УДК 517.957

© *А. С. Запов*

ОБ ОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ В ТЕОРИИ УПРУГОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

В работе рассматривается краевая задача для нелинейного эволюционного уравнения в частных производных, приведенная в перенормированном виде. Данная краевая задача возникает в механике роторных систем и описывает поперечные колебания вращающегося ротора постоянного сечения из вязкоупругого материала, концы которого шарнирно закреплены. Изучен вопрос об устойчивости нулевого состояния равновесия, найдено критическое значение скорости вращения ротора, при превышении которого возникают незатухающие колебания. Найдены точные решения изучаемой краевой задачи в виде одномодовых по пространственной переменной и периодической по времени функций. Выведены условия устойчивости таких решений, а также в ряде случаев дан анализ условий устойчивости. В работе показано отсутствие многомодовых периодических по времени решений. Проанализированы базовые, но важные с прикладной точки зрения частные случаи данной нелинейной краевой задачи. Все результаты анализа нелинейной краевой задачи носят аналитический характер. Их вывод опирается на качественную теорию бесконечномерных динамических систем.

Ключевые слова: нелинейное эволюционное уравнение, устойчивость, колебания роторных систем, периодические решения.

DOI: 10.20537/vm190103

В работе рассматривается задача о поперечных колебаниях ротора, возникающих под воздействием его собственного вращения с постоянной скоростью ω. Как правило, при анализе задач о колебаниях ротора ω играет роль основного управляющего параметра. Его изменения часто оказывают основное влияние на изучение динамики вращения. В монографии [1] изложена феноменологическая теория, объясняющая с физической точки зрения этот механический процесс. Согласно ей, что и наблюдается при экспериментах, существует некоторая скорость вращения $\omega_{\text{кр}}$, превышение которой приводит к появлению незатухающих поперечных колебаний. В теории упругой устойчивости (см. [1]) такие скорости принято, хотя и не обязательно, называть критичными. Аналогичная терминология используется в теории динамических систем.

Обзор содержания некоторых работ содержится в §§ 3.1–3.3 третьей главы данной монографии. В § 3.4 приведен вывод уравнения, описывающего колебания ротора, но в линейной постановке (см. также работу [2]). Следует отметить, что по своей сути данная задача нелинейна. В работе [3] была предложена нелинейная модель данного механического явления. При этом нелинейность была введена с учетом феноменологических представлений о сути данного процесса.

В работах [4–7] были предложены варианты учета нелинейности в задачах упругой устойчивости. Данные подходы и были использованы при выборе модели, изучаемой в данной работе. Добавим, что в работах [8,9] была предложена идея о необходимости учета фактора внутреннего (вязкого) трения при математическом моделировании процесса поперечных колебаний ротора.

В работе изучаются колебания ротора с нелинейностями, отличными от тех, которые были введены в соответствующей модели из работы [3]. Рассматриваемый тип нелинейных слагаемых характерен для задач, имеющих определенную симметрию, что как раз характерно для вращающегося ротора. Отметим, что в работах [10–16, 18] изучались близкие по постановке задачи.

Ниже, в следующем разделе, рассмотрена уже математическая часть постановки задачи, т. е. будут приведены уравнения в нормированном и, естественно, обезразмеренном виде. Более детальное объяснение физических явлений можно найти в уже упомянутых работах.

Подчеркнем, что в работе не предполагается использование метода Галёркина для анализа соответствующей краевой задачи. В работе рассмотрен вариант краевых условий, который предлагается в качестве основного в монографии В. В. Болотина [1].

В § 1 (постановка задачи) будет использована комплексная запись краевой задачи, т. е. рассмотрена функция $u(t,x)=u_1(t,x)+iu_2(t,x)$, где $u_1(t,x), u_2(t,x)$ — отклонения от первоначальной формы вдоль осей OY, OZ соответственно, а x — координата на оси OX, направленная вдоль оси ротора. После перенормирования (введения безразмерных величин, см., например, [1]) можно считать, что данная величина равна 1, т. е. $x \in [0,1]$.

Далее используются стандартные для современной теории дифференциальных уравнений с частными производными обозначения:

$$u_{tt}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad u_x=\frac{\partial u}{\partial x} \text{ и т. д.}$$

§ 1. Постановка задачи

В работе будет рассмотрена нелинейная краевая задача

$$u_{tt}+(g_1u_t+g_2u_{t,xxxx})+(1-i\omega)u_{xxxx}=F(u_x,u_{xx},u_{tx}), \tag{1.1}$$

$$u(t,0)=u(t,1)=u_{xx}(t,0)=u_{xx}(t,1)=0, \tag{1.2}$$

где $u=u_1(t,x)+iu_2(t,x)$ — комплекснозначная функция. В нашем случае считаем, что

$$F(u_x,u_{xx},u_{tx})=u_{xx}\Big(a_1\int_0^1|u_x|^2dx+a_2\frac{d}{dt}\int_0^1|u_x|^2dx\Big).$$

Наконец, g_1, g_2, a_1, a_2 — некоторые положительные (неотрицательные в некоторых частных вариантах постановки задачи) постоянные. Основной параметр (управляющий параметр) — это приведенная частота вращения вала ω. При $\omega=0$ имеем, естественно, невращающийся вал. Подчеркнем, что, в принципе, возможен вариант $g_2=0$, $a_2=0$, что означает полный отказ от учета вязких сил и анализ чисто упругой задачи. Поэтому с физической точки зрения вполне естественно считать, что $g_2,a_2>0$, хотя данные значения могут быть и достаточно малыми положительными постоянными. Впрочем, вполне естественно считать, что и остальные коэффициенты не слишком велики, так как после стандартных перенормировок они пропорциональны величине E^{-1}, где E — модуль упругости.

