УДК 517.958

© *О. А. Нарманов*

ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Группой симметрии данного дифференциального уравнения называется группа преобразований, которые переводят решения уравнения в решения. Если известны инфинитезимальные образующие группы симметрий, то мы можем находить инвариантные решения относительно этой группы. Для систем уравнений с частными производным группу симметрий можно использовать, чтобы явно найти частные типы решений, которые сами являются инвариантными относительно некоторой подгруппы полной группы симметрий системы. Например, решения уравнения с частными производными от двух независимых переменных, инвариантные относительно заданной однопараметрической группы симметрий, находятся решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Класс инвариантных относительно группы решений включает в себя точные решения, имеющие непосредственное математическое или физическое значения.

В работе с помощью известных инфинитезимальных образующих некоторых групп симметрий двумерного уравнения теплопроводности найдены решения, инвариантные относительно этих групп. Сначала рассматривается двумерное уравнение теплопроводности с источником тепловыделения (с источником теплопоглощения), которое описывает процесс распространения тепла на плоской области. Для этого случая найдено семейство точных решений, зависящее от произвольных постоянных. Затем найдены инвариантные решения уравнения теплопроводности без источника тепла и без источника поглощения.

Ключевые слова: группа симметрий, уравнение теплопроводности, инфинитезимальная образующая, векторное поле.

DOI: 10.20537/vm190105

Введение

Пусть нам дано дифференциальное уравнение порядка

$$\Delta(x, u^{(m)}) = 0 \qquad (1)$$

от n независимых $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ и q зависимых переменных $u = (u^1, u^2, \dots, u^q)$, содержащее производные от u по x до порядка m.

Определение 1. Группа G преобразований, действующая на множестве M пространства независимых и зависимых переменных дифференциального уравнения, называется группой симметрий уравнения (1), если для каждого решения $u = f(x)$ уравнения (1) и для $g \in G$ такого, что определено $g \circ f$, функция $\tilde{u} = g \circ f$ также является решением уравнения.

Для уравнения теплопроводности $u_t = u_{xx}$ группа сдвигов

$$(x, t, u) \to (x + as, t + bs, u), \quad s \in \mathbb{R},$$

является группой симметрий, поскольку если функция $u = f(x)$ является решением, то функция $u = f(x - as, t - bs)$ также является решением уравнения теплопроводности.

Одним из преимуществ знания группы симметрий дифференциальных уравнений является то, что если нам известно решение $u = f(x)$, то в соответствии с определением $\tilde{u} = g \circ f$ тоже решение для любого элемента g группы G, так что у нас есть возможность построить целое семейство решений, подвергая известное решение действию всевозможных элементов группы.

Методы группового анализа широко используются для исследования уравнений в частных производных и для интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. В работах [1–6] рассматриваются вопросы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений и линейных дифференциальных уравнений в частных производных на основе известных инфинитезимальных симметрий; в частности, в работе [3] метод понижения порядка обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием инфинитезимальных симметрий допускаемой алгебры Ли модифицирован для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром, допускающих приближенные алгебры Ли инфинитезимальных симметрий.

Нахождению групп симметрий дифференциальных уравнений и их применению для исследований посвящены многочисленные исследования [7–10]. В работе [8] разработан вычислительный метод, явно определяющий полную группу симметрий произвольного дифференциального уравнения в частных производных. В работе [9] рассматриваются вопросы групповой классификации дифференциальных уравнений и их решений. Даются примеры применения техники группового анализа к конкретным системам дифференциальных уравнений. В работе [7] найдена алгебра Ли инфинитезимальных образующих группы симметрий для двумерного и трехмерного уравнения теплопроводности. Алгебра Ли инфинитезимальных образующих группы симметрий для одномерного уравнения теплопроводности использована в работе [10].

