УДК 531.38

© *А. В. Зыза*

ОБ ОБОБЩЕННЫХ УРАВНЕНИЯХ Н. КОВАЛЕВСКОГО В ДВУХ ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

В статье рассмотрена редукция уравнений Кирхгофа–Пуассона задачи о движении твердого тела под действием потенциальных и гироскопических сил и уравнений задачи о движении твердого тела в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона. Получены аналоги уравнений Н. Ковалевского в указанных задачах. Построены два новых частных решения полиномиального класса Стеклова–Ковалевского–Горячева редуцированных дифференциальных уравнений рассматриваемых задач. Полиномиальное решение задачи о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил характеризуется свойством: квадраты второй и третьей компонент вектора угловой скорости представлены квадратными многочленами от первой компоненты этого вектора, которая является эллиптической функцией времени. Полиномиальное решение уравнений движения твердого тела в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона характеризуется тем, что квадрат второй компоненты вектора угловой скорости — многочлен второго порядка, а квадрат третьей компоненты — многочлен четвертого порядка от первой компоненты этого вектора, которая находится в результате обращения гиперэллиптического интеграла.

Ключевые слова: уравнения Кирхгофа–Пуассона, уравнения Эйлера–Пуассона, уравнения Н. Ковалевского, полиномиальные решения, эффект Барнетта–Лондона.

DOI: 10.20537/vm190107

Введение

При моделировании движений одного твердого тела и системы связанных твердых тел, в которых деформацией можно пренебречь, рассматриваются системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Различные подходы в получении таких систем приведены в монографиях [2–4], [8, 23]. В математической постановке интегрирование дифференциальных уравнений динамики твердого тела может быть осуществлено либо с помощью метода Якоби [26] (при наличии дополнительных первых интегралов), либо с помощью рядов А. Пуанкаре [11, 21], которые описывают общее решение уравнений Эйлера–Пуассона. Однако, ряды А. Пуанкаре не получили дальнейшего развития в других задачах динамики твердого тела, так как они сходятся при весьма большом числе слагаемых.

Неинтегрируемость в квадратурах уравнений Эйлера–Пуассона [10] и уравнений Кирхгофа–Пуассона [1, 19] обосновывает исследование свойств дифференциальных уравнений динамики твердого тела на основе частных решений этих уравнений [25]. К настоящему времени построены многочисленные классы частных решений уравнений в указанных выше задачах. Метод построения частных решений основан на методе инвариантных соотношений автономных дифференциальных уравнений [20, 24] и его обобщений для неавтономных дифференциальных уравнений [17].

Обзор результатов по анализу различных методов инвариантных соотношений, полученных по построению частных решений, приведен в книге [5].

Особое место в динамике твердого тела занимают полиномиальные решения класса Стеклова–Ковалевского–Горячева (см. обзор [3]). Условия существования частных решений различных полиномиальных классов уравнений движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил изучались в работах [6, 12, 14, 15], а для уравнений движения гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона — в работах [13, 16].

Нахождение частных решений уравнений динамики твердого тела, как правило, сопровождалось редукцией исходных дифференциальных уравнений к системе уравнений меньшего порядка. Наиболее известный подход в редукции уравнений Эйлера–Пуассона указан в работе [27]. В задаче о движении тяжелого гиростата данная редукция обобщена в монографии [23]. В статье [7] проведена редукция уравнений Кирхгофа–Пуассона и уравнений движения гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона и показано, что в общем случае их применение для построения полиномиальных решений затруднительно.

В данной работе рассматривается редукция указанных выше уравнений в тех случаях, когда можно получить аналоги уравнений Н. Ковалевского [27]. Эффективность редуцированных уравнений показана с помощью построения их новых решений полиномиального класса Стеклова–Ковалевского–Горячева.

§ 1. Постановка задачи. Уравнения Н. Ковалевского

Рассмотрим уравнения Эйлера–Пуассона задачи о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой [23]:

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = A\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega} + s(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\nu}), \qquad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\omega}, \tag{1.1}$$

которые допускают первые интегралы

$$A\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega} - 2s(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{\nu}) = 2E, \qquad A\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu} = k, \qquad \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu} = 1. \tag{1.2}$$

В (1.1), (1.2) обозначено: $\boldsymbol{\omega} = (p,q,r)$ — вектор угловой скорости тела; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ — единичный вектор, указывающий направление силы тяжести; $A = \mathrm{diag}(A_1,A_2,A_3)$ — тензор инерции; $\boldsymbol{e} = (e_1,e_2,e_3) = \frac{\boldsymbol{OC}}{|\boldsymbol{OC}|}$ — единичный вектор, направленный из неподвижной точки O в центр тяжести C тела; s — произведение веса тела на расстояние от неподвижной точки до центра тяжести. Точка над переменными $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\nu}$ в уравнениях (1.1) обозначает относительную производную по времени t, а в интегралах из (1.2) E, k — произвольные постоянные.

Уравнения Н. Ковалевского получены при условии

$$\boldsymbol{e} = (1,0,0). \tag{1.3}$$

Запишем скалярные уравнения, вытекающие из (1.1), (1.2) при условии (1.3):

$$A_1\dot{p} = (A_2 - A_3)qr; \tag{1.4}$$

$$A_2\dot{q} = (A_3 - A_1)rp - s\nu_3, \quad A_3\dot{r} = (A_1 - A_2)pq + s\nu_2; \tag{1.5}$$

$$\dot{\nu}_1 = r\nu_2 - q\nu_3, \quad \dot{\nu}_2 = p\nu_3 - r\nu_1, \quad \dot{\nu}_3 = q\nu_1 - p\nu_2; \tag{1.6}$$

$$\nu_1 = \frac{1}{2s}\left(A_1p^2 + A_2q^2 + A_3r^2 - 2E\right); \tag{1.7}$$

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1, \quad A_1p\nu_1 + A_2q\nu_2 + A_3r\nu_3 = k. \tag{1.8}$$

Метод редукции уравнений Н. Ковалевского состоит в исключении из уравнений (1.6) компонент ν_2, ν_3, полученных при помощи уравнений (1.5), и значения ν_1 из (1.7).

