМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

В данной работе исследуются различные разновидности показателей колеблемости (верхние или нижние, сильные или слабые) нулей, корней, гиперкорней, строгих и нестрогих знаков ненулевых решений линейных однородных дифференциальных систем на положительной полуоси. На множестве ненулевых решений систем установлены соотношения между этими показателями колеблемости. Доказано, что все сильные показатели колеблемости (в отличие от частот Сергеева смен знаков, нулей и корней, а также всех слабых показателей колеблемости), рассматриваемые как функции на множестве решений линейных однородных дифференциальных систем с непрерывными на полуоси коэффициентами, не являются остаточными (т. е. могут меняться при изменении решения на конечном отрезке). Кроме того, при любом наперед заданном натуральном $n \geqslant 2$ приводится пример n-мерной дифференциальной системы, у которой все сильные показатели колеблемости некоторого решения не совпадают с соответствующими слабыми показателями. При этом все слабые и все сильные показатели на выбранном решении совпадают соответственно между собой. При доказательстве результатов настоящей работы отдельно рассмотрены случаи четности и нечетности n.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, линейные системы, колеблемость, число нулей, показатели колеблемости, частоты Сергеева.

DOI: 10.35634/vm210105

Введение

В работах [1–3] И. Н. Сергеева на полупрямой вводились и исследовались различные характеристики ляпуновского типа ненулевых решений линейных дифференциальных уравнений и систем. Эти характеристики отвечают за колеблемость, вращаемость и блуждаемость решения. В 2015 году в статье [4] были систематизированы все введенные И. Н. Сергеевым к настоящему моменту характеристики ляпуновского типа, что привело к изменению названий некоторых из них. В частности, полные и векторные частоты переименованы соответственно в сильные и слабые показатели колеблемости [5–8]. В работах [9–13] характеристические показатели [1, 14] стали называться частотами Сергеева.

Данная работа посвящена изучению сильных и слабых показателей колеблемости ненулевых решений линейных однородных дифференциальных систем. Важным свойством этих характеристик, призванным облегчить их исследование, является остаточность [15], т. е. инвариантность относительно изменения решения на любом конечном отрезке. Слабые показатели колеблемости любых решений, как оказалось [2], всегда совпадают с их показателями блуждаемости, которые являются остаточными. Для решений линейных однородных уравнений первого порядка все показатели колеблемости равны нулю, так как эти решения не имеют нулей, а для всех решений любого уравнения второго порядка все верхние (как и все нижние) показатели равны между собой [3]. Следовательно, на множестве решений уравнений первого и второго порядков наблюдается остаточность всех показателей колеблемости.

На множестве решений линейных однородных дифференциальных уравнений все частоты Сергеева являются остаточными [1]. Доказательства совпадения соответствующих сильных и слабых показателей колеблемости на множестве автономных систем можно найти в работах [16,17]. В [18] доказано отсутствие свойства остаточности у сильных показателей колеблемости гиперкорней на множестве решений двумерных дифференциальных систем, а также приводится пример двумерной системы, для некоторого решения которой сильный и слабый показатели колеблемости гиперкорней не совпадают. Этот результат в [19] был распространен и на n-мерный случай. Справедливость указанных свойств для сильных показателей колеблемости знаков, нулей и корней на множестве решений двумерных дифференциальных систем был установлен в работе [20]. В настоящей работе эти свойства для всех сильных показателей перенесены на n-мерный случай.

§ 1. Основные обозначения и определения

Для заданного $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $\mathcal{M}^n$ множество линейных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0; +\infty),$$

с *непрерывными* оператор-функциями $A\colon \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End} \mathbb{R}^n$ (каждую из которых будем отождествлять с соответствующей системой). Через $\mathcal{S}_*(A)$ обозначим множество всех ненулевых решений системы $A \in \mathcal{M}^n$. Далее, звездочкой снизу будем помечать любое линейное пространство, в котором выколот нуль. Положим

$$\mathcal{S}_*^n = \bigcup_{A \in \mathcal{M}^n} \mathcal{S}_*(A).$$

Определение 1 (см. [1]). Скажем, что в точке $t > 0$ происходит *строгая* (*нестрогая*) *смена знака* функции $y\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, если в любой окрестности этой точки функция y принимает как положительные (неотрицательные), так и отрицательные (неположительные) значения.