Если краевую задачу (1.1), (1.2) дополнить до начально краевой, т. е. данную краевую задачу дополнить начальными условиями

$$u(0,x)=f(x),\ u_t(0,x)=g(x), \tag{1.3}$$

где $f(x)=f_1(x)+if_2(x)$, $g(x)=g_1(x)+ig_2(x)$, то при $f_1(x)$, $f_2(x)\in W_2^4[0,1]$, а также $g_1(x),g_2(x)\in W_2^4[0,1]$ смешанная задача (1.1), (1.2), (1.3) локально корректно разрешима, т. е. у нее существует единственное решение, если $t\in[0,t_0]$, $t_0>0$ и при всех таких t функция $u(t,x)\in W_2^4[0,1]\times W_2^4[0,1]$ [4, 17, 19, 20]. Следовательно, решения смешанной задачи (1.1), (1.2), (1.3) порождают локальный гладкий полупоток — динамическую систему в бесконечномерном фазовом пространстве. В нашем случае это H_2^4 x H_2^4.

Все это позволяет при анализе динамики решений использовать также методы теории динамических систем, изучить устойчивость состояний равновесия, периодических решений.

§ 2. Анализ устойчивости нулевого состояния равновесия

Для этого рассмотрим линеаризованный вариант нелинейной краевой задачи (1.1), (1.2). Это приводит к необходимости изучения следующей краевой задачи:

МАТЕМАТИКА 2019. Т. 29. Вып. 1

$$u_{tt} + (g_1 u_t + g_2 u_{t,xxxx}) + (1 - i\omega) u_{xxxx} = 0, \tag{2.1}$$

$$u(t,0) = u(t,1) = u_{xx}(t,0) = u_{xx}(t,1) = 0. \tag{2.2}$$

Линейная краевая задача имеет нетривиальное решение вида $u(t,x) = \exp(\lambda t) v(x)$, если $v(x)$ — нетривиальные решения краевой задачи для $v(x)$, где $v(x) = v(x,\lambda)$:

$$\lambda^2 v + \lambda g_1 v + \lambda g_2 v^{(IV)} + (1 - i\omega) v^{(IV)} = 0, \tag{2.3}$$

$$v(0) = v(1) = v''(0) = v''(1) = 0. \tag{2.4}$$

Нетривиальные решения вспомогательной краевой задачи (2.3), (2.4) можно искать в виде $v(x) = v_n(x) = \gamma \sin(\pi n x)$, где $\gamma \in \mathbb{R}$, а счетный набор λ_n следует искать из квадратного уравнения

$$\lambda^2 + G_n \lambda + P_n = 0, \; n = 1, 2, 3, \tag{2.5}$$

где $G_n = g_1 + (\pi n)^4 g_2, P_n = (1 - i\omega)(\pi n)^4$. Совокупность соответствующих корней характеристического уравнения (2.5) принято называть спектром устойчивости, так как в силу полноты и ортогональности системы функций $\sin(\pi n x)$ на $[0,1]$ можно утверждать, что из выполнения условий $\operatorname{Re}\lambda_n < 0$, $n \in \mathbb{N}$ вытекает асимптотическая устойчивость решений линейной краевой задачи (2.1), (2.2) и нулевого решения уже нелинейной краевой задачи (1.1), (1.2). При существовании такого $n = n_0$, что $\operatorname{Re}\lambda_n > 0$ можно сделать вывод о неустойчивости решений линейной системы (2.1), (2.2) и неустойчивости нулевого решения краевой задачи (1.1), (1.2).

Пусть выполнены неравенства $\operatorname{Re}\lambda_n \leqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, и вместе с этим существует по крайней мере одно $n = k$, такое, что $\operatorname{Re}\lambda_k = 0$. В таком случае в задаче об устойчивости нулевого решения нелинейной краевой задачи (1.1), (1.2) реализуется критический случай.