Используя обозначения

$$Q(p) = \frac{1}{2}\left(\frac{A_2 - A_3}{A_1}A_3r^2 + (A_2 - A_1)p^2\right), \quad R(p) = \frac{1}{2}\left(\frac{A_3 - A_2}{A_1}A_2q^2 + (A_3 - A_1)p^2\right), \tag{1.9}$$

из (1.5), (1.7) получим значения для компонент вектора $\boldsymbol{\nu}$:

$$\nu_1 = \frac{1}{s}\left(\frac{A_1}{A_2 - A_3}(Q(p) - R(p)) - E\right), \quad \nu_2 = \frac{1}{s}q(p)Q'(p), \quad \nu_3 = \frac{1}{s}r(p)R'(p). \tag{1.10}$$

Соотношения (1.10) показывают, что в качестве независимой переменной выбрана первая компонента вектора угловой скорости p, и штрихом обозначена производная по этой компоненте.

Подставив ν_1, ν_2, ν_3 из (1.10) в уравнение Пуассона (1.6), получим уравнения Н. Ковалевского [27]

$$\begin{aligned}
&\left[2R(p)+(A_1-A_3)p^2\right]Q''(p)+[R'(p)+(A_1-A_3)p]Q'(p)+A_2R'(p)p-\\
&\qquad -A_1A_2(A_2-A_3)^{-1}(Q(p)-R(p))+A_2E=0,\\
&\left[2Q(p)+(A_1-A_2)p^2\right]R''(p)+[Q'(p)+(A_1-A_2)p]R'(p)+A_3Q'(p)p-\\
&\qquad -A_1A_3(A_2-A_3)^{-1}(Q(p)-R(p))+A_3E=0.
\end{aligned}\tag{1.11}$$

Дифференциальные уравнения (1.11) являются дифференциальными уравнениями второго порядка и допускают первые интегралы (1.8), записанные в данном случае так:

$$\begin{aligned}
&\left[2Q(p)+(A_1-A_2)p^2\right]R'(p)-\left[2R+(A_1-A_3)p^2\right]Q'(p)+A_1p(Q(p)-R(p))+\\
&\qquad +(A_3-A_2)A_1^{-1}E=(A_2-A_3)A_1^{-1}sk,\\
&A_2(A_2-A_3)\left[2Q(p)+(A_1-A_2)p^2\right](R'(p))^2+A_3(A_3-A_2)\left[2R(p)+(A_1-A_3)p^2\right]\times\\
&\times(Q'(p))^2+A_1A_2A_3\left(Q(p)-R(p)+(A_3-A_2)A_1^{-1}E\right)^2=A_1^{-1}A_2A_3(A_2-A_3)^2s^2.
\end{aligned}\tag{1.12}$$

Если найдено решение $Q=Q(p)$ и $R=R(p)$ уравнений (1.11), (1.12), то компоненты $q=q(p)$ и $r=r(p)$ определяем из формул (1.9) в виде

$$q^2(p)=A_1(A_2(A_3-A_2))^{-1}[(A_1-A_3)p^2+2R(p)],\ r^2(p)=A_1(A_3(A_2-A_3))^{-1}[(A_1-A_2)p^2+2Q(p)].$$

Зависимость $p=p(t)$ находим на основании уравнения (1.4):

$$\overset{\bullet}{p}=(A_2-A_3)A_1^{-1}\sqrt{q(p)r(p)}.$$

Система уравнений (1.11), (1.12) наиболее эффективна в задаче построения полиномиальных решений по переменной p.

Уравнения класса (1.11), (1.12) в случае тяжелого гиростата получил П. В. Харламов [23], который обобщил решения В. А. Стеклова и Н. Ковалевского и показал, что решение Д. Н. Горячева не распространяется на уравнения движения тяжелого гиростата.

В динамике твердого тела исследованы значительные классы полиномиальных решений классического типа и обобщенных типов. Полиномиальные решения для уравнений Кирхгофа–Пуассона построены в статьях [6, 12, 14, 15], а полиномиальные решения для уравнений движения твердого тела в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона — в статьях [13, 16]. При их получении не использовался метод Н. Ковалевского, так как компоненты единичного вектора вертикали входят в правые части уравнений движения и первые интегралы нелинейно.

В данной статье метод Н. Ковалевского применен для редукции дифференциальных уравнений в указанных выше задачах. Построены новые формы редуцированных уравнений и указаны их полиномиальные решения.

§ 2. Редукция уравнений Кирхгофа–Пуассона

Запишем уравнения движения твердого тела и первые интегралы в задаче о движении тела под действием потенциальных и гироскопических сил [9]:

$$A\overset{\bullet}{\boldsymbol{\omega}}=A\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\omega}\times B\boldsymbol{\nu}+s(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\nu}),\qquad \overset{\bullet}{\boldsymbol{\nu}}=\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\omega};\tag{2.1}$$

$$A\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu}-\frac{1}{2}(B\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu})=k,\quad A\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}-2s(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{\nu})=2E,\qquad \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}=1.\tag{2.2}$$

В уравнениях (2.1) в качестве потенциальной силы рассмотрена сила тяжести, а в качестве гироскопической силы — сила Лоренца, которая характеризуется матрицей B; вектор функции $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\nu}$ и вектор $\boldsymbol{e}$ имеют тот же механический смысл, что и в уравнениях (1.1). Это свойство относится к параметрам A и s.