§ 1. Основная часть

Рассмотрим двумерное уравнение теплопроводности

$$u_t = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_i(u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + Q(u), \tag{2}$$

где $u = u(t, x_1, x_2) \geqslant 0$ — температурная функция, $k_i(u) \geqslant 0$, $Q(u)$ — функции от температуры u. Функция $Q(u)$ описывает процесс тепловыделения, если $Q(u) > 0$, и процесс теплопоглощения, если $Q(u) < 0$. Исследования показывают, что коэффициенты теплопроводности $k_1(u), k_2(u)$ в достаточно широком диапазоне изменения параметров могут быть описаны степенной функцией температуры, т. е. имеет вид $k_i(u) = u^\sigma$.

Рассмотрим случай $k_1(u) = k_2(u) = u$, $Q(u) = u$. В этом случае уравнение (2) имеет следующий вид:

$$u_t = u\Delta u + (\nabla u)^2 + u, \tag{3}$$

где $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$ — оператор Лапласа, $\nabla u = \left\{\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}\right\}$ — градиент функции u.

Как показано в работе [7], следующие векторные поля являются инфинитезимальными образующими группы симметрий для уравнения (3):

$$X_1 = x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2} + 2u\frac{\partial}{\partial u}, \qquad X_2 = \exp(-t)\frac{\partial}{\partial t} + \exp(-t)u\frac{\partial}{\partial u}. \tag{4}$$

Это означает, что потоки этих векторных полей порождают группу преобразований пространства переменных (t, x_1, x_2, u), которые переводят решения уравнения (3) в решения.

Теорема 1. *Инвариантными решениями уравнения* (3) *относительно группы преобразований, порожденных векторными полями* (4)*, являются функции*

$$u(t, x_1, x_2) = C_2\frac{e^t}{2}\left[C_1x_1^4 + x_1^3x_2 - 6C_1x_1^2x_2^2 - x_1x_2^3 + C_1x_2^4\right]^{1/2},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Доказательство. Потоки векторных полей X_1, X_2 порождают следующие группы преобразований соответственно:

$$(t, x_1, x_2, u) \to (t, x_1e^s, x_2e^s, ue^{2s}), \quad s \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

$$(t, x_1, x_2, u) \to \left(\ln(e^t + s), x_1, x_2, \frac{u(e^t + s)}{e^t}\right), \quad s \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Мы найдем решения уравнения (3), инвариантные относительно групп преобразований (5), (6). Для этого сначала находим инвариантные функции этих преобразований.

Известно [8, с. 117], что гладкая функция $f\colon M \to R$ является инвариантной функцией группы преобразований G, действующей на многообразии M, тогда и только тогда, когда $Xf = 0$ для каждой инфинитезимальной образующей X группы G.

Используя этот критерий, мы находим, что функции

$$I_1 = \frac{(x_1 + x_2)\exp(t/2)}{\sqrt{u}}, \quad I_2 = \frac{x_1}{x_2}$$

являются инвариантными функциями группы преобразований (5), (6), что вытекает из следующих равенств: $X_1(I_1) = 0$, $X_1(I_2) = 0$, $X_2(I_1) = 0$, $X_2(I_2) = 0$.

Решение уравнения (3) ищем в виде

$$u(t, x_1, x_2) = e^t \frac{(x_1 + x_2)^2}{2} V(\xi), \tag{7}$$

где $\xi = \dfrac{x_1}{x_2}$. Тогда для функции $V(\xi)$ получим следующее дифференциальное уравнение второго порядка:

$$f(\xi)VV'' + f(\xi)V'^2 + 2g(\xi)VV' + 12V^2 = 0, \tag{8}$$

где функции $f(\xi)$, $g(\xi)$ определяются следующими равенствами:

$$f(\xi) = (\xi + 1)^2(\xi^2 + 1), \quad g(\xi) = (\xi + 1)(\xi^2 - 3\xi + 4). \tag{9}$$