Определение 2 (см. [1,2]). Для момента $t > 0$ и функции $y\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ введем следующие обозначения:

$\nu^-(y,t)$ — число точек ее *строгой смены знака* на промежутке $(0,t]$;

$\nu^\sim(y,t)$ — число точек ее *нестрогой смены знака* на промежутке $(0,t]$;

$\nu^0(y,t)$ — число ее *нулей* на промежутке $(0,t]$;

$\nu^+(y,t)$ — число ее *корней* (т. е. нулей с учетом их *кратности*) на промежутке $(0,t]$;

$\nu^*(y,t)$ — число ее *гиперкратных корней* на промежутке $(0,t]$: при его подсчете каждый некратный корень берется ровно один раз, а кратный — бесконечно много раз.

Далее, для ненулевого вектора $m \in \mathbb{R}^n_*$ и вектор-функции $x \in \mathcal{S}^n_*$ введем обозначение $\nu^\alpha(x,m,t) \equiv \nu^\alpha(\langle x,m\rangle,t)$, где $\alpha \in \{-,\sim,0,+,*\}$, $\langle x(\cdot),m\rangle$ — скалярное произведение.

Определение 3 (см. [2–4]). *Верхние* (*нижние*) *сильный* и *слабый показатели колеблемости знаков, нулей, корней* и *гиперкорней* функции $x \in \mathcal{S}^n_*$ при $\alpha \in \{-,\sim,0,+,*\}$ соответственно зададим формулами

$$\hat{\nu}^\alpha_\bullet(x) \equiv \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(x,m,t) \quad \Big(\check{\nu}^\alpha_\bullet(x) \equiv \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \underline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(x,m,t)\Big),$$
$$\hat{\nu}^\alpha_\circ(x) \equiv \overline{\lim_{t\to\infty}} \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(x,m,t) \quad \Big(\check{\nu}^\alpha_\circ(x) \equiv \underline{\lim_{t\to\infty}} \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(x,m,t)\Big).$$

В случае совпадения сильного или слабого верхнего показателя колеблемости решения x с одноименным нижним будем называть его *точным* и обозначать как $\nu^\alpha_\bullet(x)$ или $\nu^\alpha_\circ(x)$.

Определение 4 (см. [5]). Для заданных множеств M и $F = \{f\colon \mathbb{R}_+ \to M\}$ назовем функцию $\lambda\colon F \to \mathbb{R}$ *остаточной*, если для любых функций $f, g \in F$, удовлетворяющих хотя бы для одного $t_0 \in \mathbb{R}_+$ условию $f(t) = g(t)$ при всех $t \geqslant t_0$, имеет место равенство $\lambda(f) = \lambda(g)$.

§ 2. Формулировка результатов

Теорема 1. *При любом $n \geqslant 2$ найдется вектор-функция $x \in \mathcal{S}^n_*$, удовлетворяющая условию*

$$\nu^-_\circ(x) = \nu^\sim_\circ(x) = \nu^0_\circ(x) = \nu^+_\circ(x) = \nu^*_\circ(x) < \nu^-_\bullet(x) = \nu^\sim_\bullet(x) = \nu^0_\bullet(x) = \nu^+_\bullet(x) = \nu^*_\bullet(x).$$

Теорема 2. *При любом $n \geqslant 2$ ни одна из функций*

$$\hat{\nu}^-_\bullet, \check{\nu}^-_\bullet, \hat{\nu}^\sim_\bullet, \check{\nu}^\sim_\bullet, \hat{\nu}^0_\bullet, \check{\nu}^0_\bullet, \hat{\nu}^+_\bullet, \check{\nu}^+_\bullet, \hat{\nu}^*_\bullet, \check{\nu}^*_\bullet \colon \mathcal{S}^n_* \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\} \tag{2.1}$$

не является остаточной.

Доказательства сформулированных теорем разобьем на 4 случая.

§ 3. Случай $n = 2$

Доказательство теоремы 1.