Запишем уравнения (2.1) и интегралы (2.2) в скалярном виде при условиях

$$A = \mathrm{diag}(A_1, A_2, A_3), \quad B = \mathrm{diag}(B_1, 0, 0), \quad e_2 = 0, \quad e_3 = 0.$$

Получим

$$A_1 \overset{\bullet}{p} = (A_2 - A_3)qr; \tag{2.3}$$

$$A_2 \overset{\bullet}{q} = (A_3 - A_1)pr + B_1\nu_1 r - s\nu_3, \;\; A_3 \overset{\bullet}{r} = (A_1 - A_2)pq - B_1\nu_1 q + s\nu_2; \tag{2.4}$$

$$\overset{\bullet}{\nu}_1 = r\nu_2 - q\nu_3, \quad \overset{\bullet}{\nu}_2 = p\nu_3 - r\nu_1, \quad \overset{\bullet}{\nu}_3 = q\nu_1 - p\nu_2; \tag{2.5}$$

$$\begin{gathered} A_1p\nu_1 + A_2q\nu_2 + A_3r\nu_3 - \frac{1}{2}B_1\nu_1^2 = k, \;\; A_1p^2 + A_2q^2 + A_3r^2 - 2s\nu_1 = 2E, \\ \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1. \end{gathered} \tag{2.6}$$

Для нахождения аналогов уравнений Н. Ковалевского введем функции

$$q^2(p) = \widetilde{Q}(p), \quad r^2(p) = \widetilde{R}(p), \tag{2.7}$$

то есть полагаем, как и прежде, что в качестве независимой переменной выступает первая компонента вектора угловой скорости.

В силу (2.7) уравнение (2.3) запишем так:

$$\overset{\bullet}{p} = \mu_0^{-1}\sqrt{\widetilde{Q}(p)\widetilde{R}(p)}, \qquad \mu_0 = \frac{A_1}{A_2 - A_3}. \tag{2.8}$$

Из интеграла энергии, указанного в системе (2.6), следует

$$\nu_1(p) = (2s)^{-1}(A_1p^2 + A_2\widetilde{Q}(p) + A_3\widetilde{R}(p) - 2E). \tag{2.9}$$

Как и в методе предыдущего пункта, из уравнений (2.4), преобразованных с помощью (2.3) к дифференцированию по p, найдем

$$\nu_2 = \sqrt{\widetilde{Q}(p)}\varepsilon_2^{-1}(\widetilde{R}'(p) + \sigma_2\nu_1(p) - \mu_2 p), \;\; \nu_3 = \sqrt{\widetilde{R}(p)}\varepsilon_1^{-1}(-\widetilde{Q}'(p) + \sigma_1\nu_1(p) + \mu_1 p), \tag{2.10}$$

где

$$\mu_1 = \frac{2A_1(A_3 - A_1)}{A_2(A_2 - A_3)}, \quad \sigma_1 = \frac{2A_1B_1}{A_2(A_2 - A_3)}, \quad \varepsilon_1 = \frac{2A_1 s}{A_2(A_2 - A_3)},$$
$$\mu_2 = \frac{2A_1(A_1 - A_2)}{A_3(A_2 - A_3)}, \quad \sigma_2 = \frac{2A_1B_1}{A_3(A_2 - A_3)}, \quad \varepsilon_2 = \frac{2A_1 s}{A_3(A_2 - A_3)}.$$

Преобразуем уравнения Пуассона (2.5) к переменной p с помощью (2.8). Имеем

$$\begin{aligned} \nu_1'(p) &= \mu_0(\varepsilon_1\varepsilon_2)^{-1}(\varepsilon_1\widetilde{R}'(p) + \varepsilon_2\widetilde{Q}'(p) + \frac{4sA_1^2}{A_2A_3(A_2 - A_3)}p), \\ \nu_2'(p) &= \frac{\mu_0}{\sqrt{\widetilde{Q}(p)}}(-\nu_1(p) + p\varphi(p)), \quad \varphi(p) = \varepsilon_1^{-1}(-\widetilde{Q}(p) + \sigma_1\nu_1(p) + \mu_1 p), \\ \nu_3'(p) &= \frac{\mu_0}{\sqrt{\widetilde{R}(p)}}(\nu_1(p) - p\psi(p)), \quad \psi(p) = \varepsilon_2^{-1}(\widetilde{R}(p) + \sigma_2\nu_1(p) - \mu_2 p). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Внесем значения (2.9), (2.10) в уравнения (2.11). Первое уравнение этой системы становится тождеством, а два другие примут вид

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\varphi(p)\widetilde{R}'(p)+\frac{1}{\varepsilon_1}\widetilde{R}(p)[\mu_1+\mu_0\sigma_1(\psi(p)-\varphi(p))-\widetilde{Q}''(p)]-\mu_0(\nu_1(p)-p\psi(p))=0,\\
&\frac{1}{2}\psi(p)\widetilde{Q}'(p)+\frac{1}{\varepsilon_2}\widetilde{Q}(p)[-\mu_2+\mu_0\sigma_2(\psi(p)-\varphi(p))+R''(p)]-\mu_0(p\varphi(p)-\nu_1(p))=0.
\end{aligned}\tag{2.12}$$

Для получения замкнутой системы уравнений необходимо в уравнения (2.12) подставить функцию $\nu_1(p)$ из (2.9), а функции $\varphi(p)$ и $\psi(p)$ — из (2.11).

Уравнения (2.12) являются аналогами уравнений Н. Ковалевского (1.11) в задаче о движении намагниченного тяжелого твердого тела под действием силы Лоренца.