Вводя новую функцию $z(\xi)$ в уравнении (8) посредством равенства $z(\xi) = V^2(\xi)$, получим следующее линейное уравнение второго порядка относительно $z(\xi)$:

$$f(\xi)\frac{d^2 z}{d\xi^2} + 2g(\xi)\frac{dz}{d\xi} + 24z = 0. \tag{10}$$

Делая замену $w(\xi) = z(\xi)\exp\left(\displaystyle\int \frac{g(\xi)}{f(\xi)}\,d\xi\right)$ в уравнении (10), получим уравнение

$$w'' + I(\xi)w = 0,$$

где $I = \dfrac{24}{f} - \dfrac{g^2}{f^2} - \left(\dfrac{g}{f}\right)'$. Затем, делая замену $p(\xi) = \dfrac{w'(\xi)}{w(\xi)}$, получим уравнение

$$p' + p^2 = -I(\xi).$$

Производя выкладки, получаем, что $I(\xi) = \dfrac{15}{(\xi^2 + 1)^2}$. Таким образом, мы получаем следующее уравнение Риккати:

$$p' + p^2 = -\frac{15}{(\xi^2 + 1)^2}. \tag{11}$$

В нашем случае это уравнение интегрируется явно.

Общим решением уравнения (11) является следующая функция:

$$p(\xi) = \frac{C_1\xi^5 + 10C_1\xi^3 + 5\xi^2 - 15C_1\xi - 1}{(\xi^2 + 1)(C_1\xi^4 + \xi^3 - 6C_1\xi^2 - \xi + C_1)}.$$

Теперь решаем уравнение $w' = wp$; получим, что $w(\xi) = C_2\exp\left(\displaystyle\int p(\xi)\,d\xi\right)$. Интегрируя, находим, что

$$\int p(\xi)\,d\xi = -\frac{3}{2}\ln(\xi^2 + 1) + \ln(C_1\xi^4 + \xi^3 - 6C_1\xi^2 - \xi + C_1).$$

Таким образом, мы получаем

$$w(\xi)=C_2\frac{C_1\xi^4+\xi^3-6C_1\xi^2-\xi+C_1}{(\xi^2+1)^{3/2}}. \tag{12}$$

Интегрируя выражение $\displaystyle\int\frac{g(\xi)}{f(\xi)}\,d\xi$, находим, что

$$\int\frac{g(\xi)}{f(\xi)}\,d\xi=-\frac{3}{2}\ln(\xi^2+1)+4\ln(\xi+1). \tag{13}$$

Используя замену $w(\xi)=z(\xi)\exp\left(\displaystyle\int\frac{g(\xi)}{f(\xi)}\,d\xi\right)$, из (12) и (13) получаем

$$z(\xi)=C_2\frac{C_1\xi^4+\xi^3-6C_1\xi^2-\xi+C_1}{(\xi+1)^4}.$$

Теперь, учитывая равенство $z(\xi)=V^2(\xi)$, находим функцию $V(\xi)$:

$$V(\xi)=C_2\frac{(C_1\xi^4+\xi^3-6C_1\xi^2-\xi+C_1)^{1/2}}{(\xi+1)^2}, \tag{14}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

В результате, поставляя выражение (14) для $V(\xi)$ в (7) и учитывая равенство $\xi=\dfrac{x_1}{x_2}$, получим следующее семейство решений уравнения (3):

$$u(t,x_1,x_2)=C_2\frac{e^t}{2}\left[C_1x_1^4+x_1^3x_2-6C_1x_1^2x_2^2-x_1x_2^3+C_1x_2^4\right]^{1/2}, \tag{15}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Инвариантность полученного семейства решений относительно групп преобразований (5), (6) легко проверяется. □

Теперь рассмотрим случай, когда есть поглощение тепла: $k_1(u)=k_2(u)=u$, $Q(u)=-u$. В этом случае уравнение (2) имеет следующий вид:

$$u_t=u\Delta u+(\nabla u)^2-u. \tag{16}$$

Как показано в работе [7], следующие векторные поля являются инфинитезимальными образующими группы симметрий для уравнения (16):

$$X_1=x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial}{\partial x_2}+2u\frac{\partial}{\partial u},\qquad X_2=\exp(t)\frac{\partial}{\partial t}-\exp(t)u\frac{\partial}{\partial u}. \tag{17}$$