1. Возьмем непрерывно-дифференцируемую функцию

$$f(t) = \begin{cases} t^3 \sin\frac{1}{t}, & t \in \left(0, \frac{1}{\pi}\right], \\ 0, & t = 0, \end{cases}$$

и определим вектор-функции $x^1, x^2 \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^2$, являющиеся решениями системы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

с помощью формул

$$x^1(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos 2t \\ f(t) \end{pmatrix}, \quad x^2(t) = \begin{pmatrix} -f(t) \\ e^t \cos 2t \end{pmatrix}, \quad t \in \left[0, \frac{1}{\pi}\right],$$

$$x^1(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos 2t \\ \frac{1}{\pi^3} \sin\frac{1}{t} \end{pmatrix}, \quad x^2(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\pi^3} \sin\frac{1}{t} \\ e^t \cos 2t \end{pmatrix}, \quad t \in \left[\frac{1}{\pi}, 1\right],$$

$$x^1(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos 2t \\ \frac{1}{\pi^3} \sin(2-t) \end{pmatrix}, \quad x^2(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\pi^3} \sin(2-t) \\ e^t \cos 2t \end{pmatrix}, \quad t \in [1, +\infty).$$

Определитель Вронского вектор-функций $x^1, x^2 \in C^1(\mathbb{R}_+)$ положителен на $\mathbb{R}_+$. Следовательно, коэффициенты системы A

$$a_{11}(t) = a_{22}(t) = \frac{\pi^6 e^{2t} \cos 2t(\cos 2t - 2\sin 2t) - \cos(2-t)\sin(2-t)}{\pi^6 e^{2t}\cos^2 2t + \sin^2(2-t)},$$

$$a_{12}(t) = -a_{21}(t) = \frac{\pi^3 e^t(\cos(2-t)\cos 2t + \sin(2-t)(\cos 2t - 2\sin 2t))}{\pi^6 e^{2t}\cos^2 2t + \sin^2(2-t)}$$

непрерывны.

2. Для вектора $m^1 = (0, 1)$ скалярное произведение $\langle x^1(t), m^1\rangle = f(t)$ имеет бесконечное множество точек смен знаков на отрезке $[0, 1/\pi]$, поэтому $\nu^-(x^1, m^1, 1) = +\infty$.

Для любого вектора $m^2 = (\delta, \beta)$, неколлинеарного вектору m^1, имеем представление

$$\langle x^1(t), m^2\rangle = \begin{cases} \delta e^t \cos 2t + \beta f(t), & t \in \left[0, \frac{1}{\pi}\right], \\ \delta e^t \cos 2t + \frac{\beta}{\pi^3} \sin\frac{1}{t}, & t \in \left[\frac{1}{\pi}, 1\right], \\ \delta e^t \cos 2t - \frac{\beta}{\pi^3} \sin(t-2), & t \in [1, +\infty). \end{cases} \tag{3.1}$$

Поэтому, начиная с некоторого достаточно большого t_1 (зависящего от m^2), на любом промежутке длины π скалярное произведение $\langle x^1(t), m^2\rangle$ будет иметь два корня, являющихся точками смены знаков. Кроме того, согласно теореме 2 из [2] δ и β можно подобрать так, что при любом $t > 0$ выполнено неравенство $\nu^* \left(x^1, m^2, t\right) < +\infty$. Следовательно, при любом $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$ справедливы равенства

$$\begin{gathered} \check{\nu}_\bullet^\alpha \left(x^1\right) = \hat{\nu}_\bullet^\alpha \left(x^1\right) = \inf_{m\in\mathbb{R}_*^n} \lim_{t\to\infty} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha \left(x^1, m, t\right) = \\ = \inf_{m\in\mathbb{R}_*^n} \left(\lim_{t\to\infty} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha \left(x^1, m, t_1\left(m^2\right)\right) + \nu^\alpha \left(x^1, m, t, t_1\left(m^2\right)\right)\right) = \\ = \lim_{t\to\infty} \frac{\pi}{t}\left[\frac{2t - t_1\left(m^2\right)}{\pi}\right] = 2. \end{gathered} \tag{3.2}$$

3. Далее, если $\delta \to 0$ и $\beta \to 1$, то неравенство $|\delta e^t \cos 2t| > |\beta f(t)|$ выполняется не только в точке $t = 0$, но и в некоторой достаточно малой ее правосторонней окрестности $t \in [0, \epsilon)$ (куда попадают все члены последовательности смен знаков $t_k = 1/(\pi k)$ функции f, начиная с некоторого номера k_0). Поэтому скалярное произведение (3.1) не имеет вовсе корней на промежутках $[0, \epsilon)$, а на отрезке $[\epsilon, 1]$ число корней конечно. Начиная с $t = 1$, на любом промежутке длины π функция $\langle x^1(t), m^2\rangle$ будет иметь один корень, являющийся сменой знака. Таким образом, при любом $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$ получили цепочку равенств