Для анализа расположения корней характеристического уравнения (2.5) используем стандартный алгебраический прием. Он позволяет свести уравнение с комплексными коэффициентами к уравнению четвертой степени с действительными коэффициентами с последующим использованием критерия Рауса–Гурвица. Для этого, как хорошо известно, следует рассмотреть вспомогательное алгебраическое уравнение с комплексными коэффициентами $\lambda^2 + \overline{G_n}\lambda + \overline{P_n} = 0$, а также новое характеристическое уравнение

$$(\lambda^2 + G_n \lambda + P_n)(\lambda^2 + \overline{G_n}\lambda + \overline{P_n}) = 0, \tag{2.6}$$

где $G_n = \overline{G_n}$, $\overline{P_n} = (1 + i\omega)(\pi n)^4$. Очевидно, что неравенства $\operatorname{Re}\lambda_n < 0$ выполнены (или не выполнены) для уравнений (2.5) и (2.6) одновременно. В свою очередь, для анализа расположения корней уравнения (2.6) можно применить критерий Рауса–Гурвица. Для этого перепишем левую часть уравнения в виде многочлена

$$Q_n(\lambda) = \lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4,$$

$$a_1 = 2G_n, a_2 = 2(\pi n)^4 + G_n^2, a_3 = 2(\pi n)^4 G_n, a_4 = P_n \overline{P_n}.$$

Анализ расположения корней многочлена $Q_n(\lambda)$ с использованием критерия Рауса–Гурвица приводит к утверждению.

Лемма 1. *Нулевое решение нелинейной краевой задачи* (1.1), (1.2) *асимптотически устойчиво, если $\omega < \omega_*$, и теряет устойчивость, если $\omega > \omega_*$, где*

$$\omega_* = \min \omega_n, \quad \omega_n = \frac{g_1 + g_2 (\pi n)^4}{(\pi n)^2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Отметим, что последовательность ω_n имеет наименьший элемент, так как при всех значениях n справедливо неравенство $\omega_n > 0$, а также $\lim_{n\to\infty} \omega_n = \infty$.

Стандартные построения показывают, что номер наименьшего элемента ω_k $(\omega_k = \min\limits_{n\in\mathbb{N}} \omega_n)$ равен или k_0, или $k_0 + 1$, где

$$k_0 = \mathrm{entier}\left(\frac{1}{\pi}\sqrt[4]{\frac{g_1}{g_2}}\right),$$

если, конечно, $g_2 > 0$. При $g_2 = 0$ наименьший элемент ω_n не существует, так как $\omega_n = \dfrac{g_1}{(\pi n)^2}$ и последовательность ω_n убывает. Следовательно, при $g_2 = 0$ решения краевой задачи (2.1), (2.2) неустойчивы при любом значении $\omega > 0$. Последнее противоречит физическому смыслу. Впрочем, как нетрудно проверить, при $g_2 = 0$ краевая задача (2.1), (2.2) некорректна в смысле определения Ж. Адамара (см., например, [21]). Более содержателен случай, при котором $g_1 = 0$, т. е. считать отсутствующим конструктивное демпфирование. Ясно, что это предположение так же противоречит физическому смыслу, но с математической точки зрения получим вполне корректную задачу. Добавим, что вариант, при котором $g_1 \ll 1$ вполне естествен с физической точки зрения для роторов, используемых для практических целей. Обычно это достигается за счет уменьшения конструктивного демпфирования.

Окончательный выбор k может быть сделан после сравнения элементов последовательности $\omega_1, \omega_{k_0}, \omega_{k_0+1}$. В особых вариантах не исключен случай, когда $\omega_k = \omega_{k+1}$. В последнем случае соответствующий номер

$$k = \frac{1+\sqrt{1+\beta}}{2}, \qquad \beta = \frac{1}{\pi^2}\sqrt{\frac{g_1}{g_2}},$$

если, конечно, такое k будет целым. В иной форме при $g_1 = \pi^4 k^2 (k+1)^2 g_2$ получаем $\omega_k = \omega_{k+1}$.

В заключение этого раздела кратко опишем способ определения номера k. Для этого можно рассмотреть сначала вспомогательную функцию (если, конечно, $g_1, g_2 > 0$):

$$\Psi(\eta) = \frac{g_1 + g_2\eta^2}{\eta}, \quad \Psi(\pi n)^2 = \omega_n$$

при $\eta > 0$. Данная функция обладает следующими свойствами:

1) $\Psi(\eta) > 0$ при всех $\eta > 0$;

2) имеет единственный минимум при $\eta = \eta_{\min} = \dfrac{1}{\pi^2}\sqrt{\dfrac{g_1}{g_2}}$;

3) при $\eta \in (0, \eta_{\min})$ она убывает и возрастает при $\eta \in (\eta_{\min}, \infty)$.

Следовательно, номер k выбирается указанными выше способом. Добавим, что при $g_1 = 0$ справедливо равенство $\omega_n = g_2(\pi n)^2$, и, следовательно, нулевое решение краевой задачи устойчиво, если $\omega < \omega_1 = g_2\pi^2$ $(\min \omega_n = \omega_1)$.