Интегралы этих уравнений таковы:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4s^2}(A_1p^2+A_2\widetilde{Q}(p)+A_3\widetilde{R}(p)-2E)^2+\frac{\widetilde{R}(p)}{\varepsilon_1^2}(\mu_1p+\sigma_1\nu_1(p)-\widetilde{Q}'(p))^2+\\
&\qquad\qquad+\frac{\widetilde{Q}(p)}{\varepsilon_2^2}(\widetilde{R}'(p)-\mu_2p+\sigma_2\nu_1(p))^2-1=0,\\
&\frac{A_1p}{2s}(A_1p^2+A_2\widetilde{Q}(p)+A_3\widetilde{R}(p)-2E)+\frac{A_2\widetilde{Q}(p)}{\varepsilon_2}(\widetilde{R}'(p)-\mu_2p+\sigma_2\nu_1(p))+\\
&\quad+\frac{A_3\widetilde{R}(p)}{\varepsilon_1}(\mu_1p+\sigma_1\nu_1(p)-\widetilde{Q}'(p))-\frac{B_1}{8s^2}(A_1p^2+A_2\widetilde{Q}(p)+A_3\widetilde{R}(p)-2E)^2-k=0.
\end{aligned}\tag{2.13}$$

Уравнения (2.13) определены из первых интегралов (2.6) с помощью формул (2.9), (2.10).

Уравнения (2.12) обобщаются на случай движения гиростата в поле силы тяжести и под действием лоренцевой силы. Не выписывая эти уравнения явно, укажем только пример их полиномиального решения. При этом будем считать, что вектор гиростатического момента находится на первой главной оси, то есть $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda,0,0)$.

Полиномиальное решение имеет вид

$$\begin{aligned}
q^2=\widetilde{Q}(p)=b_2p^2+b_1p+b_0,\quad r^2=\widetilde{R}(p)=c_2p^2+c_1p+c_0,\\
\nu_1=a_1p+a_0,\quad \nu_2=g_0\sqrt{\widetilde{Q}(p)},\quad \nu_3=f_0\sqrt{\widetilde{R}(p)},
\end{aligned}\tag{2.14}$$

где

$$b_2=-A_1\delta_1^{-1},\quad b_1=-4A_1^2\lambda(\delta_1\delta_2\delta_3)^{-1},$$
$$c_2=A_1\delta_1^{-1},\quad c_1=4A_1^2\lambda(\delta_1\delta_2\delta_4)^{-1},$$
$$b_0=-\left[(2A_1\delta_5\lambda)^2+(\delta_2\delta_4\delta_5)^2c_0-(2A_1B_1\delta_2)^2\right](\delta_2\delta_3\delta_5)^{-2},$$
$$a_1=\delta_5B_1^{-1},\quad a_0=\delta_5\lambda(B_1\delta_2)^{-1},\quad s=-2\lambda A_1^2B_1(\delta_2\delta_3\delta_4)^{-1},$$
$$g_0=\delta_3\delta_5(2A_1B_1)^{-1},\quad f_0=\delta_4\delta_5(2A_1B_1)^{-1}.$$

Здесь

$$\delta_1=A_2-A_3,\quad \delta_2=2A_1-A_2-A_3,\quad \delta_3=A_1+A_2-A_3,$$
$$\delta_4=A_1-A_2+A_3,\quad \delta_5=A_1-A_2-A_3.$$

Решение (2.14) будет действительным, например, при условии

$$b_0>0,\quad c_0>0.\tag{2.15}$$

Зависимость переменной p от времени получим из дифференциального уравнения (2.8).

Решение (2.8), (2.14), (2.15) характеризуется шестью независимыми параметрами задачи и решения: $A_1,A_2,A_3,B_1,\lambda,c_0$ и выражается через эллиптические функции времени.

Рассмотрим числовой пример решения (2.8), (2.14), (2.15) дифференциальных уравнений движения гиростата под действием силы тяжести и силы Лоренца. Пусть

$$A_1 = a, \quad A_2 = \frac{11}{10}a, \quad A_3 = \frac{3}{5}a, \quad B_1 = b, \quad \lambda = \frac{b}{81}, \quad c_0 = -\frac{b^2}{a^2} \tag{2.16}$$

$$(a > 0,\ b > 0).$$

Тогда из (2.14) получаем

$$\begin{aligned} &q^2(p) = \widetilde{Q}(p) = -2p^2 - \frac{160b}{729a}p + \frac{97293401b^2}{26040609a^2}, \\ &r^2(p) = \widetilde{R}(p) = 2p^2 + \frac{160b}{243a}p - \frac{b^2}{a^2}, \\ &\nu_1(p) = -\frac{7a}{10b}p - \frac{7}{243}, \quad \nu_2(p) = -\frac{21a}{40b}\sqrt{\widetilde{Q}(p)}, \quad \nu_3(p) = -\frac{7a}{40b}\sqrt{\widetilde{R}(p)}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Функцию $p = p(t)$ находим из уравнения (2.8) при

$$p \in \left(-\frac{(560+\sqrt{194900402})b}{10206a},\ -\frac{(80+\sqrt{124498})b}{486a}\right) \bigcup$$
$$\bigcup \left(\frac{(-80+\sqrt{124498})b}{486a},\ \frac{(-560+\sqrt{194900402})b}{10206a}\right).$$

На указанных интервалах подкоренные функции $\widetilde{Q}(p)$ и $\widetilde{R}(p)$ принимают положительные значения. Следовательно, действительность решения (2.8), (2.16), (2.17) установлена.

§ 3. Редукция уравнений движения твердого тела в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона

Рассмотрим задачу о движении твердого тела в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона [18, 22]. Уравнения движения запишем в векторном виде без учета ньютоновских сил:

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = A\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + B\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\nu} + s(\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{\nu}), \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}. \tag{3.1}$$

Уравнения (3.1) описывают движение нейтрального ферромагнетика (эффект Барнетта) и сверхпроводящего твердого тела (эффект Лондона) в магнитном поле. Магнитный момент, который возникает при указанных движениях, равен $B\boldsymbol{\omega}$, где B — некоторая симметричная матрица.

Остальные обозначения в уравнениях (3.1) совпадают с обозначениями уравнений (1.1). Уравнения (3.1) допускают только два первых интеграла:

$$\nu \cdot \nu = 1, \quad A\omega \cdot \nu = k_0, \tag{3.2}$$

где k_0 — постоянная интеграла площадей.