$$\check{\nu}_\circ^\alpha \left(x^1\right) = \hat{\nu}_\circ^\alpha \left(x^1\right) = \lim_{t\to\infty} \frac{\pi}{t} \inf_{m\in\mathbb{R}_*^n} \nu^\alpha \left(x^1, m, t\right) = \lim_{t\to\infty} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha \left(x^1, m^2, t\right) =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{\pi}{t} \left(\nu^\alpha \left(x^1, m^2, 1\right) + \nu^\alpha \left(x^1, m^2, t, 1\right)\right) = \lim_{t\to\infty} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha \left(x^1, m^2, t, 1\right) = \lim_{t\to+\infty} \frac{\pi}{t}\left[\frac{t-3}{\pi}\right] = 1,$$

завершающую доказательство теоремы 1. □

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2.

Для доказательства теоремы 2 выберем решение

$$v(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos 2t \\ \frac{1}{\pi^3} \sin(2 - t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, +\infty),$$

некоторой системы из множества $\mathcal{M}^2$, совпадающее с x^1 на луче $[1, +\infty)$.

Скалярное произведение вектора $m^1 = (0,\, 1)$ и решения v на любом промежутке длины π будет иметь один корень, поэтому при любом $t > 0$ и каждом $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$ справедливо равенство $\nu^\alpha(v, m^1, t) = [(t - 2)/\pi]$, откуда находим

$$\check{\nu}_\bullet^\alpha(v) = \hat{\nu}_\bullet^\alpha(v) = 1, \quad \alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}. \tag{3.3}$$

Несовпадение друг с другом величин (3.2) и (3.3) означает, что сильные показатели колеблемости (2.1) не являются остаточными. □

§ 4. Случай $n = 3$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1.

1. Возьмем фундаментальную матрицу

$$Y(t) = \begin{pmatrix} \sin 2t & 0 & 1 \\ x_{11} & x_{12} & 0 \\ x_{21} & x_{22} & 0 \end{pmatrix} = \left(y^1(t), y^2(t), y^3(t)\right)$$

системы

$$B(t)=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\\ b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{pmatrix}\in\mathcal{M}^3,$$

где

$$\begin{gathered} b_{11}=b_{21}=b_{31}=0,\\ b_{12}=\frac{2x_{22}\cos 2t}{x_{11}x_{22}-x_{12}x_{21}},\quad b_{13}=\frac{-2x_{12}\cos 2t}{x_{11}x_{22}-x_{12}x_{21}},\\ b_{22}=\frac{\dot x_{11}x_{22}-\dot x_{12}x_{21}}{x_{11}x_{22}-x_{12}x_{21}},\quad b_{23}=\frac{-\dot x_{11}x_{12}+\dot x_{12}x_{11}}{x_{11}x_{22}-x_{12}x_{21}},\\ b_{32}=\frac{\dot x_{21}x_{22}-\dot x_{22}x_{21}}{x_{11}x_{22}-x_{12}x_{21}},\quad b_{33}=\frac{-\dot x_{21}x_{12}+\dot x_{22}x_{11}}{x_{11}x_{22}-x_{12}x_{21}}. \end{gathered}$$

2. При каждом $\alpha\in\{-,\sim,0,+,*\}$ для решения $y^1(t)$ выполняется

$$\begin{gathered} \check\nu^{\alpha}_{\bullet}\left(y^1\right)=\hat\nu^{\alpha}_{\bullet}\left(y^1\right)=\inf_{m\in\mathbb{R}^n_*}\lim_{t\to\infty}\frac{\pi}{t}\nu^{\alpha}\left(y^1,m,t\right)=\\ =\lim_{t\to\infty}\frac{\pi}{t}\nu^{\alpha}\left(y^1,m^3,t\right)=\lim_{t\to\infty}\frac{\pi}{t}\left[\frac{2t-t_1\left(m^3\right)}{\pi}\right]=2, \end{gathered} \tag{4.1}$$

$$\check\nu^{\alpha}_{\circ}\left(y^1\right)=\hat\nu^{\alpha}_{\circ}\left(y^1\right)=\lim_{t\to\infty}\frac{\pi}{t}\inf_{m\in\mathbb{R}^n_*}\nu^{\alpha}\left(y^1,m,t\right)=\lim_{t\to\infty}\frac{\pi}{t}\nu^{\alpha}\left(y^1,m^3,t\right)=$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{\pi}{t}\left[\frac{t-3}{\pi}\right]=1,$$

где $m^3=(\delta,\beta,\gamma)$, $\delta\to 0$, $\beta\to 0$, $\gamma\to 1$. □

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2.