§ 3. Одномодовые периодические решения нелинейной краевой задачи

Возвратимся к анализу задачи в нелинейной постановке, т. е. к анализу краевой задачи (1.1), (1.2). В данном разделе изучим вопрос о существовании у нее одномодовых решений вида

$$u_n(t,x) = \eta_n \exp(i\sigma_n t)\sin(\pi n x), \tag{3.1}$$

где без нарушения общности можно считать, что $\eta_n > 0$. После подстановки решений (3.1) в уравнение (1.1) получим уравнение для определения η_n, σ_n:

$$-\sigma_n^2 + i\sigma_n(g_1 + (\pi n)^4 g_2) + (1 - i\omega)(\pi n)^4 = -\frac{1}{2}(\pi n)^2 a_1 \eta_n^2 (\pi n)^2.$$

Последнее уравнение эквивалентно следующей системе алгебраических уравнений:

$$-\sigma_n^2 + (\pi n)^4 = -\frac{a_1}{2}(\pi n)^4 \eta_n^2,$$

$$\sigma_n(g_1+(\pi n)^4 g_2)=\omega(\pi n)^4,$$

откуда следует, что

$$\sigma_n=\omega\frac{(\pi n)^2}{\omega_n},\quad \eta_n^2=\frac{2}{a_1\omega_n^2}(\omega^2-\omega_n^2),\quad \omega_n^2=\frac{(g_1+(\pi n)^4 g_2)^2}{(\pi n)^4}.$$

Итак, решение с номером n существует, если выполняется неравенство $\omega^2-\omega_n^2>0$ $(\omega>\omega_n)$.

Попытка построить двумодовое решение, т. е. решение вида

$$u_{n,m}(t,x)=\eta_n\exp(i\sigma_n t)\sin(\pi nx)+\eta_m\exp(i\sigma_m t)\sin(\pi mx),$$

где $n,m\in\mathbb{N}$ (без нарушения общности можно считать, что $m>n$), $\eta_n,\eta_m\in\mathbb{C},\eta_n,\eta_m\neq 0$, приводит к системе двух комплексных уравнений

$$-\sigma_n^2+G_n i\sigma_n+(1-i\omega)(\pi n)^4=-\frac{a_1}{2}(\pi n)^2((\pi n)^2|\eta_n|^2+(\pi m)^2|\eta_m|^2),$$

$$-\sigma_m^2+G_m i\sigma_m+(1-i\omega)(\pi m)^4=-\frac{a_1}{2}(\pi m)^2((\pi n)^2|\eta_n|^2+(\pi m)^2|\eta_m|^2),$$

которая не имеет решений.

Аналогичная ситуация имеет место и с решениями вида

$$u(t,x)=\sum_{k=1}^{p}\eta_k\exp(i\sigma_k t)\sin(\pi kx),$$

т. е. с p-модовыми решениями. Таких решений краевая задача также не имеет, если, конечно, $p\geqslant 2$. Отметим также, что при достаточно больших ω $(\omega\gg\omega_*)$ может существовать достаточно большое число одномодовых периодических решений.

Теорема 1. *Пусть $\omega_m>\omega$. Тогда нелинейная краевая задача* (1.1), (1.2) *имеет решение вида*

$$w_m(t,x)=\eta_m\exp(i\sigma_m t)\sin(\pi mx).$$

§ 4. Анализ устойчивости одномодовых периодических решений

Предположим, что у краевой задачи (1.1), (1.2) существует одномодовое решение (3.1), т. е. решение вида

$$u_m=v_m(t,x)=\eta_m\exp(i\sigma_m t)\sin(\pi mx),\ \ m\in\mathbb{N},$$

где, естественно,

$$\sigma_m=\omega\frac{(\pi m)^2}{\omega_m},\quad \eta_m^2=\frac{2}{a_1\omega_m^2}(\omega^2-\omega_m^2),\quad \omega_m^2=\frac{(g_1+(\pi m)^4 g_2)^2}{(\pi m)^4},\quad \omega>\omega_m.$$

Для анализа устойчивости одномодового решения (3.1) целесообразно представить краевую задачу (1.1), (1.2) в виде бесконечномерной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Для этого представим $u(t,x)$ в виде ряда

$$u(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(t)\sin(\pi kx),\quad u_k(t)=2\int_0^1 u(t,x)\sin(kx)dx.$$

Подстановка ряда в краевую задачу (1.1), (1.2) приводит к следующей бесконечной системе обыкновенных уравнений:

$$u_k''+u_k'(g_1+(\pi k)^4 g_2)+u_k(1-i\omega)(\pi k)^4=-u_k(\pi k)^2\Big(\frac{a_1}{2}S+\frac{a_2}{2}\frac{d}{dt}(S)\Big),\tag{4.1}$$

где $S = S(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k|^2(\pi k)^2$. При формировании уравнения с номером k была учтена ортогональность функции $\sin(\pi kx)$, а также равенство Парсеваля, т. е.

$$\int_0^1 |u_x|^2 dx = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^2(\pi n)^2.$$

Сходимость ряда $S(t)$ при всех t вытекает из принадлежности решения $u(t,x)$ фазовому пространству решений, т. е. $W_2^4[0,1] \times W_2^4[0,1]$.