Для системы (3.1) отсутствует интеграл энергии, так как имеет место диссипация энергии — переход энергии магнитного поля в кинетическую энергию вращательного движения твердого тела.

Запишем первое уравнение из (3.1) и первые интегралы (3.2) в скалярном виде, полагая

$$A = \mathrm{diag}(A_1, A_2, A_3), \quad B = \mathrm{diag}(B_1, 0, 0), \quad e_2 = 0, \quad e_3 = 0.$$

Имеем

$$\begin{aligned} A_1\dot{p} = (A_2 - A_3)qr, \quad A_2\dot{q} &= (A_3 - A_1)pr - (B_1p + s)\nu_3, \\ A_3\dot{r} &= (A_1 - A_2)pq + (B_1p + s)\nu_2. \end{aligned} \tag{3.3}$$

К уравнениям (3.3) необходимо добавить уравнения Пуассона (2.5). Запишем первые интегралы уравнений (2.5), (3.3):

$$\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2=1, \quad A_1p\nu_1+A_2q\nu_2+A_3r\nu_3=k_0. \tag{3.4}$$

Положим $q^2(p)=Q_*(p)$, $r^2=R_*(p)$. Введем параметры

$$\mu^*=\frac{A_2-A_3}{A_1}, \ \ \widetilde{\mu}_1=\frac{A_2(A_2-A_3)}{2A_1}, \ \ \widetilde{\mu}_2=\frac{A_3(A_2-A_3)}{2A_1}$$

и функции

$$\begin{aligned} u(p)&=[(A_3-A_1)p-\widetilde{\mu}_1Q_*'](B_1p+s)^{-1},\\ v(p)&=[(A_2-A_1)p+\widetilde{\mu}_2R_*'](B_1p+s)^{-1}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Из интеграла моментов, указанного в (3.4), следует

$$\nu_1(p)=(k_0-A_2v(p)Q_*(p)-A_3u(p)R_*(p))(A_1p)^{-1}. \tag{3.6}$$

Запишем динамические уравнения (3.3), используя переменные $Q_*(p)$, $R_*(p)$ и $u(p)$, $v(p)$ из (3.5). Тогда

$$\overset{\bullet}{p}=\mu^*\sqrt{Q_*(p)R_*(p)}, \tag{3.7}$$

$$\nu_2(p)=v(p)\sqrt{Q_*(p)}, \quad \nu_3(p)=u(p)\sqrt{R_*(p)}. \tag{3.8}$$

Перейдем в уравнениях Пуассона (2.5) к дифференцированию по переменной p. В силу первого уравнения из (3.3) имеем

$$\nu_1'(p)=(r\nu_2-q\nu_3)(\mu^*qr)^{-1}, \quad \nu_2'(p)=(p\nu_3-r\nu_1)(\mu^*qr)^{-1},$$

$$\nu_3'(p)=(q\nu_1-p\nu_2)(\mu^*qr)^{-1}.$$

Подставим в эти уравнения величины $q(p)=\sqrt{Q_*(p)}$, $r(p)=\sqrt{R_*(p)}$, $\nu_1(p)$ из (3.6), $\nu_2(p)$ и $\nu_3(p)$ из (3.8):

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\mu^*Q_*'(p)v(p)+\mu^*Q_*(p)v'(p)-pu(p)+\nu_1(p)=0,\\ &\frac{1}{2}\mu^*R_*'(p)u(p)+\mu^*R_*(p)u'(p)+pv(p)-\nu_1(p)=0. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Для развернутого представления уравнений (3.9) подставим функции $\nu_1(p)$, $u(p)$, $v(p)$, определенные формулами (3.5), (3.6). Имеем

$$\begin{gathered} \mu^*\widetilde{\mu}_2A_1(B_1p+s)pQ_*(p)R_*''(p)+\\ +\widetilde{\mu}_2\left[\frac{1}{2}\mu^*A_1(B_1p+s)pQ_*'(p)-(\mu^*A_1B_1p+A_2(B_1p+s))Q_*\right]R_*'(p)+\\ +A_3(B_1p+s)((A_1-A_3)p+\widetilde{\mu}_1Q_*'(p))R_*(p)+A_1(B_1p+s)\left(\frac{1}{2}\mu^*(A_2-A_1)+\widetilde{\mu}_1\right)p^2Q_*'(p)+\\ +(A_1-A_2)(A_2(B_1p+s)-\mu^*A_1s)pQ_*(p)+(B_1p+s)^2k_0+A_1(A_1-A_3)(B_1p+s)p^3=0, \end{gathered} \tag{3.10}$$

$$\begin{gathered} -\mu^*\widetilde{\mu}_1A_1(B_1p+s)pR_*(p)Q_*''(p)+\\ +\widetilde{\mu}_1\left[-\frac{1}{2}\mu^*A_1(B_1p+s)pR_*'(p)+(\mu^*A_1B_1p-A_3(B_1p+s))R_*(p)\right]Q_*'(p)+\\ +A_2(B_1p+s)((A_2-A_1)p+\widetilde{\mu}_2R_*'(p))Q_*(p)+A_1(B_1p+s)\left(\frac{1}{2}\mu^*(A_3-A_1)+\widetilde{\mu}_2\right)p^2R_*'(p)+ \end{gathered}$$

$$+ (A_3 - A_1)(A_3(B_1p + s) + \mu^* A_1 s)pR_*(p) - (B_1p + s)^2 k_0 + A_1(A_2 - A_1)(B_1p + s)p^3 = 0.$$

При подстановке (3.6), (3.8) в геометрический интеграл из (3.4) получим первый интеграл уравнений (3.10):

$$Q_*(p)v^2(p) + R_*(p)u^2(p) + (k_0 - A_2Q_*(p)v(p) - A_3R_*(p)u(p))^2(A_1p)^{-2} - 1 = 0.$$

Уравнения (3.10) относятся к уравнениям класса Н. Ковалевского. Метод их получения отличается от метода получения уравнений Н. Ковалевского, поскольку в нем используются разные значения для функции $\nu_1(p)$ (для нахождения уравнений Н. Ковалевского использовался интеграл энергии, а для получения уравнений (3.10) — интеграл момента количества движения). Это связано с тем, что уравнения (2.5), (3.3) не допускают интеграл энергии.

