МАТЕМАТИКА 2021. Т. 31. Вып. 1. С. 19–34.

УДК 517.95

© *М. А. Керефов, С. Х. Геккиева*

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ ВЛАГОПЕРЕНОСА

Работа посвящена рассмотрению качественно новых уравнений влагопереноса, которые являются обобщением уравнения Аллера и уравнения Аллера–Лыкова. Данное обобщение дает возможность отражения в характере исходных уравнений специфических особенностей изучаемых массивов, их структуры, физических свойств, протекающих в них процессов посредством введения понятия фрактальной скорости изменения влажности. Для этих уравнений с дробной по времени производной Римана–Лиувилля с краевыми условиями первого рода получены решения системы разностных уравнений с постоянными коэффициентами, возникающих при использовании метода прямых. Получены априорные оценки, из которых следует сходимость решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами дробного порядка. На тестовых примерах проведены численные эксперименты, подтверждающие теоретические результаты, полученные в работе.

Ключевые слова: обобщенное уравнение влагопереноса Аллера, уравнение Аллера–Лыкова, производная дробного порядка, метод прямых, априорная оценка.

DOI: 10.35634/vm210102

Введение

Движение влаги в почве можно описать квазилинейным уравнением

$$u_t = (D(u)u_x)_x,$$

где $u(x,t)$ — влажность почвы в долях единицы на глубине x в момент времени t, $D(u)$ — коэффициент диффузии. Это уравнение получено на основе анализа механизма диффузии в пористом массиве, когда учитывается возникновение потоков влаги под действием градиента капиллярного давления. Однако достаточно убедительные и многократные опыты демонстрируют иногда обратный знак потока от слоев с малым влагосодержанием к слоям с большим влагосодержанием. Как выяснилось, объяснение опытных фактов движения влаги в прямом и обратном направлении возможно на основе нового модифицированного уравнения диффузии, или уравнения Аллера [1, с. 158]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D(u)\frac{\partial u}{\partial x} + A\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\right), \tag{1}$$

где дополнительный член $A\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}$ призван объяснить факт движения влаги против градиента влажности, A — варьируемый коэффициент Аллера.

Если уравнение Аллера (1) предполагает бесконечную скорость распространения возмущения в почве, уравнение А. В. Лыкова

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A_1\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right) \tag{2}$$

учитывает конечную его скорость. В (2) вводится дополнительное слагаемое $A_1\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, роль которого становится заметной в процессах, полагающих быстрые колебания влажности на границах исследуемого образца почвы. А. В. Лыков полагает, что коэффициент A_1 принимает значение $A_1 = Cx^2$, где $C = \mathrm{const}$ — константа, зависящая от коэффициента диффузии, а также пористости тела, его капиллярных свойств и вязкости жидкости [2, с. 197].

Так как коллоидное капиллярно-пористое тело поликапиллярной структуры является примером фрактальной среды или допускает такую интерпретацию, Нахушевым А. М. на основе уравнения (2) в [2, с. 197] было представлено «качественно новое уравнение влагопереноса»:

$$D_{0t}^{\alpha}u = \frac{\partial}{\partial x}\left(D(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - A_1 D_{0t}^{\alpha+1}u, \tag{3}$$

где D_{0t}^{γ} — оператор дробного интегро-дифференцирования Римана–Лиувилля [2, с. 9], $0 < \alpha < 1$. Уравнение (3) при $\alpha = 1$ совпадает с уравнением влагопереноса Лыкова (2).

При таком подходе в случае уравнения Аллера (1) получаем так называемое модифицированное уравнение влагопереноса с дробной производной:

$$D_{0t}^{\alpha}u = \frac{\partial}{\partial x}\left(D(u)\frac{\partial u}{\partial x} + AD_{0t}^{\alpha}\frac{\partial u}{\partial x}\right). \tag{4}$$

Для описания процессов испарения и инфильтрации Кулик В. Я. [3] предлагает привлекать гибридное уравнение, совмещая два известных подхода Аллера и Лыкова. В таком случае получаем уравнение Аллера–Лыкова с дробной производной:

$$A_1 D_{0t}^{\alpha+1}u + D_{0t}^{\alpha}u = \frac{\partial}{\partial x}\left(D(u)\frac{\partial u}{\partial x} + AD_{0t}^{\alpha}\frac{\partial u}{\partial x}\right). \tag{5}$$

При этом в ряде реальных ситуаций, как отмечает Кулик В. Я., зависимость A_1 и D от координаты x практически устраняется (например, когда влажность меняется в небольшом диапазоне).

Настоящая работа посвящена рассмотрению качественно новых уравнений влагопереноса (4), (5), которые являются обобщением соответственно уравнения Аллера и уравнения Аллера–Лыкова.

§ 1. Метод прямых для решения первой краевой задачи для обобщенного уравнения Аллера

Уравнение вида (1) часто называют псевдопараболическим. Краевые задачи для различных псевдопараболических уравнений третьего порядка изучались в [4–11].

В работах [12, 13] рассмотрены дифференциальные и разностные краевые задачи для нагруженных псевдопараболических уравнений третьего порядка и разностные методы их численной реализации. В работе [14] доказана разрешимость задачи Коши для уравнения Аллера в пространстве непрерывных ограниченных функций. В [15] решение краевой задачи для псевдопарабалического уравнения третьего порядка с вырождением типа внутри смешанной области выписана в явном виде как решение второй краевой задачи для уравнения Аллера в положительной части области и как решение задачи Коши для вырождающегося гиперболического уравнения первого рода в отрицательной части области. Задача граничного управления с интегральным ограничением, связанная с уравнением Аллера, исследована в [16]. Методом Фурье и методом априорных оценок уравнение влагопереноса

Аллера с дробной производной Римана–Лиувилля (4) исследовалось в [17, гл. 3]. В работе [18] для обобщенного уравнения Аллера дробного порядка была построена безусловно устойчивая разностная схема с порядком сходимости $O\left(\tau+h^2\right)$ в пространстве L_2. Разностная схема с порядком аппроксимации $O\left(\tau+h^2\right)$ для нелинейного обобщенного уравнения Аллера дробного порядка была построена и исследована в работе [19]. В [20] построены разностные схемы повышенного порядка аппроксимации для обобщенного уравнения Аллера дробного порядка. Единственность решения нелокальной краевой задачи для уравнения (4) получена в [21]. В работе [22] для более общего уравнения с переменными коэффициентами исследованы локальные и нелокальные краевые задачи, в частности первая краевая задача, для решения которой получена априорная оценка, из которой следуют единственность решения и его устойчивость по правой части и начальному данному. Из последних работ отметим [23], где исследовано нагруженное модифицированное уравнение влагопереноса дробного порядка с оператором Бесселя.

В области $Q_T=\{(x,t)\colon 0<x<l,\ 0<t<T\}$ рассмотрим соответствующее (4) неоднородное уравнение влагопереноса Аллера (или модифицированное уравнение влагопереноса) с дробной по времени производной Римана–Лиувилля в предположении, что $D(u)=q(x,t)$ — известная функция координаты и времени:

$$D_{0t}^{\alpha}u=\left(q(x,t)u_x\right)_x+AD_{0t}^{\alpha}u_{xx}+f(x,t), \tag{6}$$

где $f(x,t)$ — плотность источников влаги в точке x в момент времени.