Теорема 2. *Инвариантными решениями уравнения (16) относительно группы преобразований, порожденных векторными полями (17), являются функции*

$$u(t,x_1,x_2)=C_2\frac{e^{-t}}{2}\left[C_1x_1^4+x_1^3x_2-6C_1x_1^2x_2^2-x_1x_2^3+C_1x_2^4\right]^{1/2},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Потоки векторных полей X_1, X_2 порождают следующие группы преобразований соответственно:

$$(t,x_1,x_2,u)\to(t,x_1e^s,x_2e^s,ue^{2s}),\quad s\in\mathbb{R}, \tag{18}$$

$$(t,x_1,x_2,u)\to\big(-\ln(e^{-t}-s),x_1,x_2,ue^t(e^{-t}-s)\big),\quad s\in\mathbb{R}. \tag{19}$$

Используя вышеприведенный критерий, мы находим, что функции

$$I_1 = \frac{(x_1+x_2)\exp(-t/2)}{\sqrt{u}}, \quad I_2 = \frac{x_1}{x_2}$$

являются инвариантными функциями группы преобразований, порожденных потоками векторных полей (17).

Решение уравнения (16) ищем в виде

$$u(t,x_1,x_2) = e^{-t}\frac{(x_1+x_2)^2}{2}V(\xi), \tag{20}$$

где $\xi = \dfrac{x_1}{x_2}$. Тогда для функции $V(\xi)$ получим дифференциальное уравнение второго порядка, совпадающее с уравнением (8), решение которого мы знаем. Таким образом, в этом случае мы получим следующее семейство решений уравнения (16):

$$u(t,x_1,x_2) = C_2\frac{e^{-t}}{2}\left[C_1x_1^4 + x_1^3x_2 - 6C_1x_1^2x_2^2 - x_1x_2^3 + C_1x_2^4\right]^{1/2},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Инвариантность полученного семейства решений относительно группы преобразований (18), (19) легко проверяется. □

Теперь рассмотрим случай, когда нет источника тепла: $k_1(u) = k_2(u) = u$, $Q(u) = 0$. В этом случае уравнение (2) имеет следующий вид:

$$u_t = u\Delta u + (\nabla u)^2. \tag{21}$$

Как показано в работе [7], следующие векторные поля являются инфинитезимальными образующими группы симметрий для уравнения (21):

$$X_1 = 2t\frac{\partial}{\partial t} + x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2}, \qquad X_2 = x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2} + 2u\frac{\partial}{\partial u}. \tag{22}$$

Теорема 3. *Инвариантными решениями уравнения* (21) *относительно группы преобразований, порожденных векторными полями* (22)*, являются функции*

$$u(t,x_1,x_2) = \frac{(x_1+x_2)^2}{2t}V(\xi), \tag{23}$$

где $\xi = \dfrac{x_1}{x_2}$, $V(\xi)$ *— общее решение дифференциального уравнения*

$$f(\xi)VV'' + f(\xi)V'^2 + 2g(\xi)VV' + 12V^2 + 2V = 0, \tag{24}$$

функции $f(\xi)$, $g(\xi)$*, как в случае уравнения с источником, определяются равенствами* (9).

Доказательство. Потоки векторных полей X_1, X_2 порождают следующие группы преобразований пространства переменных (t,x_1,x_2,u), относительно которых решения уравнения (21) являются инвариантными:

$$(t,x_1,x_2,u) \to (te^{2s}, x_1e^s, x_2e^s, u), \quad s\in\mathbb{R},$$

$$(t,x_1,x_2,u) \to (t, x_1e^s, x_2e^s, ue^{2s}), \quad s\in\mathbb{R}.$$

Функции $I_1 = \dfrac{(x_1+x_2)^2}{2tu}$, $I_2 = \dfrac{x_1}{x_2}$ являются инвариантными функциями группы преобразований, порожденных потоками векторных полей (22), что вытекает из следующих равенств: $X_1(I_1) = 0$, $X_1(I_2) = 0$, $X_2(I_1) = 0$, $X_2(I_2) = 0$.

МАТЕМАТИКА 2019. Т. 29. Вып. 1

Решение уравнения (21) ищем в виде

$$u(t,x_1,x_2)=\frac{(x_1+x_2)^2}{2t}V(\xi),$$

где $\xi=\dfrac{x_1}{x_2}$. Тогда для функции $V(\xi)$ получим дифференциальное уравнение второго порядка (24), где функции $f(\xi)$, $g(\xi)$, как в случае уравнения с источником, определяются равенствами (9). □

Выводы. В уравнении (3) есть источник тепловыделения, поэтому в каждой точке области переменных (x_1,x_2), отличных от точек $(0,0)$, температурная функция (15) возрастает экспоненциально при возрастающем t.