Для решения

$$\zeta(t)=\begin{pmatrix}\sin 2t\\ e^t\cos 2t\\ \frac{1}{\pi^3}\sin(2-t)\end{pmatrix},\quad t\in[0,+\infty),$$

некоторой системы из множества $\mathcal{M}^3$, совпадающее с y^1 на луче $[1,+\infty)$, имеет место

$$\check\nu^{\alpha}_{\bullet}(\zeta)=\hat\nu^{\alpha}_{\bullet}(\zeta)=\lim_{t\to\infty}\frac{\pi}{t}\nu^{\alpha}\left(\zeta,m^4,t\right)=1,\quad \alpha\in\{-,\sim,0,+,*\}, \tag{4.2}$$

где $m^4=(0,0,1)$.

Неравенство величин (4.1) и (4.2) завершает доказательство теоремы 2 при $n=3$. □

§ 5. Случай $n=2k+2$, $k\in\mathbb{N}$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1.

1. Нетрудно проверить, что матрица

$$Z(t)=\left(z^1(t),z^2(t),\ldots,z^n(t)\right)=$$

$$=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ x_{21} & x_{22} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ 0 & 0 & e^{2t}\cos 3t & e^{2t}\sin 3t & \ldots & 0 & 0\\ 0 & 0 & -e^{2t}\sin 3t & e^{2t}\cos 3t & \ldots & 0 & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & e^{(1+\frac{1}{k})t}\cos 3t & e^{(1+\frac{1}{k})t}\sin 3t\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -e^{(1+\frac{1}{k})t}\sin 3t & e^{(1+\frac{1}{k})t}\cos 3t \end{pmatrix}$$

является фундаментальной для системы

$$C(t)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1+\frac{1}{k} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -3 & 1+\frac{1}{k} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}^n.$$

2. Инфимум в определении показателей колеблемости для решения

$$z(t) = z^1(t) + z^3(t) + \dots + z^{n-1}(t)$$

реализуется на векторе $m^5 = (\delta, \beta, 0, \dots, 0)$, где $\delta \to 0, \beta \to 1$, поэтому при любом $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$ имеем

$$1 = \check{\nu}^{\alpha}_{\circ}(z) = \hat{\nu}^{\alpha}_{\circ}(z) < \check{\nu}^{\alpha}_{\bullet}(z) = \hat{\nu}^{\alpha}_{\bullet}(z) = 2.$$

Теорема 1 при любом четном n доказана. □

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2.

Функция

$$\xi(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos 2t \\ \frac{1}{\pi^3}\sin(2-t) \\ e^{2t}\cos 3t \\ -e^{2t}\sin 3t \\ \dots \\ e^{(1+\frac{1}{k})t}\cos 3t \\ -e^{(1+\frac{1}{k})t}\sin 3t \end{pmatrix} \in \mathcal{S}^n_*, \quad t \in [0, +\infty),$$

совпадает с z на луче $[1, +\infty)$, и для нее справедливы

$$\check{\nu}^{\alpha}_{\bullet}(\xi) = \hat{\nu}^{\alpha}_{\bullet}(\xi) = \lim_{t\to\infty} \frac{\pi}{t}\nu^{\alpha}\left(\xi, m^6, t\right) = 1, \quad \alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\},$$

где $m^6 = (0, 1, 0, \dots, 0)$.

Теорема 2 при любом четном n доказана. □

§ 6. Случай $n = 2k + 3,\ k \in \mathbb{N}$

Д о к а з а т е л ь с т в о теорем 1, 2.

1. Рассмотрим фундаментальную матрицу

$$U(t) = (u^1(t), u^2(t), \dots, u^n(t)) =$$

$$= \begin{pmatrix} \sin 2t & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_{11} & x_{12} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_{21} & x_{22} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2t}\cos 3t & e^{2t}\sin 3t & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e^{2t}\sin 3t & e^{2t}\cos 3t & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & e^{(1+\frac{1}{k})t}\cos 3t & e^{(1+\frac{1}{k})t}\sin 3t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -e^{(1+\frac{1}{k})t}\sin 3t & e^{(1+\frac{1}{k})t}\cos 3t \end{pmatrix}$$

системы

$$D(t)=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -3 & 2 & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1+\frac{1}{k} & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -3 & 1+\frac{1}{k} \end{pmatrix}\in\mathcal{M}^n.$$