Определение 1. *Регулярным* решением уравнения (6) в области Q_T назовем функцию $u=u(x,t)$ из класса $D_{0t}^{\alpha-1}u(x,t)\in C\left(\overline{Q}_T\right)$, $u_{xx}(x,t)$, $D_{0t}^{\alpha}u_{xx}(x,t)\in C\left(Q_T\right)$, которая удовлетворяет уравнению (6) во всех точках $(x,t)\in Q_T$.

Сформулируем первую краевую задачу для уравнения (6).

Задача 1. *Найти регулярное решение $u(x,t)$ уравнения (6) в области Q_T, удовлетворяющее начально-краевым условиям*

$$\begin{gathered} D_{0t}^{\alpha-1}u(x,t)\big|_{t=0}=u_0(x),\\ u(0,t)=u(l,t)=0, \end{gathered} \tag{7}$$

где $q(x,t)\geqslant c>0,\ A=\mathrm{const}>0.$

Для численного решения задачи (6), (7) применим метод прямых [24, с. 537]. Получим решение в виде системы функций, приближенно представляющих искомое решение вдоль прямых $x=x_k$, $k=0,\,1,\,\ldots,\,N$. Для этого разобьем отрезок $[0,l]$ точками $x_k=kh$ с шагом $h=\frac{l}{N}$ и заменим производные по переменной x на разностные производные. Будем иметь:

$$\begin{gathered} \left(q(x,t)u_x\right)_x\sim\left(a(x,t)u_{\overline{x}}\right)_x=\frac{1}{h}\left(a_{k+1}\frac{u_{k+1}-u_k}{h}-a_k\frac{u_k-u_{k-1}}{h}\right),\\ D_{0t}^{\alpha}u_{xx}\sim D_{0t}^{\alpha}u_{\overline{x}x}=\frac{1}{h^2}D_{0t}^{\alpha}\left(u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}\right),\\ a\left(x_k,t\right)=q\left(x_k-0.5h,t\right)=q_{k-\frac{1}{2}}(t). \end{gathered}$$

Тогда для сеточной по переменной x функции $y\left(x_k,t\right)$ получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений метода прямых, которая дает аппроксимацию уравнения (6) с точностью порядка h^2:

$$\begin{cases} D_{0t}^{\alpha}y=\left(a(x_k,t)y_{\overline{x}}\right)_x+AD_{0t}^{\alpha}y_{\overline{x}x}+\varphi\left(x_k,t\right),\\ y_0(t)=y_N(t)=0 \end{cases} \tag{8}$$

с начальными условиями

$$D_{0t}^{\alpha-1}y\left(x_k,0\right)=u_0\left(x_k\right), \tag{9}$$

где $\varphi\left(x_k,t\right)=f\left(x_k,t\right)+O\left(h^2\right)$, $a_k\geqslant c>0$, $k=1,2,\ldots,N-1$, $y(t)=y_k(t)=y\left(x_k,t\right)$.

1.1. Априорная оценка для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Теорема 1. *Если* $q_t(x,t)$, $f(x,t)\in C\left(\overline{Q}_T\right)$, $u_0(x)\in C[0,l]$, $q\geqslant c>0$, $q_t\leqslant 0$ *всюду в* $\overline{Q}_T$, *то для решения системы уравнений* (8) *метода прямых с начальными условиями* (9) *справедлива априорная оценка*

$$\|Y\left(x_k,t\right)\|_{W_2^1(0,l)}\leqslant M\left(\int_0^t\|\varphi\|_0^2\,d\tau+\|u_0\left(x_k\right)\|_0^2+A\,\|\,u_{\overline{x},0}\left(x_k\right)]|_0^2\right), \tag{10}$$

где $M=\mathrm{const}>0$, $\|Y\|_{W_2^1(0,l)}=\|Y\|_0^2+\|\,Y_{\overline{x}}]|_0^2$, $\|\,Y_{\overline{x}}]|_0^2=(Y_{\overline{x}},Y_{\overline{x}}]$, $(Y_{\overline{x}},Y_{\overline{x}}]=\sum_{k=1}^{N}Y_{\overline{x}}^2h$, $Y\left(x_k,t\right)=D_{0t}^{\alpha-1}y_k=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t\dfrac{y\left(x_k,\tau\right)\,d\tau}{(t-\tau)^\alpha}$, $k=1,2,\ldots,N-1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Умножим уравнение из (8) скалярно на Y. В результате получим тождество

$$\left(D_{0t}^{\alpha}y,Y\right)=\left(\left(ay_{\overline{x}}\right)_x,Y\right)+A\left(D_{0t}^{\alpha}y_{\overline{x}x},Y\right)+(\varphi,Y). \tag{11}$$

Преобразуем слагаемые тождества (11), используя формулы разностного суммирования по частям [25, с. 58] и учитывая граничные условия из (8):

$$\left(D_{0t}^{\alpha}y,Y\right)=\sum_{k=1}^{N-1}D_{0t}^{\alpha}y_kYh=\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t\frac{y\left(x_k,\tau\right)\,d\tau}{(t-\tau)^\alpha}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t\frac{y\left(x_k,\tau\right)\,d\tau}{(t-\tau)^\alpha}h=$$

$$=\sum_{k=1}^{N-1}\frac{\partial}{\partial t}D_{0t}^{\alpha-1}y_kD_{0t}^{\alpha-1}y_kh=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|Y\|_0^2,$$

$$\left(\left(ay_{\overline{x}}\right)_x,Y\right)=-\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\sum_{k=1}^{N}ay_{\overline{x}}\left(x_k,t\right)\int_0^t\frac{y_{\overline{x}}\left(x_k,\tau\right)\,d\tau}{(t-\tau)^\alpha}h,$$

$$\left(D_{0t}^{\alpha}y_{\overline{x}x},Y\right)=\sum_{k=1}^{N-1}\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t\frac{y_{\overline{x}x}\left(x_k,\tau\right)\,d\tau}{(t-\tau)^\alpha}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t\frac{y_k\left(x_k,\tau\right)\,d\tau}{(t-\tau)^\alpha}h=$$

$$=\frac{1}{\Gamma^2(1-\alpha)}\sum_{k=1}^{N-1}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t\frac{y_{\overline{x}x}\left(x_k,\tau\right)\,d\tau}{(t-\tau)^\alpha}\int_0^t\frac{y\left(x_k,\tau\right)\,d\tau}{(t-\tau)^\alpha}h=$$

$$=-\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial}{\partial t}D_{0t}^{\alpha-1}y_{\overline{x}}D_{0t}^{\alpha-1}y_{\overline{x}}h=-\frac{\partial}{\partial t}\sum_{k=1}^{N}\left(Y_{\overline{x}}\right)^2h=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\ \|Y_{\overline{x}}]|_0^2\,.$$

Для оценки правой части воспользуемся неравенством Коши–Буняковского и ε-неравенством [25, с. 100], которое справедливо для произвольного числа $\varepsilon>0$:

$$(\varphi,Y)\leqslant\frac{1}{4\varepsilon}\|\varphi\|_0^2+\varepsilon\|Y\|_0^2,$$

где $(y,v)=\sum_{k=1}^{N-1}y_kv_kh$, $\|y\|_0=\sqrt{(y,y)}$.