В уравнении (16) есть источник поглощения, в каждой точке области переменных (x_1,x_2), отличных от точек $(0,0)$, температурная функция (20) убывает экспоненциально при возрастающем t.

Уравнение (24) явно не интегрируется. Однако численное исследование показывает, что решение уравнения (24) ограничено (см. рис. 1), как и следует из физического смысла уравнения. Поэтому в каждой точке области переменных (x_1,x_2) температурная функция (23) монотонно убывает при возрастании t.

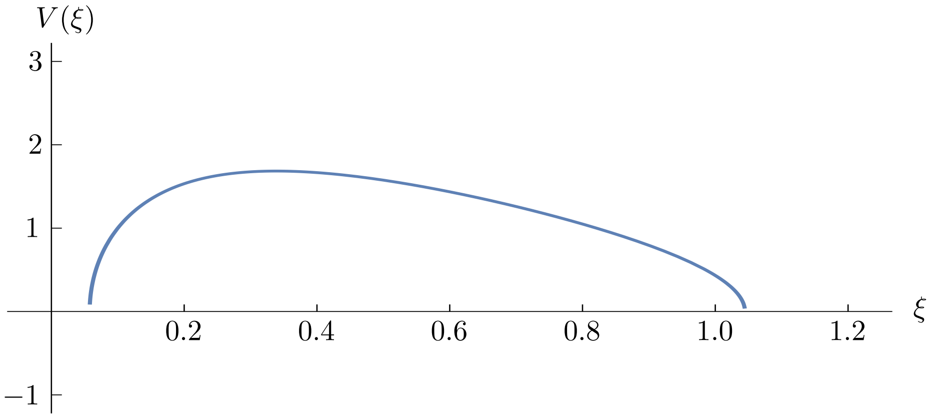

Рис 1. График решения уравнения (24) (функции $V(\xi)$) при $V(0.1)=1$, $V'(0.1)=10$

В заключение покажем еще одно семейство инвариантных решений уравнения (21), которое часто используется в приложениях. Для этого используем инфинитезимальную симметрию уравнения (21), которое задается следующим векторным полем:

$$X_1=-x_2\frac{\partial}{\partial x_1}+x_1\frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Поток этого векторного поля состоит из вращений вокруг начала координат плоскости (x_1,x_2), которые определяют следующую однопараметрическую группу преобразований:

$$(t,x_1,x_2,u)\to(t,x_1\cos s-x_2\sin s,x_1\sin s+x_2\cos s,u),\quad s\in\mathbb{R}.$$

Инвариантными функциями этих вращений являются функции

$$I_1=uf(t),\qquad I_2=g(t)(x_1^2+x_2^2)^{1/2},$$

где $f(t),g(t)$ — некоторые гладкие функции. Используя эти инвариантные функции, мы можем найти большое семейство инвариантных решений уравнения (21) относительно групп вращений вокруг начала координат плоскости (x_1,x_2). Мы ищем решение в виде

$$u(t,x_1,x_2)=t^{\alpha}V(\xi),\quad \xi=t^{-\beta}(x_1^2+x_1^2)^{1/2}, \tag{25}$$

чтобы получить решения типа «автомодельные» [11]. Подставляя (25) в уравнение (21), получим следующее отношение: $2\alpha - 2\beta = \alpha - 1$. Для решений этого типа обычно требуется условие постоянства энергии, т. е. условие

$$\iint_{\mathbb{R}^2} u(t, x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 = \text{const} = E. \tag{26}$$