2. Для решения $u(t)=u^1(t)+u^4(t)+\dots+u^{n-1}(t)$ и функции

$$\varrho(t)=\begin{pmatrix} \sin 2t\\ e^t\cos 2t\\ \frac{1}{\pi^3}\sin(2-t)\\ e^{2t}\cos 3t\\ -e^{2t}\sin 3t\\ \dots\\ e^{(1+\frac{1}{k})t}\cos 3t\\ -e^{(1+\frac{1}{k})t}\sin 3t \end{pmatrix}\in\mathcal{S}^n_*,\quad t\in[0,+\infty),$$

совпадающих на луче $[1,+\infty)$, выполнены равенства

$$\check{\nu}^\alpha_\bullet(u)=\hat{\nu}^\alpha_\bullet(u)=\lim_{t\to\infty}\frac{\pi}{t}\nu^\alpha\big(u,m^7,t\big)=2,\quad \alpha\in\{-,\sim,0,+,*\},$$

$$\check{\nu}^\alpha_\circ(u)=\hat{\nu}^\alpha_\circ(u)=\lim_{t\to\infty}\frac{\pi}{t}\nu^\alpha\big(u,m^7,t\big)=1,\quad \alpha\in\{-,\sim,0,+,*\},$$

$$\check{\nu}^\alpha_\bullet(\varrho)=\hat{\nu}^\alpha_\bullet(\varrho)=\lim_{t\to\infty}\frac{\pi}{t}\nu^\alpha\big(\varrho,m^8,t\big)=1,\quad \alpha\in\{-,\sim,0,+,*\},$$

где $m^7=(0,\delta,\beta,0,\dots,0)$, $\delta\to 0$, $\beta\to 1$, $m^8=(0,0,1,0,\dots,0)$.

Последние три цепочки равенств полностью завершают доказательства теорем 1, 2. □

Автор выражает глубокую благодарность профессору И. Н. Сергееву за постановку задачи и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сергеев И. Н. Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. 2006. Вып. 25. С. 249–294. http://mi.mathnet.ru/tsp65
2. Сергеев И. Н. Замечательное совпадение характеристик колеблемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Матем. сб. 2013. Т. 204. № 1. С. 119–138. https://doi.org/10.4213/sm7928
3. Сергеев И. Н. Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы // Изв. РАН. Сер. матем. 2012. Т. 76. № 1. С. 149–172. https://doi.org/10.4213/im5035
4. Сергеев И. Н. Полный набор соотношений между показателями колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2015. Вып. 2 (46). С. 171–183. http://mi.mathnet.ru/iimi318
5. Сергеев И. Н. Показатели колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Матем. заметки. 2016. Т. 99. Вып. 5. С. 732–751. https://doi.org/10.4213/mzm10555