Подставляя полученные соотношения в тождество (11), получим неравенство

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|Y\|_0^2+\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\sum_{k=1}^{N}ay_{\overline{x}}\left(x_k,t\right)\int_0^t\frac{y_{\overline{x}}\left(x_k,\tau\right)\,d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}h+\frac{A}{2}\frac{\partial}{\partial t}\ \|Y_{\overline{x}}]|_0^2\leqslant\frac{1}{4\varepsilon}\|\varphi\|_0^2+\varepsilon\|Y\|_0^2. \tag{12}$$

Проинтегрируем неравенство (12) по τ от 0 до t

$$\begin{gathered}\|Y\|_0^2+\tfrac{2}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t\sum_{k=1}^{N}ay_{\overline{x}}\left(x_k,t\right)\int_0^\tau\tfrac{y_{\overline{x}}(x_k,\xi)\,d\xi}{(t-\xi)^{\alpha}}h\,d\tau+A\ \|Y_{\overline{x}}]|_0^2\leqslant\\ \leqslant\tfrac{1}{2\varepsilon}\int_0^t\|\varphi\|_0^2d\tau+2\varepsilon\int_0^t\|Y\|_0^2\,d\tau+\|Y\left(x_k,0\right)\|_0^2+A\ \|Y_{\overline{x}}\left(x_k,0\right)]|_0^2.\end{gathered} \tag{13}$$

Так как

$$\begin{gathered}\int_0^t\left(D_{0t}^{\alpha-1}y,y\right)\,d\tau=\int_0^t\sum_{k=1}^{N-1}D_{0t}^{\alpha-1}y\left(x_k,\tau\right)y\left(x_k,\tau\right)h\,d\tau=\\ =\sum_{k=1}^{N-1}\left(\int_0^t D_{0t}^{\alpha-1}y\left(x_k,\tau\right)y\left(x_k,\tau\right)\,d\tau\right)h\geqslant 0,\end{gathered}$$

то, предположив, что $q_t\leqslant 0$, неотрицательность тройного интеграла в левой части неравенства (13) доказывается так же, как в [2, с. 43]. С учетом чего, усиливая неравенство (13), получим

$$\|Y\|_0^2+A\ \|Y_{\overline{x}}]|_0^2\leqslant\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^t\|\varphi\|_0^2\,d\tau+2\varepsilon\int_0^t\|Y\|_0^2\,d\tau+\|Y\left(x_k,0\right)\|_0^2+A\ \|Y_{\overline{x}}\left(x_k,0\right)]|_0^2. \tag{14}$$

На основании леммы Гронуолла–Беллмана [26, с. 112] из (14) получаем априорную оценку (10). □

Замечание 1. Из неравенства (10) следует единственность решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений дробного порядка (8) со скоростью $O\left(h^2\right)$ в сеточной норме пространства W_2^1.

Действительно, пусть y_k — решение однородной задачи. Тогда из (10) имеем

$$\left\|D_{0t}^{\alpha-1}y_k\right\|_0^2+\left\|D_{0t}^{\alpha-1}y_{\overline{x},k}\right]\Big|_0^2=0.$$

Так как $0<\alpha<1$, применяя закон композиции операторов дробного интегро-дифференцирования [27, с. 15]

$$D_{0t}^{1-\alpha}D_{0t}^{\alpha-1}y(x_k,t)=y(x_k,t),$$

получим, что $y_k=0$ во всех точках $(x_k,t)\in Q_T$.

1.2. Решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений, возникающих в методе прямых

Рассмотрим однородную систему обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующую системе (8) при $a_k=1$, $A=1$, $k=1,\ldots,N-1$:

$$\begin{cases}D_{0t}^{\alpha}y(t)=y_{\overline{x}x}+D_{0t}^{\alpha}y_{\overline{x}x},\\ y_0(t)=y_N(t)=0.\end{cases} \tag{15}$$

Частные решения этой системы будем искать в виде $y_k(t) = \gamma(k)\nu(t)$.

Подставляя последнее равенство в систему (15), получим

$$\gamma(k)D_{0t}^{\alpha}\nu(t) = \frac{1}{h^2}\nu(t)[\gamma(k+1) - 2\gamma(k) + \gamma(k-1)] + \frac{1}{h^2}D_{0t}^{\alpha}\nu(t)[\gamma(k+1) - 2\gamma(k) + \gamma(k-1)],$$
$$\gamma(0) = \gamma(N) = 0$$

или

$$\frac{D_{0t}^{\alpha}\nu(t)}{\nu(t) + D_{0t}^{\alpha}\nu(t)} = \frac{\gamma(k+1) - 2\gamma(k) + \gamma(k-1)}{h^2\gamma(k)} = -\delta^2 = \text{const}. \tag{16}$$

Для отыскания $\gamma(k)$ получим однородное разностное уравнение

$$\gamma(k+1) - [2 - h^2\delta^2]\gamma(k) + \gamma(k-1) = 0 \tag{17}$$

с граничными условиями

$$\gamma(0) = \gamma(N) = 0.$$

Общее решение разностного уравнения (17) имеет вид [24, с. 541]

$$\gamma_s(k) = \sin\frac{\pi s x_k}{l}, \quad s = 1, 2, \ldots, N-1.$$

Для определения $\nu(t)$ из (16) имеем

$$D_{0t}^{\alpha}\nu(t) + \frac{\delta_s^2}{1+\delta_s^2}\nu(t) = 0,$$

общее решение которого имеет вид [28, гл. 1]

$$\nu_s(t) = B_s t^{\alpha-1}E_{1/\alpha}\left(-\frac{\delta_s^2}{1+\delta_s^2}t^{\alpha}; \alpha\right),$$

где $B_s = \frac{2}{l}\int_0^l u_0(x_k)\sin\left(\frac{\pi s}{l}x_k\right)\,dx_k$, а

$$E_{1/\alpha}(z;\mu) = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{z^i}{\Gamma(\alpha i + \mu)} \tag{18}$$

— функция Миттаг-Леффлера.

Итак, мы имеем $N-1$ частных решений однородной линейной системы (15), которые между собой линейно независимы.

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Если функция $u_0(x)$ непрерывна, имеет непрерывную производную 1-го порядка и кусочно-непрерывную производную 2-го порядка, а также удовлетворяет условиям $u_0(0) = u_0(l) = 0$, то общее решение однородной системы* (15) *представимо в виде*

$$y_k(t) = \sum_{s=1}^{N-1} B_s \sin\left(\frac{\pi s}{l}x_k\right)t^{\alpha-1}E_{1/\alpha}\left(-\frac{\delta_s^2}{1+\delta_s^2}t^{\alpha};\alpha\right), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1,$$

где $\delta_s^2 = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi}{2l}x_s$.

Найдя методом вариации постоянных частное решение неоднородной системы (8), получим ее общее решение как сумму частного решения и построенного общего решения (15) однородной системы.

§ 2. Метод прямых для решения первой краевой задачи для обобщенного уравнения Аллера–Лыкова

Уравнение влагопереноса Аллера–Лыкова в дифференциальной и разностной трактовках в локальной постановке ($\alpha = 1$) рассматривалось в работах многих авторов и решалось методом разделения переменных, методом априорных оценок, а также численными методами. Среди последних отметим работы [29, 30], в которых получены априорные оценки для решения нелокальных задач для уравнения влагопереноса Аллера–Лыкова в дифференциальной и разностной трактовках, а также работы [31–35], в которых исследовано уравнение влагопереноса Аллера–Лыкова с дробной по времени производной.