Одномодовому решению $v_m(t,x)$ соответствует решение системы дифференциальных уравнений (4.1), для которого компонента с номером m имеет вид

$$u_m(t) = v_m(t) = \eta_m \exp(i\sigma_m t),$$

а остальные компоненты $u_n(t) = 0$ при $n \neq m$. В системе (4.1) положим

$$\begin{aligned} u_m(t) &= v_m(t)(1 + w_m(t)), \\ u_n(t) &= w_n(t). \end{aligned} \tag{4.2}$$

В результате замены (4.2) получим новую систему уравнений для последовательности $\omega_k(t), k \in \mathbb{N}$, у которой следует исследовать устойчивость нулевого решения. Для этой цели следует рассмотреть линеаризованный ее вариант. После стандартных преобразований линеаризованную систему можно записать в виде

$$w_n'' + w_n' G_n + w_n[(1 - i\omega)(\pi n)^4 + (\pi n)^2(\pi m)^2\varphi_m^2] = 0,\ n \neq m, \tag{4.3}$$

$$w_m'' + w_m'(2i\sigma_m + G_m) + (\pi m)^4\left(\varphi_m^2(w_m + \overline{w_m}) + b\varphi_m^2(w_m' + \overline{w_m'})\right) = 0,\ n = m, \tag{4.4}$$

$$G_n = g_1 + (\pi n)^4 g_2,\ G_m = g_1 + (\pi m)^4 g_2,\ \varphi_m^2 = \frac{1}{\omega_m^2}(\omega^2 - \omega_m^2),\ b = \frac{a_2}{a_1}.$$

Сначала исследуем уравнение (4.4) (случай $n = m$). Для анализа устойчивости положим $w_m = y_m + iz_m$ и перепишем его в действительной форме:

$$\begin{gathered} y_m'' + y_m'(G_m + 2b(\pi m)^4\varphi_m^2) + y_m(2(\pi m)^4\varphi_m^2) - 2\sigma_m z_m' = 0, \\ z_m'' + z_m' G_m + 2\sigma_m y_m' = 0. \end{gathered}$$

Далее, полагая, что $y_m = \exp(\lambda t) l_m$, а $z_m = \exp(\lambda t) p_m$, для λ получим систему алгебраических уравнений для l_m, p_m, определитель которой равен нулю, т. е. характеристическое уравнение

$$(\lambda^2 + \lambda G_m)[\lambda^2 + \lambda(G_m + 2b(\pi m)^4\varphi_m^2) + 2(\pi m)^4\varphi_m^2] + 4\lambda^2\sigma_m^2 = 0.$$

Один из корней характеристического уравнения — $\lambda_1 = 0$, а остальные его корни лежат в левой полуплоскости, что проверяется при помощи критерия Рауса–Гурвица, примененного к уравнению

$$\lambda^3 + S_m\lambda^2 + J_m\lambda + L_m = 0,$$

где

$$\begin{gathered} S_m = 2G_m + 2b(\pi m)^4\varphi_m^2,\ L_m = 2G_m\varphi_m^2(\pi m)^4, \\ J_m = 2(\pi m)^4\varphi_m^2 + G_m(G_m + 2b(\pi m)^4\varphi_m^2) + 4\sigma_m^2. \end{gathered}$$

Соответственно, в текущих обозначениях условие устойчивости будет выглядеть следующим образом:

$$S_m J_m - L_m > 0,$$

при условии, что $S_m > 0$, $J_m > 0$, $L_m > 0$, или же, вернувшись к первоначальной записи,

$$2G_m(\pi m)^4\varphi_m^2 + M_m > 0,$$

где

$$M_m = 2G_m^2(G_m + 2b(\pi m)^4\varphi_m^2) + 8G_m\sigma_m^2 + \\ + 4b(\pi m)^8\varphi_m^4 + 8b(\pi m)^4\varphi_m^2\sigma_m^2 + 2G_m b(G_m + 2b(\pi m)^4\varphi_m^2).$$

Следовательно, критерий Рауса–Гурвица выполнен для любого номера m (номера одномодового периодического решения), если, конечно, такое решение существует ($\omega_m > \omega_*$).

Перейдем теперь к анализу устойчивости решений уравнений (4.3), т. е. уравнений с номерами $n \neq m$. В уравнении положим $w_n = \exp(\lambda t)v_n$. Тогда, повторяя основные конструкции из предыдущих разделов, вопрос об устойчивости решений дифференциальных уравнений (4.3) сведется к анализу характеристического уравнения

$$\lambda^4 + 2G_n\lambda^3 + \lambda^2(G_n^2 + 2d_{m,n}) + 2G_n\lambda d_{m,n} + (d_{m,n}^2 + c_n^2) = 0,$$

где

$$d_{m,n} = (\pi n)^4 + (\pi m)^2(\pi n)^2\varphi_m^2,\ \ c_n = -\omega(\pi n)^4.$$

Проверка условий критерия Рауса–Гурвица может быть сведена к анализу неравенства

$$G_n^2 d_{m,n} - c_n^2 > 0.$$

Если вернуться к первоначальным обозначениям, то последнее неравенство выполнено, если справедливо эквивалентное ему неравенство

$$\omega_n^2 - \omega^2 + \omega_n^2\left(\varphi_m^2\left(\frac{m}{n}\right)^2\right) > 0, \quad \omega_n^2 = \frac{G_n}{(\pi n)^4},$$

или в симметричной форме

$$\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)(\pi n)^2 + \left(\frac{\omega^2}{\omega_m^2} - 1\right)(\pi m)^2 > 0. \tag{4.5}$$

Теорема 2. *Одномодовое решение*

$$u(t,x) = \eta_m \exp(i\sigma_m t)\sin(\pi m x)$$

устойчиво, если при всех натуральных n выполнено неравенство (4.5).