Из условия (26) получим равенство $\alpha + 2\beta = 0$. Таким образом, получим, что $\alpha = -1/2$, $\beta = 1/4$. В результате получим следующее дифференциальное уравнение для функции $V(\xi)$:

$$\frac{1}{\xi}(\xi V V')' + \frac{1}{4}V'\xi + \frac{1}{2}V = 0.$$

Это уравнение эквивалентно следующему уравнению:

$$(\xi V V')' + \frac{1}{4}(V\xi^2)' = 0. \tag{27}$$

Полагая $V \neq 0$ и считая равной нулю постоянную интегрирования, из уравнения (27) получим следующее выражение для V:

$$V(\xi) = \frac{1}{8}[C^2 - \xi^2].$$

Поставляя выражение для V в (25), получим следующее решение, инвариантное относительно вращений вокруг начала координат плоскости (x_1, x_2):

$$u(t, x_1, x_2) = \frac{1}{8\sqrt{t}}\left[C^2 - \frac{x_1^2 + x_2^2}{\sqrt{t}}\right].$$

Если учесть, что $u(t, x_1, x_2) \geqslant 0$, функция $u(t, x_1, x_2)$ является финитной по $x = (x_1, x_2)$ и бесконечно дифференцируемой в области $\dfrac{x_1^2 + x_2^2}{\sqrt{t}} < C^2$. Поэтому интеграл в (26) является конечным. Если ввести переменные $\xi^1 = \dfrac{x_1}{t^\beta}$, $\xi_2 = \dfrac{x_2}{t^\beta}$, то равенство (26) примет вид

$$\iint_{\xi_1^2 + \xi_2^2 \leqslant C^2} V(\xi)\, d\xi_1\, d\xi_2 = \text{const} = E.$$

Откуда получим, что

$$C = \frac{2}{\pi^{1/4}}E^{1/4}.$$

Автор выражает признательность редактору, замечания которого помогли устранить неточности и улучшить текст статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ли С. Симметрии дифференциальных уравнений. Т. 1. Лекции о дифференциальных уравнениях с известными инфинитезимальными преобразованиями. М.–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2011.
2. Ли С. Симметрии дифференциальных уравнений. Т. 3. Геометрия контактных преобразований. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2011.
3. Гайнетдинова А.А. Интегрирование систем обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром, допускающих приближенные алгебры Ли // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2018. Т. 28. Вып. 2. С. 143–160. https://doi.org/10.20537/vm180202
4. Ayub M., Khan M., Mahomed F.M. Second-order systems of ODEs admitting three-dimensional Lie algebras and integrability // Journal of Applied Mathematics. 2013. Vol. 2013. Article ID 147921. 15 p. https://doi.org/10.1155/2013/147921

5. Gainetdinova A.A., Gazizov R.K. Integrability of systems of two second-order ordinary differential equations admitting four-dimensional Lie algebras // Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science. 2017. Vol. 473. Issue 2197. 20160461. https://doi.org/10.1098/rspa.2016.0461
6. Wafo Soh C., Mahomed F.M. Reduction of order for systems of ordinary differential equations // Journal of Nonlinear Mathematical Physics. 2004. Vol. 11. Issue 1. P. 13–20. https://doi.org/10.2991/jnmp.2004.11.1.3
7. Дородницын В.А., Князева И.В., Свирщевский С.Р. Групповые свойства уравнения теплопроводности с источником в двумерном и трехмерном случаях // Дифференциальные уравнения. 1983. Т. 19. № 7. С. 1215–1223. http://mi.mathnet.ru/de4904
8. Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989. 639 с.
9. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 398 с.
10. Narmanov O.A. Lie algebra of infinitesimal generators of the symmetry group of the heat equation // Journal of Applied Mathematics and Physics. 2018. Vol. 6. No. 2. P. 373–381. https://doi.org/10.4236/jamp.2018.62035
11. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987. 481 с.

Поступила в редакцию 20.12.2018

Нарманов Отабек Абдигаппарович, докторант, кафедра алгоритмизации и математического моделирования, Ташкентский университет информационных технологий, 100200, Узбекистан, г. Ташкент, пр. А. Темура, 108.
E-mail: otabek.narmanov@mail.ru

O. A. Narmanov

Invariant solutions of the two-dimensional heat equation

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2019, vol. 29, issue 1, pp. 52–60 (in Russian).