В области Q_T рассмотрим соответствующее (5) неоднородное уравнение при $D(u) = q(x,t)$:

$$A_1 D_{0t}^{\alpha+1} + D_{0t}^{\alpha} u = \frac{\partial}{\partial x}\left(q(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + A D_{0t}^{\alpha}\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x,t), \tag{19}$$

где $A_1, A = \mathrm{const} > 0$, $q(x,t) \geqslant c > 0$.

Определение 2. *Регулярным* решением уравнения (19) в области Q_T назовем функцию $u = u(x,t)$ из класса $D_{0t}^{\alpha}u(x,t) \in C\left(\overline{Q_T}\right)$, $D_{0t}^{\alpha+1}u(x,t)$, $u_{xx}(x,t)$, $D_{0t}^{\alpha}u_{xx}(x,t) \in C\left(Q_T\right)$, которая удовлетворяет уравнению (19) во всех точках $(x,t) \in Q_T$.

Сформулируем первую краевую задачу для уравнения (19).

Задача 2. *Найти регулярное решение $u(x,t)$ уравнения (19) в области Q_T, удовлетворяющее краевым условиям*

$$u(0,t) = u(l,t) = 0 \tag{20}$$

и начальным условиям

$$\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-1}u(x,t) = \tau(x), \quad \lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha}u(x,t) = \nu(x), \tag{21}$$

где $\tau(x), \nu(x)$ — заданные функции.

Существование и единственность решения задачи 2 доказаны в [34].

Аналогично тому, как это было проделано в § 1, получим решение задачи (19), (20), (21) в виде системы функций, приближенно представляющих искомое решение вдоль прямых $x_k = kh$ $\left(k = 0,\ 1,\ \ldots,\ N;\ h = \frac{l}{N}\right)$. Тогда для сеточной по переменной x функции $y(x_k,t)$ получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений метода прямых, которая дает аппроксимацию уравнения (19) с точностью h^2:

$$\begin{cases} A_1 D_{0t}^{\alpha+1} y(x_k,t) + D_{0t}^{\alpha} y(x_k,t) = \dfrac{1}{h}\left[a_{k+1}\dfrac{y_{k+1}(t) - y_k(t)}{h} - a_k\dfrac{y_k - y_{k-1}}{h}\right] + \\ + \dfrac{A}{h^2}\left[D_{0t}^{\alpha}y(x_{k+1},t) - 2D_{0t}^{\alpha}y(x_k,t) + D_{0t}^{\alpha}y(x_{k-1},t)\right] + \varphi(x_k,t), \\ y_0(t) = y_N(t) = 0, \end{cases} \tag{22}$$

с начальными условиями

$$\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-1}y(x_k,t) = \tau(x_k), \quad \lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha}y(x_k,t) = \nu(x_k), \tag{23}$$

где $\varphi(x_k,t) = f(x_k,t) + O(h^2)$, $a_k \geqslant c > 0$, $y(t) = y_k(t) = y(x_k,t)$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

2.1. Априорная оценка для системы разностных уравнений

Для решения системы (22) с начальными условиями

$$\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-1} y(x_k,t)=0, \quad \lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha} y(x_k,t)=\nu(x_k) \tag{24}$$

получим априорную оценку. Умножим уравнение из (22) скалярно на $D_{0t}^{\alpha}y$

$$A_1\left(D_{0t}^{\alpha+1}y, D_{0t}^{\alpha}y\right)+\left(D_{0t}^{\alpha}y, D_{0t}^{\alpha}y\right)=\left((ay_{\overline{x}})_x, D_{0t}^{\alpha}y\right)+A\left(D_{0t}^{\alpha}y_{\overline{x}x}, D_{0t}^{\alpha}y\right)+\left(\varphi, D_{0t}^{\alpha}y\right). \tag{25}$$

Преобразуем слагаемые, входящие в (25), с учетом граничных условий:

$$A_1\left(D_{0t}^{\alpha+1}y, D_{0t}^{\alpha}y\right)=A_1\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N-1}\frac{\partial}{\partial t}\left(D_{0t}^{\alpha}y\right)^2 h=\frac{A_1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|D_{0t}^{\alpha}y\|,$$

$$\left(D_{0t}^{\alpha}y, D_{0t}^{\alpha}y\right)=\|D_{0t}^{\alpha}y\|_0^2,$$

$$\left((ay_{\overline{x}})_x, D_{0t}^{\alpha}y\right)=-\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\sum_{k=1}^{N}ay_{\overline{x}}(x_k,t)\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t\frac{y_{\overline{x}}(x_k,\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^\alpha}h,$$

$$\left(D_{0t}^{\alpha}y_{\overline{x}x}, D_{0t}^{\alpha}y\right)=\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t\frac{y_{\overline{x}x}(x_k,\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^\alpha}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t\frac{y(x_k,\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^\alpha}h=$$

$$=-\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t\frac{y_{\overline{x}}(x_k,\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^\alpha}\right)^2 h=-\|\, D_{0t}^{\alpha}y_{\overline{x}}]|_0^2,$$

$$\left(\varphi, D_{0t}^{\alpha}y\right)\leqslant\frac{1}{4\varepsilon}\|\varphi\|_0^2+\varepsilon\|D_{0t}^{\alpha}y\|_0^2, \quad \varepsilon=\mathrm{const}>0.$$

Подставляя полученные соотношения в тождество (25), получим

$$\frac{A_1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|D_{0t}^{\alpha}y\|_0^2+\|D_{0t}^{\alpha}y\|_0^2+\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\sum_{k=1}^{N}ay_{\overline{x}}(x_k,t)\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t\frac{y_{\overline{x}}(x_k,\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^\alpha}h+$$
$$+A\|D_{0t}^{\alpha}y_{\overline{x}}\|_0^2\leqslant\frac{1}{4\varepsilon}\|\varphi\|_0^2+\varepsilon\|D_{0t}^{\alpha}y\|_0^2.$$

Проинтегрируем последнее неравенство по τ от 0 до t

$$\frac{A_1}{2}\|D_{0t}^{\alpha}y\|_0^2+(1-\varepsilon)\int_0^t\|D_{0t}^{\alpha}y\|_0^2\,d\tau+\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t\sum_{k=1}^{N}ay_{\overline{x}}(x_k,t)\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\tau\frac{y_{\overline{x}}(x_k,\xi)\,d\xi}{(t-\xi)^\alpha}h\,d\tau+$$
$$+A\int_0^t\|\, D_{0t}^{\alpha}y_{\overline{x}}]|_0^2\,d\tau\leqslant\frac{1}{4\varepsilon}\int_0^t\|\varphi\|_0^2\,d\tau+\frac{A_1}{2}\|D_{0t}^{\alpha}y(x_k,0)\|_0^2,$$

$$A_1\|D_{0t}^{\alpha}y\|_0^2+2(1-\varepsilon)\int_0^t\|D_{0t}^{\alpha}y\|_0^2\,d\tau+2A\int_0^t\|\, D_{0t}^{\alpha}y_{\overline{x}}]|_0^2\,d\tau\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^t\|\varphi\|_0^2\,d\tau+A_1\|D_{0t}^{\alpha}y(x_k,0)\|_0^2,$$