С прикладной точки зрения неравенство (4.5) было бы полезно упростить, но в общем случае это делать затруднительно, так как левая часть этого неравенства зависит от трех параметров — g_1, g_2, n. Далее будет рассмотрен вопрос о следствиях из него в частных, но важных для приложений, случаях.

§ 5. Частные случаи

Пусть выполнены неравенства $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \ldots$, т. е. $\min\omega_n = \omega_1 = \omega_*$. Рассмотрим вариант, при котором $\omega \in (\omega_1, \omega_2]$. Тогда существует только одно автомодельное решение $u(t,x) = \eta_1\exp(i\sigma_1 t)\sin(\pi x)$. Тогда из неравенства (4.5) вытекает справедливость следующего утверждения.

Следствие 1. *Решение $u_1(t,x) = \eta_1\exp(i\sigma_1 t)\sin(\pi x)$ асимптотически устойчиво, если*

$$\omega \in (\omega_1, \omega_2].$$

Справедливость этого утверждения очевидна, так как в такой ситуации справедливы два неравенства:

$$1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} > 0, \quad \frac{\omega^2}{\omega_1^2} - 1 > 0,$$

если $n = 2, 3, 4, \ldots$.

Аналогичное утверждение имеет место, если $\omega_* = \omega_k$ при любом k. Тогда при $\omega \in (\omega_k, \widetilde{\omega}]$, где $\widetilde{\omega} = \min(\omega_{k-1}, \omega_{k+1})$.

Рассмотрим более детально вопрос об устойчивости решения с номером $m = 1$. Неравенство (4.5) можно переписать в следующей форме:

$$(\pi n)^2 - \pi^2 > \omega^2 \left(\frac{(\pi n)^2}{\omega_n^2} - \frac{\pi^2}{\omega_1^2} \right).$$

Напомним, что $\omega_n^2 = \dfrac{G_n^2}{(\pi n)^4}$. Положим $\gamma = g_1/g_2\pi^4$. Тогда $G_n = g_2\pi^4(\gamma + n^4)$, и, следовательно, последнее неравенство можно переписать в виде

$$n^2 - 1 > \omega^2\pi^4 \left(\frac{n^6}{(g_2^2\pi^8(\gamma + n^4)^2)} - \frac{1}{(g_2^2\pi^8(\gamma + 1)^2)} \right).$$

После элементарных преобразований получим неравенство

$$(n+1)(\gamma + n^4)^2 > A^2 \left((n^4 + (1+\gamma)n^3 + \gamma)(\gamma(n^2 + n + 1) - n^3) \right), \qquad A^2 = \frac{\omega^2}{g_2^2\pi^4(1+\gamma)^2}.$$

В свою очередь, последнее неравенство заведомо выполнено, если $\gamma < \dfrac{8}{7}$, так как при таких γ справедливо уже следующее неравенство:

$$\gamma(n^2 + n + 1) - n^3 \leqslant 0$$

при всех натуральных значениях n.

Следствие 2. *Решение $u_1(t, x) = \eta_1 \exp(i\sigma_1 t)\sin(\pi x)$ асимптотически устойчиво, если выполняется $g_1 \leqslant 8g_2\pi^4/7$.*

Рассмотрим еще один частный случай, при котором $g_1 = 0$. В этой ситуации решение с номером m существует, если $\omega^2 > (\pi m)^4 g_2^2$ или $\omega > (\pi m)^2 g_2$. Анализ условий устойчивости приводит к выводу, что решение с номером $m = 1$ всегда устойчиво (если существует, т. е. выполняется неравенство $\omega > \pi^2 g_2$). Все остальные — неустойчивы.

§ 6. Заключение

В работе исследован вопрос об устойчивости нулевого решения краевой задачи, описывающей поперечные колебания ротора. Показано, что незатухающие поперечные колебания ротора возникают при превышении некоторой критической скорости ω_*. Найдены точные решения рассмотренной краевой задачи, описывающей такие незатухающие колебания. В частности, подтверждены с математической точки зрения физические представления А. Л. Кимбала о влиянии внутреннего трения на характер колебаний ротора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Наука, 1961. 339 с.
2. Поздняк Э.В. Автоколебания роторов со многими степенями свободы // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1977. № 2. С. 40–49.