Keywords: symmetry group, heat equation, infinitesimal generator, vector field.

MSC2010: 35Q79, 35K05

DOI: 10.20537/vm190105

The symmetry group of a given differential equation is the group of transformations that translate the solutions of the equation into solutions. If the infinitesimal generators of symmetry groups are known, then we can find solutions that are invariant under this group. For systems of partial differential equations, the symmetry group can be used to explicitly find particular types of solutions that are themselves invariant under a certain subgroup of the full symmetry group of the system. For example, solutions of an equation with partial derivatives of two independent variables, invariant under a given one-parameter symmetry group, are found by solving a system of ordinary differential equations. The class of solutions that are invariant with respect to a group includes many exact solutions that have immediate mathematical or physical meaning. In this paper, using the well-known infinitesimal generators of some symmetry groups of the two-dimensional heat conduction equation, solutions are found that are invariant with respect to these groups. First we consider the two-dimensional heat conduction equation with a source that describes the process of heat propagation in a flat region. For this case, a family of exact solutions was found, depending on an arbitrary constant. Then invariant solutions of the two-dimensional heat conduction equation without source are found.

REFERENCES

1. Lie S., Sheffers G. *Simmetrii differentsial'nykh uravnenii. Tom 1. Lektsii o differentsial'nykh uravneniyakh s izvestnymi infinitezimal'nymi preobrazovaniyami* (Symmetries of differential equations. Vol. 1. Lectures on differential equations with known infinitesimal transformations), Moscow–Izhevsk: Regular and Chaotic Dynamics, 2011.
2. Lie S., Sheffers G. *Simmetrii differentsial'nykh uravnenii. Tom 3. Geometriya kontaktnykh preobrazovanii* (Symmetries of differential equations. Vol. 3. Geometry of contact transformations), Izhevsk: Regular and Chaotic Dynamics, 2011.
3. Gainetdinova A.A. Integration of systems of ordinary differential equations with a small parameter which admit approximate Lie algebras, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2018, vol. 28, issue 2, pp. 143–160 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm180202
4. Ayub M., Khan M., Mahomed F.M. Second-order systems of ODEs admitting three-dimensional Lie algebras and integrability, *Journal of Applied Mathematics*, 2013, vol. 2013, article ID 147921, 15 p. https://doi.org/10.1155/2013/147921
5. Gainetdinova A.A., Gazizov R.K. Integrability of systems of two second-order ordinary differential equations admitting four-dimensional Lie algebras, *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science*, 2017, vol. 473, issue 2197, 20160461. https://doi.org/10.1098/rspa.2016.0461
6. Wafo Soh C., Mahomed F.M. Reduction of order for systems of ordinary differential equations, *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, 2004, vol. 11, issue 1, pp. 13–20. https://doi.org/10.2991/jnmp.2004.11.1.3
7. Dorodnitsyn V.A., Knyazeva I.V., Svirshchevskij S.R. Group properties of the heat-conduction equation with a source in the two- and three-dimensional cases, *Differential Equations*, 1983, vol. 19, pp. 901–908. https://zbmath.org/?q=an:0541.35036
8. Olver P.J. *Applications of Lie groups to differential equations*, Springer, 1986, 513 p.
9. Ovsiannikov L.V. *Group analysis of differential equations*, Academic Press, 1982, 432 p. https://doi.org/10.1016/C2013-0-07470-1
10. Narmanov O.A. Lie algebra of infinitesimal generators of the symmetry group of the heat equation, *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 2018, vol. 6, no. 2, pp. 373–381. https://doi.org/10.4236/jamp.2018.62035
11. Samarskii A.A., Galaktionov V.A., Kurdyumov S.P., Mikhailov A.P. *Rezhimy s obostreniem v zadachakh dlya kvazilineinykh parabolicheskikh uravnenii*, Moscow: Nauka, 1987, 481 p.

Received 20.12.2018

Narmanov Otabek Abdigapparovich, Doctoral Student, Department of Algorithms and Mathematical Modelling, Tashkent University of Information Technologies, pr. A. Temura, 108, Tashkent, 100200, Uzbekistan.
E-mail: otabek.narmanov@mail.ru