или, с учетом (24),

$$\|D_{0t}^{\alpha}y\|_0^2+\|\, D_{0t}^{\alpha}y_{\overline{x}}]|_{2,Q_t}^2+\|D_{0t}^{\alpha}y\|_{2,Q_t}^2\leqslant M_1\left(\|\varphi\|_{2,Q_t}^2+\|\nu(x_k)\|_0^2\right), \tag{26}$$

где $\|D_{0t}^{\alpha}y\|_{2,Q_t}^2=\int_0^t\|D_{0t}^{\alpha}y(x_k,t)\|_0^2\,d\tau$, $M_1=\mathrm{const}>0$. Откуда следует сходимость метода прямых со скоростью $O(h^2)$. Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Если выполнены условия $q \geqslant c > 0$, q_t, $f \in C\left(\overline{Q_T}\right)$, $q_t \leqslant 0$, $\nu \in C[0,l]$, то для решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений дробного порядка (22) с начальными условиями (24) справедлива априорная оценка (26), где M_1 не зависит от h.*

Задача получения априорной оценки для решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений дробного порядка (22) в случае начальных условий (23) (т. е. наличия неоднородностей в обоих начальных условиях) вводом новой функции [34, теорема 2] сводится к задаче (22), (24) при соответствующей гладкости $f(x,t)$ и начальных функций.

2.2. Решение системы разностных уравнений, возникающих в методе прямых

Рассмотрим однородную систему уравнений, соответствующую системе (22) при $a_k = 1$, $A_1 = 1$, $A = 1$, $k = 1, 2, \ldots, N-1$:

$$\begin{cases} D_{0t}^{\alpha+1} y(x_k,t) + D_{0t}^{\alpha} y(x_k,t) = y_{\overline{x}x} + D_{0t}^{\alpha} y_{\overline{x}x}, \\ y_0(t) = y_N(t) = 0, \end{cases} \tag{27}$$

с начальными условиями (23).

Построение общих решений однородной системы уравнений (27) проведем так же, как это было проделано выше в случае уравнения Аллера, так как, отыскивая частные решения однородный системы вида

$$y_k(t) = \gamma(k) w(t),$$

получим для $\gamma(k)$ в точности те же самые разностные уравнения, что и в подпараграфе 1.2 с граничными условиями $\gamma(0) = \gamma(N) = 0$. А для отыскания $w(t)$ получим уравнение

$$D_{0t}^{\alpha+1} w(t) + \left(1 + \delta_s^2\right) D_{0t}^{\alpha} w(t) + \delta_s^2 w(t) = 0,$$

решение которого имеет вид [34]

$$w_s(t) = \left(\nu_s + \left(1+\delta_s^2\right)\tau_s\right) t^{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{(-1)^n \left(1+\delta_s^2\right)^{n-j} \left(\delta_s^2\right)^j t^{n+j\alpha}}{\Gamma(n+j\alpha+\alpha+1)} + \\ + \tau_s t^{\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{(-1)^n \left(1+\delta_s^2\right)^{n-j} \left(\delta_s^2\right)^j t^{n+j\alpha}}{\Gamma(n+j\alpha+\alpha)},$$

где $\tau_s = D_{0t}^{\alpha-1} w_s\big|_{t=0}$, $\nu_s = D_{0t}^{\alpha} w_s\big|_{t=0}$, $\delta_s^2 = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi}{2l}x_s$, $\binom{n}{j} = \frac{n!}{s!(n-j)!}$, $s = 1, 2, \ldots, N-1$. Следовательно, решение однородной системы, соответствующей системе (27) с начальными условиями (23), будет иметь вид

$$y_k(t) = \sum_{s=1}^{N-1} \sin\left(\frac{\pi s}{l}x_k\right) \left(\left(\nu_s + \left(1+\delta_s^2\right)\tau_s\right) t^{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{(-1)^n \left(1+\delta_s^2\right)^{n-j} \left(\delta_s^2\right)^s t^{n+j\alpha}}{\Gamma(n+j\alpha+\alpha+1)} + \right. \\ \left. + \tau_s t^{\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{(-1)^n \left(1+\delta_s^2\right)^{n-j} \left(\delta_s^2\right)^s t^{n+j\alpha}}{\Gamma(n+j\alpha+\alpha)} \right), \tag{28}$$

где $\tau_s = \frac{1}{l}\int_0^l \tau(x_k) \sin\left(\frac{\pi s}{l}x_k\right) dx_k$, $\nu_s = \frac{1}{l}\int_0^l \nu(x_k) \sin\left(\frac{\pi s}{l}x_k\right)$.

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть* $\tau \in C^3[0,1]$, $\nu \in C^2[0,1]$ *и выполнены условия согласования* $\tau(0) = \tau(l) = \tau''(0) = \tau''(l) = 0$, $\nu(0) = \nu(l) = 0$; *тогда решение однородной системы* (27) *с начальными условиями* (23) *представимо в виде* (28).

Тестовые примеры

Пример 1. *Построить методом прямых приближенное решение задачи*

$$D_{0t}^{\alpha}u = u_{xx} + D_{0t}^{\alpha}u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < t \leqslant T, \tag{29}$$

$$\begin{gathered} u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t \geqslant 0, \\ D_{0t}^{\alpha-1}u(x,t)\big|_{t=0} = \sin(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{gathered} \tag{30}$$

Отрезок $[0,\pi]$ разделим на четыре части и проведем через точки деления прямые. Если $y_k(t)$ $(k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ — приближенные значения решения на прямых $x = \frac{\pi k}{4}$ $(k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$, то для отыскания $y_k(t)$, согласно теореме 2, имеем систему уравнений

$$y_k(t) = \sum_{s=1}^{3} B_s \sin\left(s x_k\right) t^{\alpha-1} E_{1/\alpha}\left(-\frac{\delta_s^2}{1+\delta_s^2} t^{\alpha}; \alpha\right), \quad k = 1,\ 2,\ 3,$$

где B_s — произвольная постоянная, $\delta_s^2 = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{1}{2}x_s$. Из начального условия имеем $B_s = \Gamma(\alpha)$. Таким образом, получаем

$$y_k(t) = \Gamma(\alpha)\sum_{s=1}^{3} \sin\left(s x_k\right) t^{\alpha-1} E_{1/\alpha}\left(-\frac{\delta_s^2}{1+\delta_s^2} t^{\alpha}; \alpha\right), \quad k = 1,\ 2,\ 3.$$

Следующие данные получены программированием в среде MAPLE. Вычисление функции типа Миттаг-Леффлера проводилось по определению (18). Отметим, что скорость вычислений можно повысить, воспользовавшись вычислительным алгоритмом, предложенным в работе [36]. Точное решение первой краевой задачи (29), (30) на прямой $x = \frac{\pi}{4}$ имеет вид [17]

$$u\left(\frac{1}{4}\pi, t\right) = \frac{1}{2}\Gamma(\alpha)t^{\alpha-1}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}t^{\alpha}\right)^k}{\Gamma\left(\alpha(k+1)\right)}\right)\sqrt{2}.$$