3. Кубышкин Е.П. Автоколебательные решения одного класса сингулярно возмущенных краевых задач // Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25. № 4. С. 674–685. http://mi.mathnet.ru/de6826
4. Holmes P.J., Marsden J.E. Bifurcation of dynamical systems and nonlinear oscillations in engineering systems // Nonlinear Partial Differential Equations and Applications. Berlin: Springer, 1978. P. 163–206. https://doi.org/10.1007/BFb0066411
5. Holmes P.J. Bifurcations to divergence and flutter in flow-induced oscillations: A finite dimensional analysis // Journal of Sound and Vibration. 1977. Vol. 53. No. 4. P. 471–503. https://doi.org/10.1016/0022-460X(77)90521-1
6. Holmes P.J., Marsden J.E. Bifurcation to divergence and flutter in flow-induced oscillations: an infinite dimensional analysis // Automatica. 1978. Vol. 14. No. 4. P. 367–384. https://doi.org/10.1016/0005-1098(78)90036-5
7. Paidoussis M.P., Issid N.T. Dynamic stability of pipes conveying fluid // Journal of Sound and Vibration. 1974. Vol. 33. No. 3. P. 267–294. https://doi.org/10.1016/S0022-460X(74)80002-7
8. Kimball A.L. Internal friction theory of shaft whirling // General Electric Review. 1924. Vol. 27. P. 224–251.
9. Kimball A.L. Internal friction as a cause of shaft whirling // The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. Series 6. 1925. Vol. 49. Issue 292. P. 724–727. https://doi.org/10.1080/14786442508634653
10. Куликов А.Н. Аттракторы одной нелинейной краевой задачи, возникающей в теории аэроупругости // Дифференциальные уравнения. 2001. Т. 37. № 3. С. 397–401. http://mi.mathnet.ru/de10347
11. Leonov G.A., Kuznetsov N.V., Kiseleva M.A., Solovyeva E.P., Zaretskiy A.M. Hidden oscillations in mathematical model of drilling system actuated by induction motor with a wound rotor // Nonlinear Dynamics. 2014. Vol. 77. № 1–2. P. 277–288. https://doi.org/10.1007/s11071-014-1292-6
12. Куликов А.Н. О реализации сценария Ландау–Хопфа и перехода к турбулентности в задачах теории упругой устойчивости // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48. № 9. С. 1278–1291.
13. Колесов Ю.С. Аттракторы резонансных уравнений волнового типа — разрывные колебания // Математические заметки. 1994. Т. 56. № 1. С. 41–49. http://mi.mathnet.ru/mz2222
14. Куликов А.Н. Некоторые бифуркационные задачи теории упругой устойчивости и математической физики: дис. . . . д-ра физ.-матем. наук / ННГУ. Нижний Новгород, 2018. 299 с.
15. Fischer A., Doikin A., Rulevskiy A. Research of dynamics of the rotor with three-film bearings // Procedia Engineering. 2016. Vol. 150. P. 635–640. https://doi.org/10.1016/j.proeng.2016.07.058
16. Khulief Y.A., Al-Sulaiman F.A., Bashmal S. Vibration analysis of drillstrings with self-excited stick–slip oscillations // Journal of Sound and Vibration. 2007. Vol. 299. No. 3. P. 540–558. https://doi.org/10.1016/j.jsv.2006.06.065
17. Segal I. Non-linear semi-groups // Annals of Mathematics. 1963. Vol. 78. No. 2. P. 339–364. https://doi.org/10.2307/1970347
18. Банах Л.Я., Никифоров А.Н. Воздействие аэрогидродинамических сил на быстровращающиеся роторные системы // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2006. № 5. С. 42–51. https://elibrary.ru/item.asp?id=9541950
19. Якубов С.Я. Разрешимость задачи Коши для абстрактных квазилинейных гиперболических уравнений второго порядка и их приложения // Труды Московского математического общества. 1970. Т. 23. С. 37–60. http://mi.mathnet.ru/mmo238
20. Соболевский П.Е. Об уравнениях параболического типа в банаховом пространстве // Труды Московского математического общества. 1961. Т. 10. С. 297–350. http://mi.mathnet.ru/mmo123
21. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 735 с.

Поступила в редакцию 24.09.2018

Запов Александр Сергеевич, аспирант, кафедра дифференциальных уравнений, Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, 150003, Россия, г. Ярославль, ул. Советская, 14.
E-mail: yar.promo.zapov.a@gmail.com

A. S. Zapov

On one mathematical model in elastic stability theory

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2019, vol. 29, issue 1, pp. 29–39 (in Russian).

Keywords: nonlinear evolution equation, stability, oscillations of rotor systems, periodic solutions.

MSC2010: 35B10, 35B05

DOI: 10.20537/vm190103

We consider a boundary-value problem for the nonlinear evolution partial differential equation, given in renormalized form. This problem appears in rotary system mechanics and describes the transverse vibrations of the rotating rotor of a constant cross-section from a viscoelastic material whose ends are pivotally fixed. The question of the stability of the zero equilibrium state is studied, the critical value of the rotor speed is found, above which continuous oscillations occur. Exact solutions of the boundary-value problem are found in the form of single-mode functions with respect to the spatial variable and functions periodic in time. The stability conditions for such solutions are derived, and in some cases an analysis of the stability conditions is given. The paper shows the absence of multimode time-periodic solutions. The basic and important (from an applied point of view) particular cases of this nonlinear boundary-value problem are analyzed. All the results of the analysis of a nonlinear boundary-value problem are analytical. Their conclusion is based on the qualitative theory of infinite-dimensional dynamical systems.