Приведем пример решения полиномиальной структуры для уравнений (3.10). Это решение при условии $s = 0$ имеет вид

$$\begin{gathered} q^2 = Q_*(p) = \widetilde{b}_1p^2 + \widetilde{b}_0, \quad r^2 = R_*(p) = \widetilde{c}_2p^4 + \widetilde{c}_1p^2 + \widetilde{c}_0, \\ \nu_1 = \widetilde{a}_1p^3 + \widetilde{a}_0p, \quad \nu_2 = (\widetilde{g}_1p^2 + \widetilde{g}_0)\sqrt{Q_*(p)}, \quad \nu_3 = \widetilde{f}_0\sqrt{R_*(p)}, \end{gathered} \tag{3.11}$$

где

$$\begin{gathered} \widetilde{b}_1 = -\eta_1^2(3A_3)^{-2}, \quad \widetilde{b}_0 = -2\eta_2^2(3\widetilde{g}_1B_1A_3)^{-1}, \\ \widetilde{c}_2 = -\eta_1\widetilde{g}_1B_12^{-1}A_3^{-2}, \quad \widetilde{c}_1 = \eta_2\left(4A_1^2 - 30A_1A_3 + 45A_3^2)(\eta_1A_3^2\right)^{-1}, \\ \widetilde{c}_0 = 9\left[\eta_1^4\widetilde{g}_1B_1^3A_3 + 96(\eta_2^2\eta_3\eta_4)^2\right]\left((2\eta_1^2\eta_2)^2\widetilde{g}_1B_1A_3\right)^{-1}, \\ \widetilde{a}_1 = -\eta_1\widetilde{g}_1(3A_3)^{-1}, \quad \widetilde{a}_0 = 2\eta_2\left(2A_1^2 - 18A_1A_3 + 27A_3^2\right)(3\eta_1B_1A_3)^{-1}, \\ \widetilde{g}_0 = -12\eta_2\eta_3\eta_4(\eta_1^2B_1)^{-1}, \quad \widetilde{f}_0 = -2\eta_2(3B_1)^{-1}. \end{gathered}$$

Здесь $\eta_1 = 4A_1 - 9A_3, \quad \eta_2 = 2A_1 - 3A_3, \quad \eta_3 = A_1 - 3A_3, \quad \eta_4 = A_1 - 2A_3.$
Для решения (3.11) выполнено условие

$$A_2 = 3\eta_3A_3\eta_1^{-1}. \tag{3.12}$$

Зависимость переменной p от времени найдем из уравнения (3.7):

$$\overset{\bullet}{p} = \mu^*\sqrt{(\widetilde{b}_1p^2 + \widetilde{b}_0)(\widetilde{c}_2p^4 + \widetilde{c}_1p^2 + \widetilde{c}_0)}. \tag{3.13}$$

Решение (3.11)–(3.13) характеризуется независимыми параметрами: $A_1, A_3, B_1, \widetilde{g}_1$. Оно выражается в виде гиперэллиптических функций времени.

Укажем числовой пример решения (3.11)–(3.13).

Пусть

$$\begin{gathered} A_1 = a, \quad A_2 = \frac{759}{590}a, \quad A_3 = \frac{11}{10}a, \\ B_1 = -10b, \quad \widetilde{g}_1 = (ab^{-1})^3, \quad (a > 0,\, b > 0). \end{gathered} \tag{3.14}$$

Тогда из (3.11) находим

$$\begin{gathered} q^2(p) = Q_*(p) = -\frac{3481}{1089}p^2 + \frac{169b^2}{1650a^2}, \\ r^2(p) = R_*(p) = -\frac{2950a^2}{121b^2}p^4 + \frac{33085}{7139}p^2 + \frac{74858685399756b^2}{563154352475a^2}, \\ \nu_1 = \frac{59a^3}{33b^3}p^3 - \frac{19331a}{973500b}p, \ \nu_2 = \left(\frac{a^3}{b^3}p^2 - \frac{10764a}{87025b}\right)\sqrt{Q_*(p)}, \ \nu_3 = -\frac{13a}{150b}\sqrt{R_*(p)}. \end{gathered} \tag{3.15}$$

Функцию $p = p(t)$ получим из дифференциального уравнения (3.13). Так как подкоренные функции $Q_*(p)$ и $R_*(p)$ при $p = 0$ принимают положительные значения, то решение (3.13)–(3.15) действительно.