Данные точного и приближенного решений при $\alpha = \frac{1}{2}$ представлены в таблице

t	0.5	1.0
Точное решение	$u\left(\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\right) = -0.4381822280$	$u\left(\frac{1}{4}\pi, 1\right) = -0.3858267065$
Приближенное решение	$y_1\left(\frac{1}{2}\right) = -0.4304226116$	$y_1(1) = -0.3799398933$

Пример 2. *Построить методом прямых приближенное решение задачи*

$$D_{0t}^{\alpha+1}u + D_{0t}^{\alpha}u = u_{xx} + D_{0t}^{\alpha}u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < t \leqslant T, \tag{31}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t \geqslant 0, \tag{32}$$

$$D_{0t}^{\alpha-1}u(x,t)\big|_{t=0} = 0, \quad D_{0t}^{\alpha}u(x,t)|_{t=0} = \sin(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi. \tag{33}$$

Отрезок $[0,\pi]$ разделим на четыре части и проведем через точки деления прямые. Если $y_k(t)$ $(k = 0,1,2,3,4)$ — приближенные значения решения на прямых $x = \frac{\pi k}{4}$, то для отыскания $y_k(t)$ воспользуемся (28), в результате получим

$$y_k(t) = \sum_{s=1}^{3}\sin\left(s x_k\right)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{(-1)^n\left(1+\delta_s^2\right)^{n-j}\left(\delta_s^2\right)^j t^{n+j\alpha+\alpha}}{\Gamma(n+j\alpha+\alpha+1)},$$

где $\delta_s^2 = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{1}{2}x_s$.

Для точного решения задачи (31), (32), (33) на прямой $x = \frac{\pi}{4}$ имеем [34]

$$u\left(\frac{\pi}{4}, t\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}(-1)^n 2^{n-s}\frac{\sqrt{2}}{2}\binom{n}{j}\frac{t^{n+s\alpha+\alpha}}{\Gamma(n+\alpha+s\alpha+1)}.$$

Данные точного и приближенного решений при $\alpha = \frac{1}{2}$ представлены в таблице

t	0.5	2.0
Точное решение	$u\left(\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\right) = 0.2427594763$	$u\left(\frac{1}{4}\pi, 2\right) = -0.1089940120$
Приближенное решение	$y_1\left(\frac{1}{2}\right) = 0.2496100932$	$y_1(2) = -0.1042484974$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чудновский А. Ф. Теплофизика почв. М.: Наука, 1976.
2. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003.
3. Кулик В. Я. Исследование движения почвенной влаги с точки зрения инвариантности относительно непрерывных групп преобразований // Исследование процессов обмена энергией и веществом в системе «почва–растение–воздух». Л.: Наука, 1972. С. 180–187.
4. Yangarber V. A. The mixed problem for a modified moisture–transfer equation // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 1967. Vol. 8. No. 1. P. 62–64. https://doi.org/10.1007/BF00913245
5. Coleman B. D., Duffin R. J., Mizel V. J. Instability, uniqueness, and nonexistence theorems for the equation $u_t = u_{xx} - u_{xtx}$ on a strip // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1965. Vol. 19. No. 2. P. 100–116. https://doi.org/10.1007/BF00282277
6. Нахушев А. М. Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод // Дифференциальные уравнения. 1982. Т. 18. № 1. С. 72–81. http://mi.mathnet.ru/de4465
7. Водахова В. А. Краевая задача с нелокальным условием А. М. Нахушева для одного псевдопараболического уравнения влагопереноса // Дифференциальные уравнения. 1982. Т. 18. № 2. С. 280–285. http://mi.mathnet.ru/de4442
8. Солдатов А. П., Шхануков М. Х. Краевые задачи с общим нелокальным условием А. А. Самарского для псевдопараболических уравнений высокого порядка // Докл. АН СССР. 1987. Т. 297. № 3. С. 547–552. http://mi.mathnet.ru/dan7894
9. Карсанова Ж. Т., Нахушева Ф. М. Об одной нелокальной краевой задаче для псевдопараболического уравнения третьего порядка // Владикавказский математический журнал. 2002. Т. 4. № 2. С. 31–37. http://mi.mathnet.ru/vmj266
10. Кожанов А. И. Об одной нелокальной краевой задаче с переменными коэффициентами для уравнения теплопроводности и Аллера // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40. № 6. С. 763–774. http://mi.mathnet.ru/de11086
11. Хубиев К. У. О математической модели уравнения Аллера // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2016. № 4-1 (16). С. 56–65. http://mi.mathnet.ru/vkam178
12. Бештоков М. Х. Численный метод решения одной нелокальной краевой задачи для уравнения третьего порядка гиперболического типа // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2014. Т. 54. № 9. С. 1497–1514. https://doi.org/10.7868/S0044466914090051
13. Бештоков М. Х. Дифференциальные и разностные краевые задачи для нагруженных псевдопараболических уравнений третьего порядка и разностные методы их численной реализации // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2017. Т. 57. № 12. С. 2021–2041. https://doi.org/10.7868/S0044466917120092
14. Умаров Х. Г. Разрешимость задачи Коши для уравнения Аллера в пространстве непрерывных ограниченных функций // Владикавказский математический журнал. 2013. Т. 16. № 4. С. 65–75. http://mi.mathnet.ru/vmj486