6. Сергеев И. Н. Ляпуновские характеристики колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. 2016. Вып. 31. С. 177–219. http://mi.mathnet.ru/tsp95
7. Сергеев И. Н. Колеблемость, вращаемость и блуждаемость решений линейных дифференциальных систем // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. 2017. Т. 132. С. 117–121. http://mi.mathnet.ru/into179
8. Сергеев И. Н. О показателях колеблемости, вращаемости и блуждаемости дифференциальных систем, задающих повороты плоскости // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. 2019. № 1. С. 21–26. http://mi.mathnet.ru/vmumm595
9. Барабанов Е. А., Войделевич А. С. К теории частот Сергеева нулей, знаков и корней решений линейных дифференциальных уравнений. I // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52. № 10. С. 1302–1320. https://doi.org/10.1134/S0374064116100034
10. Барабанов Е. А., Войделевич А. С. К теории частот Сергеева нулей, знаков и корней решений линейных дифференциальных уравнений. II // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52. № 12. С. 1595–1609. https://doi.org/10.1134/S0374064116120013
11. Быков В. В. О бэровской классификации частот Сергеева нулей и корней решений линейных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52. № 4. С. 419–425. https://doi.org/10.1134/S0374064116040026
12. Барабанов Е. А., Войделевич А. С. Спектры верхних частот Сергеева нулей и знаков линейных дифференциальных уравнений // Доклады НАН Беларуси. 2016. Т. 60. № 1. С. 24–31. https://doklady.belnauka.by/jour/article/view/8?locale=ru
13. Войделевич А. С. О спектрах верхних частот Сергеева линейных дифференциальных уравнений // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2019. № 1. С. 28–32.
14. Войделевич А. С. Существование бесконечных всюду разрывных спектров верхних характеристических частот нулей и знаков линейных дифференциальных уравнений // Известия НАН Беларуси. Сер. физ.-матем. наук. 2015. № 3. С. 17–23. https://vestifm.belnauka.by/jour/article/view/108/0
15. Сергеев И. Н. К теории показателей Ляпунова линейных систем дифференциальных уравнений // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. 1983. Вып. 9. С. 111–166.
16. Бурлаков Д. С., Цой С. В. Совпадение полной и векторной частот решений линейной автономной системы // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. 2014. Вып. 30. С. 75–93. http://mi.mathnet.ru/tsp71
17. Сташ А. Х. Свойства показателей колеблемости решений линейных автономных дифференциальных систем // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2019. Т. 29. Вып. 4. С. 558–568. https://doi.org/10.20537/vm190407
18. Сташ А. Х. О некоторых свойствах полных и векторных гиперчастот решений двумерной дифференциальной системы // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер. 4: Естественно-математические и технические науки. 2017. Вып. 2 (201). С. 31–34.
19. Сташ А. Х. О некоторых свойствах гиперчастот решений линейных многомерных дифференциальных систем // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер. 4: Естественно-математические и технические науки. 2018. Вып. 3 (226). С. 20–24.
20. Сташ А. Х. Некоторые свойства показателей колеблемости решений двумерной системы // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. 2019. № 5. С. 48–51. http://mi.mathnet.ru/vmumm3627

Поступила в редакцию 11.12.2020

Сташ Айдамир Хазретович, к. ф.-м. н., доцент, декан факультета математики и компьютерных наук, Кавказский математический центр, Адыгейский государственный университет, 385000, Россия, г. Майкоп, ул. Первомайская, 208.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3008-7859
E-mail: aidamir.stash@gmail.com

Цитирование: А. Х. Сташ. Об отсутствии свойства остаточности у сильных показателей колеблемости линейных систем // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2021. Т. 31. Вып. 1. С. 59–69.

A. Kh. Stash

The absence of residual property for strong exponents of oscillation of linear systems

Keywords: differential equations, linear systems, oscillation, number of zeros, exponents of oscillation, Sergeev's frequencies.

MSC2020: 34C10

DOI: 10.35634/vm210105

In this paper, we study various types of exponents of oscillation (upper or lower, strong or weak) of zeros, roots, hyperroots, strict and non-strict signs of non-zero solutions of linear homogeneous differential systems on the positive semi-axis. On the set of non-zero solutions of autonomous systems the relations between these exponents of oscillation are established. It is proved that all strong exponents of oscillations (unlike Sergeev's frequencies of sign changes, zeros and roots, as well as all the weak exponents of oscillations) considered as functions on the set of solutions to linear homogeneous n-dimensional differential systems with continuous coefficients on the semi-line are not residual (i. e. can be changed when changing solution on a finite interval). Besides, at any beforehand given natural $n \geqslant 2$ we give the example of n-dimensional differential system, for some solution of which all strong oscillation exponents differ from corresponding weak exponents. In this case, all weak and all strong exponents on the chosen solution coincide with each other, respectively. When proving the results of this work, the case of parity and odd n are considered separately.