МЕХАНИКА 2019. Т. 29. Вып. 1

Заключение

В статье рассмотрены три задачи о движении твердого тела с неподвижной точкой: задача о движении тяжелого твердого тела, задача о движении твердого тела под действием потенциальных и гироскопических сил, задача о движении твердого тела в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона. Получены новые классы дифференциальных уравнений, которые являются обобщениями уравнений Н. Ковалевского. Эти уравнения представляют, в основном, математический интерес. Они могут найти применение при построении полиномиальных решений дифференциальных уравнений динамики типа решений В. А. Стеклова, Н. Ковалевского, Д. Н. Горячева, С. А. Чаплыгина.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борисов А.В. Необходимые и достаточные условия интегрируемости уравнений Кирхгофа // Регулярная и хаотическая динамика. 1996. Т. 1. № 2. С. 61–73.
2. Борисов А.В., Мамаев И.С. Динамика твердого тела. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 384 с.
3. Гашененко И.Н., Горр Г.В., Ковалев А.М. Классические задачи динамики твердого тела. Киев: Наук. думка, 2012. 401 с.
4. Голубев В.В. Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. М.: Гостехиздат, 1953. 287 с.
5. Горр Г.В. Инвариантные соотношения уравнений динамики твердого тела (теория, результаты, комментарии). М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2017. 424 с.
6. Горр Г.В., Зыза А.В. Полиномиальные решения в одной задаче о движении гиростата с неподвижной точкой // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 1998. № 6. С. 12–21.
7. Горр Г.В., Зыза А.В. О редукции дифференциальных уравнений в двух задачах динамики твердого тела // Труды Института прикладной математики и механики НАН Украины. 2009. Т. 18. С. 29–36.
8. Горр Г.В., Ковалев А.М. Движение гиростата. Киев: Наук.думка, 2013. 408 с.
9. Горр Г.В., Мазнев А.В. Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку. Донецк: ДонНУ, 2010. 364 с.
10. Зиглин С.Л. Ветвление решений и несуществование первых интегралов в гамильтоновой механике. I // Функц. анализ и его приложения. 1982. Т. 16. № 3. С. 30–41. http://mi.mathnet.ru/faa1637
11. Зубов В.И. Устойчивость движения (методы Ляпунова и их применение). М.: Высшая школа, 1984. 232 с.
12. Зыза А.В. Один случай полиномиальных решений уравнений Кирхгофа–Пуассона // Механика твердого тела. 2010. Вып. 40. С. 103–109.
13. Зыза А.В. Случай интегрируемости уравнений движения гиростата в магнитном поле // Труды Института прикладной математики и механики НАН Украины. 2012. Т. 24. С. 116–123.
14. Зыза А.В. О полиномиальных решениях с квадратичным инвариантным соотношением уравнений движения гиростата // Механика твердого тела. 2013. Вып. 43. С. 29–38.
15. Зыза А.В. Полиномиальные решения с линейным инвариантным соотношением уравнений Кирхгофа–Пуассона // Механика твердого тела. 2015. Вып. 45. С. 63–69.
16. Зыза А.В., Ткаченко Д.Н. Полиномиальные решения в задаче о движении гиростата в магнитном поле // Механика твердого тела. 2016. Вып. 46. С. 55–63.
17. Ковалев А.М., Горр Г.В., Неспирный В.Н. Инвариантные соотношения неавтономных дифференциальных уравнений с приложением в механике // Механика твердого тела. 2013. Вып. 43. С. 3–18.
18. Козлов В.В. К задаче о вращении твердого тела в магнитном поле // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1985. № 6. С. 28–33.
19. Козлов В.В., Онищенко Д.А. Неинтегрируемость уравнений Кирхгофа // Доклады академии наук СССР. 1982. Т. 266. № 6. С. 1298–1300.
20. Леви-Чивита Т., Амальди У. Курс теоретической механики. Т. 2. М.: Изд-во иностр. лит, 1951. 555 с.
21. Пуанкаре А. Избранные труды в трех томах. Т. 1. Новые методы небесной механики. М.: Наука, 1971. 768 с.
22. Самсонов В.А. О вращении твердого тела в магнитном поле // Известия Академии наук СССР. Механика твердого тела. 1984. № 6. С. 32–34.

23. Харламов П.В. Лекции по динамике твердого тела. Новосибирск: изд-во Новосибирского ун-та, 1965. 221 с.
24. Харламов П.В. Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений // Механика твердого тела. 1974. Вып. 6. С. 15–24.
25. Харламов П.В. Современное состояние и перспективы развития классических задач динамики твердого тела // Механика твердого тела. 2000. Вып. 30. С. 1–12.
26. Jacobi C.G.J. Sur la rotation d'un corps. Extrait d'une lettre adressée à l'académie des sciences de Paris // Gesammelte Werke. B. 2. Berlin: G. Reimer, 1882. S. 289–352.
27. Kowalewski N. Eine neue partikuläre Lösung der Differentialgleichungen der Bewegung eines schweren starren Körpers um einen festen Punkt // Mathematische Annalen. 1908. Vol. 65. No. 4. P. 528–537. https://doi.org/10.1007/BF01451168

Поступила в редакцию 23.02.2019

Зыза Александр Васильевич, к. ф.-м. н., доцент, кафедра высшей математики и методики преподавания математики, Донецкий национальный университет, 83001, Украина, г. Донецк, ул. Университетская, 24.
E-mail: z9125494@mail.ru

A. V. Zyza

On generalized N. Kovalevski equations in two problems of rigid body dynamics

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2019, vol. 29, issue 1, pp. 73–83 (in Russian).

Keywords: Kirchhoff–Poisson equation, Euler–Poisson equation, N. Kovalevski equation, polynomial solutions, Barnett–London effect.

MSC2010: 70E05, 70E17, 70E40

DOI: 10.20537/vm190107

In this paper we consider the reduction of Kirchhoff–Poisson equations related to the problem of rigid body motion under the action of potential and gyroscopic forces and also equations of the problem of rigid body motion taking into account the Barnett–London effect. For the above-mentioned problems, we obtain analogues of N. Kovalevski equations. In addition, for the above-mentioned problems we obtain two new particular solutions to the polynomial class of Steklov–Kovalevski–Goryachev reduced differential equations. The polynomial solution of the problem of gyrostat motion under the action of potential and gyroscopic forces is characterized by the following property: the squares of the second and the third vector component of angular velocity are quadratic polynomials of the first vector component that is an elliptic function of time. A polynomial solution of the equation of rigid body motion in a magnetic field (taking into account the Barnett–London effect) is characterized by the fact that the square of the second vector component of the angular velocity is the second-degree polynomial, while the square of the third component is the fourth-degree polynomial of the first vector component. The former is found as a result of an elliptic integral inversion.