15. Макаова Р. Х. Краевая задача для гиперболического уравнения третьего порядка с вырождением порядка внутри области // Вест. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2017. Т. 21. № 4. С. 651–664. https://doi.org/10.14498/vsgtu1574
16. Фаязова З. К. Граничное управление для псевдопараболического уравнения // Математические заметки СВФУ. 2018. Т. 25. № 2. С. 40–47. https://doi.org/10.25587/SVFU.2018.98.14229
17. Керефов М. А. Краевые задачи для модифицированного уравнения влагопереноса с дробной по времени производной: дис. ... канд. физ.-матем. наук / КБГУ. Нальчик, 2000. 75 с.
18. Wu Ch. Numerical solution for Stokes' first problem for a heated generalized second grade fluid with fractional derivative // Applied Numerical Mathematics. 2009. Vol. 59. Issue 10. P. 2571–2583. https://doi.org/10.1016/j.apnum.2009.05.009
19. Chen Ch.-M., Liu F., Turner I., Anh V. Numerical methods with fourth-order spatial accuracy for variable order nonlinear Stokes' first problem for a heated generalized second grade fluid // Computers and Mathematics with Applications. 2011. Vol. 62. Issue 3. P. 971–986. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2011.03.065
20. Карова Ф. А. Разностные схемы повышенного порядка аппроксимации для уравнения Аллера дробного порядка // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2018. № 4 (24). С. 166–177. https://doi.org/10.18454/2079-6641-2018-24-4-166-177
21. Керефов М. А., Геккиева С. Х. Нелокальная краевая задача для обобщенного уравнения влагопереноса // Вестник Воронежского государственного университета. Сер. Физика. Математика. 2017. № 2. С. 106–112. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=29711619
22. Бештоков М. Х. Локальные и нелокальные краевые задачи для вырождающихся и невырождающихся псевдопараболических уравнений с дробной производной Римана–Лиувилля // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54. № 6. С. 763–778. https://doi.org/10.1134/S0374064118060055
23. Бештоков М. Х. Краевые задачи для нагруженного модифицированного уравнения влагопереноса дробного порядка с оператором Бесселя и разностные методы их решения // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Т. 30. Вып. 2. С. 158–175. https://doi.org/10.35634/vm200202
24. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Т. 2. М.: ГИФМЛ, 1962.
25. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
26. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
27. Псху А. В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005.
28. Геккиева С. Х. Краевые задачи для нагруженных параболических уравнений с дробной производной по времени: дис. ... канд. физ.-мат. наук / НИИ ПМА КБНЦ РАН. Нальчик, 2003. 75 с.
29. Архестова С. М., Шхануков-Лафишев М. Х. Разностные схемы для уравнения влагопереноса Аллера–Лыкова с нелокальным условием // Известия КБНЦ РАН. 2012. № 3 (47). С. 7–16. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=17822798
30. Лафишева М. М., Керефов М. А., Дышекова Р. В. Разностные схемы для уравнения влагопереноса Аллера–Лыкова с нелокальным условием // Владикавказский математический журнал. 2017. Т. 19. Вып. 1. С. 50–58. http://mi.mathnet.ru/vmj607
31. Геккиева С. Х., Керефов М. А. Краевые задачи для обобщенного уравнения влагопереноса // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2018. № 1 (21). С. 21–31. https://doi.org/10.18454/2079-6641-2018-21-1-21-31
32. Геккиева С. Х. Нелокальная краевая задача для обобщенного уравнения влагопереноса Аллера–Лыкова // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2018. № 4 (24). С. 19–28. https://doi.org/10.18454/2079-6641-2018-24-4-19-28
33. Керефов М. А., Нахушева Ф. М., Геккиева С. Х. Краевая задача для обобщенного уравнения влагопереноса Аллера–Лыкова с сосредоточенной теплоемкостью // Вестник Самарского университета. Естественно-научная серия. 2018. Т. 24. № 3. С. 23–29. https://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-3-23-29
34. Геккиева С. Х., Керефов М. А. Первая краевая задача для уравнения влагопереноса Аллера–Лыкова с дробной по времени производной // Уфимский математический журнал. 2019. Т. 11. № 2. С. 72–82. http://mi.mathnet.ru/ufa472

35. Керефов М. А., Геккиева С. Х. Вторая краевая задача для обобщенного уравнения влагопереноса Аллера–Лыкова // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2019. Т. 23. № 4. С. 607–621. https://doi.org/10.14498/vsgtu1686
36. Паровик Р. И. Особенности вычисления функции типа Миттаг-Леффлера в системе компьютерной математики Maple // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2012. № 2 (5). С. 51–61. https://doi.org/10.18454/2079-6641-2012-5-2-51-61

Поступила в редакцию 23.12.2020

Керефов Марат Асланбиевич, к. ф.-м. н., доцент, кафедра прикладной математики и информатики, Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова, 360004, Россия, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 173.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7442-5402
E-mail: kerefov@mail.ru

Геккиева Сакинат Хасановна, к. ф.-м. н., Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, 360000, Россия, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 а.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2135-2115
E-mail: gekkieva_s@mail.ru

Цитирование: М. А. Керефов, С. Х. Геккиева. Численно-аналитический метод решения краевой задачи для обобщенных уравнений влагопереноса // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2021. Т. 31. Вып. 1. С. 19–34.

VESTNIK UDMURTSKOGO UNIVERSITETA. MATEMATIKA. MEKHANIKA. KOMP'UTERNYE NAUKI
MATHEMATICS 2021. Vol. 31. Issue 1. Pp. 19–34.

M. A. Kerefov, S. Kh. Gekkieva

Numerical-analytical method for solving boundary value problem for the generalized moisture transport equation

Keywords: generalized Aller moisture transfer equation, Aller–Lykov equation, fractional order derivative, method of lines, a priori estimate.

MSC2020: 35C99

DOI: 10.35634/vm210102

The paper studies qualitatively new equations of moisture transfer, which generalize the Aller and Aller–Lykov equations. The generalization contributes to revealing in the original equations the specific features of the studied massifs, their structure, physical properties, processes occurring in them through the introduction of the notion of the rates of change of the fractal dimension. We have obtained solutions to the constant coefficient difference equations as a system arising when using the method of lines for the equations with a Riemann–Liouville time fractional derivative with boundary conditions of the first kind. A priori estimates are obtained that imply convergence of the obtained solutions to systems of ordinary differential equations with variable fractional coefficients. Numerical tests have been carried out to confirm theoretical results of the study.

REFERENCES

1. Chudnovskii A. F. *Teplofizika pochv* (Thermophysics of soils), Moscow: Nauka, 1976.
2. Nakhushev A. M. *Drobnoe ischislenie i ego primenenie* (Fractional calculus and its applications), Moscow: Fizmatlit, 2003.
3. Kulik V. Ya. Investigation of soil moisture movement from the point of view of invariance with respect to continuous transformation groups, *Issledovanie protsessov obmena energiei i veshchestvom v sisteme "pochva–rastenie–vozdukh"* (Investigation of energy and substance exchange processes in the "soil–plant–air system"), Leningrad: Nauka, 1972, pp. 180–187.
4. Yangarber V. A. The mixed problem for a modified moisture–transfer equation, *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1967, vol. 8, no. 1, pp. 62–64. https://doi.org/10.1007/BF00913245
5. Coleman B. D., Duffin R. J., Mizel V. J. Instability, uniqueness, and nonexistence theorems for the equation $u_t = u_{xx} - u_{xtx}$ on a strip, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1965, vol. 19, no. 2, pp. 100–116. https://doi.org/10.1007/BF00282277
6. Nakhushev A. M. An approximate method for solving boundary value problems for differential equations and its application to the dynamics of ground moisture and ground water, *Differentsial'nye Uravneniya*, 1982, vol. 18, no. 1, pp. 72–81 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/de4465
7. Vodakhova V. A. A boundary value problem with A. M. Nakhushev's nonlocal condition for a pseudoparabolic equation of moisture transfer, *Differentsial'nye Uravneniya*, 1982, vol. 18, no. 2, pp. 280–285 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/de4442
8. Soldatov A. P., Shkhanukov M. Kh. Boundary value problems with A. A. Samarskii general nonlocal condition for higher-order pseudoparabolic equations, *Doklady Mathematics*, 1988, vol. 36, no. 3, pp. 507–511. https://mathscinet.ams.org/mathscinet-getitem?mr=924693
9. Karsanova Zh. T., Nakhusheva F. M. On a nonlocal boundary value problem for a third-order pseudoparabolic equation, *Vladikavkazskii Matematicheskii Zhurnal*, 2002, vol. 4, no. 2, pp. 31–37 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/vmj266
10. Kozhanov A. I. On a nonlocal boundary value problem with variable coefficients for the heat equation and the Aller equation, *Differential Equations*, 2004, vol. 40, no. 6, pp. 815–826. https://doi.org/10.1023/B:DIEQ.0000046860.84156.f0
11. Khubiev K. U. On mathematical models of the Aller equation, *Vestnik KRAUNTs. Fiz.-Mat. Nauki*, 2016, no. 4-1 (16), pp. 56–65 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/vkam178