REFERENCES

1. Sergeev I. N. Definition and properties of characteristic frequencies of a linear equation, *Journal of Mathematical Sciences*, 2006, vol. 135, no. 1, pp. 2764–2793. https://doi.org/10.1007/s10958-006-0142-6
2. Sergeev I. N. The remarkable agreement between the oscillation and wandering characteristics of solutions of differential systems, *Sbornik: Mathematics*, 2013, vol. 204, no. 1, pp. 114–132. https://doi.org/10.1070/SM2013v204n01ABEH004293
3. Sergeev I. N. Oscillation and wandering characteristics of solutions of a linear differential system, *Izvestiya: Mathematics*, 2012, vol. 76, no. 1, pp. 139–162. https://doi.org/10.1070/IM2012v076n01ABEH002578
4. Sergeev I. N. The complete set of relations between the oscillation, rotation and wandering indicators of solutions of differential systems, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2015, issue 2 (46), pp. 171–183 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/iimi318
5. Sergeev I. N. Oscillation, rotation, and wandering exponents of solutions of differential systems, *Mathematical Notes*, 2016, vol. 99, no. 5, pp. 729–746. https://doi.org/10.1134/S0001434616050114
6. Sergeev I. N. Lyapunov characteristics of oscillation, rotation, and wandering of solutions of differential systems, *Journal of Mathematical Sciences*, 2018, vol. 234, no. 4, pp. 497–522. https://doi.org/10.1007/s10958-018-4025-4
7. Sergeev I. N. Oscillation, rotation, and wandering of solutions to linear differential systems, *Journal of Mathematical Sciences*, 2018, vol. 230, no. 5, pp. 770–774. https://doi.org/10.1007/s10958-018-3787-z
8. Sergeev I. N. Oscillation, rotatability, and wandering characteristic indicators for differential systems determining rotations of plane, *Moscow University Mathematics Bulletin*, 2019, vol. 74, issue 1, pp. 20–24. https://doi.org/10.3103/S0027132219010042
9. Barabanov E. A., Voidelevich A. S. Remark on the theory of Sergeev frequencies of zeros, signs and roots for solution of linear differential equation: I, *Differential Equations*, 2016, vol. 52, no. 10, pp. 1249–1267. https://doi.org/10.1134/S0012266116100013

10. Barabanov E. A., Voidelevich A. S. Remark on the theory of Sergeev frequencies of zeros, signs and roots for solution of linear differential equation: II, *Differential Equations*, 2016, vol. 52, no. 12, pp. 1523–1538. https://doi.org/10.1134/S0012266116120016
11. Bykov V. V. On the Baire classification of Sergeev frequencies of zeros and roots of solution of linear differential equation, *Differential Equations*, 2016, vol. 52, no. 4, pp. 413–420. https://doi.org/10.1134/S0012266116040029
12. Barabanov E. A., Voidelevich A. S. Spectra of the upper Sergeev frequencies of zeros and signs of linear differential equation, *Doklady NAN Belarusi*, 2016, vol. 60, no. 1, pp. 24–31 (in Russian).
13. Voidelevich A. S. On spectra of upper Sergeev frequencies of linear differential equation, *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*, 2019, no. 1, pp. 28–32 (in Russian).
14. Voidelevich A. S. Existence of the infinite every where discontinuous upper spectra of characteristic frequencies of zeros and signs of linear differential equation, *Izvestiya NAN Belarusi. Ser. Fiziko-Matematicheskikh Nauk*, 2015, no. 3, pp. 17–23 (in Russian).
15. Sergeev N. N. A contribution to the theory of Lyapunov exponents for linear systems of differential equations, *Journal of Soviet Mathematics*, 1986, vol. 33, no. 6, pp. 1245–1292. https://doi.org/10.1007/BF01084752
16. Burlakov D. S., Tsoii S. V. Coincidence of complete and vector frequencies of solutions of a linear autonomous system, *Journal of Mathematical Sciences*, 2015, vol. 210, no. 2, pp. 155–167. https://doi.org/10.1007/s10958-015-2554-7
17. Stash A. Kh. Properties of exponents of oscillation of linear autonomous differential system solutions, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2019, vol. 29, issue 4, pp. 558–568 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm190407
18. Stash A. Kh. On some properties of total and vector hyper frequencies of two-dimensional differential system solutions, *Vestnik Adygeiskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Ser. 4: Estestvenno-Matematicheskie i Tekhnicheskie Nauki*, 2017, issue 2 (201), pp. 31–34 (in Russian).
19. Stash A. Kh. On some properties of hyper frequencies of solution of linear multidimensional differential systems, *Vestnik Adygeiskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Ser. 4: Estestvenno-Matematicheskie i Tekhnicheskie Nauki*, 2018, issue 3 (226), pp. 20–24 (in Russian).
20. Stash A. Kh. Some properties of oscillation indicators of solutions to a two-dimensional system, *Moscow University Mathematics Bulletin*, 2019, vol. 74, issue 5, pp. 202–204. https://doi.org/10.3103/S0027132219050061

Received 11.12.2020

Stash Aidamir Khazretovich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Dean of the Faculty of Mathematics and Computer Science, Caucasus Mathematical Center, Adyghe State University, ul. Pervomaiskaya, 208, Maikop, 385000, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3008-7859
E-mail: aidamir.stash@gmail.com

Citation: A. Kh. Stash. The absence of residual property for strong exponents of oscillation of linear systems, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2021, vol. 31, issue 1, pp. 59–69.