REFERENCES

1. Borisov A.V. Neccessary and sufficient conditions for the integrability of the Kirchhoff equations, *Regular and Chaotic Dynamics*, 1996, vol. 1, no. 2, pp. 61–76 (in Russian).
2. Borisov A.V., Mamaev I.S. *Dinamika tverdogo tela* (The dynamics of a solid), Izhevsk: Regular and Chaotic Dynamics, 2001.
3. Gashenenko I.N., Gorr G.V., Kovalyov A.M. *Klassicheskie zadachi dinamiki tverdogo tela* (The classical problems of the dynamics of a solid), Kiev: Naukova Dumka, 2012.
4. Golubev V.V. *Lektsii po integrirovaniyu uravnenii dvizheniya tyazhelogo tverdogo tela okolo nepodvizhnoi tochki* (Lectures on the integration of the motion equations for a heavy rigid body near a fixed point), Moscow: Gostekhizdat, 1953.

5. Gorr G.V. *Invariantnye sootnosheniya uravnenii dinamiki tverdogo tela (teoriya, resul'taty, kommentarii)* (Invariant relations of the equations of dynamics of a solid (theory, results, comments)), Moscow–Izhevsk: Institute of Computer Science, 2017.
6. Gorr G.V., Zyza A.V. Polinomial solutions in a problem of the motion of a gyrostat with a fixed point, *Mechanics of Solids*, 1998, vol. 33, pp. 7–14.
7. Gorr G.V., Zyza A.V. About a reduction of the differential equations in two problems of dynamics of a solid, *Tr. Inst. Prikl. Mat. Mekh. Nats. Akad. Nauk. Ukr.*, 2009, vol. 18, pp. 29–36 (in Russian). https://zbmath.org/?q=an:1249.74044
8. Gorr G.V., Kovalev A.M. *Dvizhenie girostata* (The motion of a gyrostat), Kiev: Naukova Dumka, 2013.
9. Gorr G.V., Maznev A.V. *Dinamika girostata, imeyushchego nepodvizhnuyu tochku* (The dynamics of gyrostat with a fixed point), Donetsk: Donetsk National University, 2010.
10. Ziglin S.L. Branching of solutions and nonexistence of first integrals in Hamiltonian mechanics. I, *Functional Analysis and Its Applications*, 1982, vol. 16, no. 3, pp. 181–189. https://doi.org/10.1007/BF01081586
11. Zubov V.I. *Ustoichivost' dvizheniya (metody Lyapunova i ikh primenenie)* (Stability of a motion (Lyapunov's methods and its application), Moscow: Vysshaya shkola, 1984.
12. Zyza A.V. One case of polynomial solutions of Kirchhoff–Poisson equations, *Mekhanika Tverdogo Tela*, 2010, issue 40, pp. 103–109 (in Russian).
13. Zyza A.V. The case of integrability of gyrostat motion equation in magnetic field, *Tr. Inst. Prikl. Mat. Mekh. Nats. Akad. Nauk. Ukr.*, 2012, vol. 24, pp. 116–123 (in Russian). https://zbmath.org/?q=an:1324.70009
14. Zyza A.V. On polynomial solutions with the quadratic invariant relation of the motion equations of a gyrostat, *Mekhanika Tverdogo Tela*, 2013, issue 43, pp. 29–38 (in Russian).
15. Zyza A.V. Polynomial solution to Kirchhoff–Poisson equation with linear invariant relation, *Mekhanika Tverdogo Tela*, 2015, issue 45, pp. 63–69 (in Russian).
16. Zyza A.V., Tkachenko D.N. Polynominal solutions of gyrostat in the problem of gyrostat motion in magnetic field, *Mekhanika Tverdogo Tela*, 2016, issue 46, pp. 55–63 (in Russian).
17. Kovalev A.M., Gorr G.V., Nespirnyi V.N. Invariant relations for nonautonomous differential equations with application in mechanics, *Mekhanika Tverdogo Tela*, 2013, issue 43, pp. 3–18 (in Russian).
18. Kozlov V.V. To the problem about rotation of a solid in a magnetic field, *Izv. Akad. Nauk SSSR. Mekhanika Tverdogo Tela*, 1985, no. 6, pp. 28–33 (in Russian).
19. Kozlov V.V., Onishchenko D.A. Nonintegrability of Kirchhoff's equations, *Sov. Math. Dokl.*, 1982, vol. 26, pp. 495–498. https://zbmath.org/?q=an:0541.70009
20. Levi-Civita T., Amaldi U. *Lezioni di meccanica razionale. Volume secondo. Dinamica dei sistemi con un numero finito di gradi di libertà*, Bologna, 1927.
21. Poincaré H. *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, Paris: Gauthier-Villars et Fils, 1892.
22. Samsonov V.A. About solid's rotation in a magnetic field, *Izv. Akad. Nauk SSSR. Mekhanika Tverdogo Tela*, 1984, no. 6, pp. 32–34 (in Russian).
23. Kharlamov P.V. *Lektsii po dinamike tverdogo tela* (Lectures about the dynamics of a solid), Novosibirsk: Novosibirsk State University, 1965.
24. Kharlamov P.V. About system's invariant relations of differential equations, *Mekhanika Tverdogo Tela*, 1974, issue 6, pp. 15–24 (in Russian).
25. Kharlamov P.V. Modern state and development prospects of classical problems about dynamics of a solid, *Mekhanika Tverdogo Tela*, 2000, issue 30, pp. 1–12 (in Russian).
26. Jacobi C.G.J. Sur la rotation d'un corps. Extrait d'une lettre adressée à l'académie des sciences de Paris, *Gesammelte Werke. B. 2*, Berlin: G. Reimer, 1882, pp. 289–352.
27. Kowalewski N. Eine neue partikuläre Lösung der Differentialgleichungen der Bewegung eines schweren starren Körpers um einen festen Punkt, *Mathematische Annalen*, 1908, vol. 65, no. 4, pp. 528–537. https://doi.org/10.1007/BF01451168

Received 23.02.2019

Zyza Aleksandr Vasil'evich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Donetsk National University, ul. Universitetskaya, 24, Donetsk, 83001, Ukraine.
E-mail: z9125494@mail.ru