12. Beshtokov M. Kh. A numerical method for solving one nonlocal boundary value problem for a third-order hyperbolic equation, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2014, vol. 54, no. 9, pp. 1441–1458. https://doi.org/10.1134/S096554251409005X
13. Beshtokov M. Kh. Differential and difference boundary value problem for loaded third-order pseudo-parabolic differential equations and difference methods for their numerical solution, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2017, vol. 57, no. 12, pp. 1973–1993. https://doi.org/10.1134/S0965542517120089
14. Umarov Kh. G. Solvability of the Cauchy problem for the Aller equation in space of bounded continuous functions, *Vladikavkazskii Matematicheskii Zhurnal*, 2013, vol. 15, no. 4, pp. 65–75 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/vmj486
15. Makaova R. Kh. A boundary value problem for a third order hyperbolic equation with degeneration of order inside the domain, *Vestn. Samar. Gos. Tekh. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2017, vol. 21, no. 4, pp. 651–664 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/vsgtu1574
16. Fayazova Z. K. Boundary control for a pseudo-parabolic equation, *Mathematical Notes of NEFU*, 2018, vol. 25, no. 2, pp. 40–47 (in Russian). https://doi.org/10.25587/SVFU.2018.98.14229
17. Kerefov M. A. *Boundary value problems for a modified moisture transfer equation with a time-fractional derivative*, Cand. Sci. (Phys.–Math.) Dissertation, Nal'chik, 2000, 75 p. (In Russian).
18. Wu Ch. Numerical solution for Stokes' first problem for a heated generalized second grade fluid with fractional derivative, *Applied Numerical Mathematics*, 2009, vol. 59, issue 10, pp. 2571–2583. https://doi.org/10.1016/j.apnum.2009.05.009
19. Chen Ch.-M., Liu F., Turner I., Anh V. Numerical methods with fourth-order spatial accuracy for variable order nonlinear Stokes' first problem for a heated generalized second grade fluid, *Computers and Mathematics with Applications*, 2011, vol. 62, issue 3, pp. 971–986. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2011.03.065
20. Karova F. A. Numerical solution for fractional Haller equation, *Vestnik KRAUNTs. Fiz.-Mat. Nauki*, 2018, no. 4 (24), pp. 166–177 (in Russian). https://doi.org/10.18454/2079-6641-2018-24-4-166-177
21. Kerefov M. A., Gekkieva S. Kh. A nonlocal boundary value problem for the generalized equation of moisture transfer, *Vestnik Voronezhskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Ser. Fizika. Matematika*, 2017, no. 2, pp. 106–112 (in Russian). https://elibrary.ru/item.asp?id=29711619
22. Beshtokov M. Kh. Local and nonlocal boundary value problems for degenerating and nondegenerating pseudoparabolic equations with a Riemann–Liouville fractional derivative, *Differential Equations*, 2018, vol. 54, no. 6, pp. 758–774. https://doi.org/10.1134/S0012266118060058
23. Beshtokov M. Kh. Boundary value problems for a loaded modified fractional-order moisture transfer equation with the Bessel operator and difference methods for their solution, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2020, vol. 30, issue 2, pp. 158–175 (in Russian). https://doi.org/10.35634/vm200202
24. Berezin I. S., Zhidkov N. P. *Metody vychislenii. Tom 2* (Calculation methods. Vol. 2), Moscow: GIFML, 1962.
25. Samarskii A. A. *Teoriya raznostnykh skhem* (Theory of difference schemes), Moscow: Nauka, 1989.
26. Ladyzhenskaya O. A. *Kraevye zadachi matematicheskoi fiziki* (Boundary value problems of mathematical physics), Moscow: Nauka, 1973.
27. Pskhu A. V. *Uravneniya v chastnykh proizvodnykh drobnogo poryadka* (Partial differential equations of fractional order), Moscow: Nauka, 2005.
28. Gekkieva S. Kh. *Boundary value problems for loaded parabolic equations with fractional time derivative*, Cand. Sci. (Phys.–Math.) Dissertation, Nal'chik, 2003, 75 p. (In Russian).
29. Arkhestova S. M., Shkhanukov–Lafishev M. Kh. Difference schemes for moisture transport equation of Aller–Lykov with non-local condition, *Izvestiya Kabardino-Balkarskogo Nauchnogo Tsentra Rossiiskoi Akademii Nauk*, 2012, no. 3 (47), p. 7–16 (in Russian). https://elibrary.ru/item.asp?id=17822798
30. Lafisheva M. M., Kerefov M. A., Dyshekova R. V. Difference schemes for the Aller–Lykov moisture transfer equations with a nonlocal condition, *Vladikavkazskii Matematicheskii Zhurnal*, 2017, vol. 19, issue 1, pp. 50–58 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/vmj607
31. Gekkieva S. Kh., Kerefov M. A. Boundary value problems for the generalized moisture transfer

equation, *Vestnik KRAUNTs. Fiz.-Mat. Nauki*, 2018, no. 1 (21), pp. 21–31 (in Russian). https://doi.org/10.18454/2079-6641-2018-21-1-21-31
32. Gekkieva S. Kh. Nonlocal boundary-value problem for the generalized Aller–Lykov moisture transport equation, *Vestnik KRAUNTs. Fiz.-Mat. Nauki*, 2018, no. 4 (24), pp. 19–28 (in Russian). https://doi.org/10.18454/2079-6641-2018-24-4-19-28
33. Kerefov M. A., Nakhusheva F. M., Gekkieva S. Kh. Boundary value problem for the Aller–Lykov moisture transport generalized equation with concentrated heat capacity, *Vestnik Samarskogo Universiteta. Estestvenno-Nauchnaya Seriya*, 2018, vol. 24, no. 3, pp. 23–29 (in Russian). https://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-3-23-29
34. Gekkieva S. Kh., Kerefov M. A. Dirichlet boundary value problem for Aller–Lykov moisture transfer equation with fractional derivative in time, *Ufa Mathematical Journal*, 2019, vol. 11, no. 2, pp. 71–81. https://doi.org/10.13108/2019-11-2-71
35. Kerefov M. A., Gekkieva S. Kh. Second boundary-value problem for the generalized Aller–Lykov equation, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2019, vol. 23, no. 4, pp. 607–621 (in Russian). https://doi.org/10.14498/vsgtu1686
36. Parovik R. I. Calculation specific functions of Mittag-Leffler in the computer mathematics Maple, *Vestnik KRAUNTs. Fiz.-Mat. Nauki*, 2012, no. 2 (5), pp. 51–61 (in Russian). https://doi.org/10.18454/2079-6641-2012-5-2-51-61

Received 23.12.2020

Kerefov Marat Aslanbievich, Candidate of Physics and Mathematics, Department of Applied Mathematics and Informatics, Kabardino-Balkarian State University named after H. M. Berbekov, ul. Chernyshevskogo, 173, Nalchik, 360004, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7442-5402
E-mail: kerefov@mail.ru

Gekkieva Sakinat Khasanovna, Candidate of Physics and Mathematics, Institute of Applied Mathematics and Automation of Kabardin-Balkar Scientific Center of RAS, ul. Shortanova, 89 a, Nalchik, 360000, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2135-2115
E-mail: gekkieva_s@mail.ru

Citation: M. A. Kerefov, S. Kh. Gekkieva. Numerical-analytical method for solving boundary value problem for the generalized moisture transport equation, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2021, vol. 31, issue 1, pp. 19–34.