REFERENCES

1. Bolotin V.V. *Nekonservativnye zadachi teorii uprugoi ustoichivosti* (Nonconservative problems of the theory of elastic stability), Moscow: Nauka, 1961, 339 p.
2. Pozdnyak E.V. Self-oscillation of rotors with many degrees of freedom, *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Mekhanika Tverdogo Tela*, 1977, no. 2, pp. 40–49 (in Russian).
3. Kubyshkin E.P. Self-oscillatory solutions of a class of singularly perturbed boundary-value problems, *Differ. Uravn.*, 1989, vol. 25, no. 4, pp. 674–685 (in Russian).
4. Holmes P.J., Marsden J.E. Bifurcation of dynamical systems and nonlinear oscillations in engineering systems, *Nonlinear Partial Differential Equations and Applications*, Berlin: Springer, 1978, pp. 163–206. https://doi.org/10.1007/BFb0066411
5. Holmes P.J. Bifurcations to divergence and flutter in flow-induced oscillations: a finite dimensional analysis, *Journal of Sound and Vibration*, 1977, vol. 53, no. 4, pp. 471–503. https://doi.org/10.1016/0022-460X(77)90521-1
6. Holmes P.J., Marsden J.E. Bifurcation to divergence and flutter in flow-induced oscillations: an infinite dimensional analysis, *Automatica*, 1978, vol. 14, no. 4, pp. 367–384. https://doi.org/10.1016/0005-1098(78)90036-5
7. Paidoussis M.P., Issid N.T. Dynamic stability of pipes conveying fluid, *Journal of Sound and Vibration*, 1974, vol. 33, no. 3, pp. 267–294. https://doi.org/10.1016/S0022-460X(74)80002-7
8. Kimball A.L. Internal friction theory of shaft whirling, *General Electric Review*, 1924, vol. 27, pp. 224–251.
9. Kimball A.L. Internal friction as a cause of shaft whirling, *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. Series 6*, 1925, vol. 49, issue 292, pp. 724–727. https://doi.org/10.1080/14786442508634653
10. Kulikov A.N. Attractors of a nonlinear boundary value problem arising in aeroelasticity, *Differential Equations*, 2001, vol. 37, issue 3, pp. 425–429. https://doi.org/10.1023/A:1019254818198
11. Leonov G.A., Kuznetsov N.V., Kiseleva M.A., Solovyeva E.P., Zaretskiy A.M. Hidden oscillations in mathematical model of drilling system actuated by induction motor with a wound rotor, *Nonlinear Dynamics*, 2014, vol. 77, no. 1–2, pp. 277–288. https://doi.org/10.1007/s11071-014-1292-6
12. Kulikov A.N. Landau–Hopf scenario of passage to turbulence in some problems of elastic stability theory, *Differential Equations*, 2012, vol. 48, no. 9, pp. 1258–1271. https://doi.org/10.1134/S0012266112090066
13. Kolesov Yu.S. Attractors of resonance wave type equations: Discontinuous oscillations, *Mathematical Notes*, 1994, vol. 56, no. 1, pp. 679–684. https://doi.org/10.1007/BF02110556

14. Kulikov A.N. Some bifurcation problems of elastic stability theory and mathematical physics, *Dr. Sci. (Phys.–Math.) Dissertation*, Nizhny Novgorod, 2018, 299 p. (In Russian).
15. Fischer A., Doikin A., Rulevskiy A. Research of dynamics of the rotor with three-film bearings, *Procedia Engineering*, 2016, vol. 150, pp. 635–640. https://doi.org/10.1016/j.proeng.2016.07.058
16. Khulief Y.A., Al-Sulaiman F.A., Bashmal S. Vibration analysis of drillstrings with self-excited stick–slip oscillations, *Journal of Sound and Vibration*, 2007, vol. 299, no. 3, pp. 540–558. https://doi.org/10.1016/j.jsv.2006.06.065
17. Segal I. Non-linear semi-groups, *Annals of Mathematics*, 1963, vol. 78, no. 2, pp. 339–364. https://doi.org/10.2307/1970347
18. Banakh L.Y., Nikiforov A.N. Impact of aero-hydrodynamic forces on fast-rotating rotor systems, *Izv. Ross. Akad. Nauk. Mekh. Tv. Tela*, 2006, no. 5, pp. 42–51 (in Russian).
19. Yakubov S.Y. Solvability of the Cauchy problem for abstract quasilinear second-order hyperbolic equations, and their applications, *Tr. Mosk. Mat. Obs.*, 1970, vol. 23, pp. 37–60 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/mmo238
20. Sobolevskiy P.E. Equations of parabolic type in a Banach space, *Tr. Mosk. Mat. Obs.*, 1961, vol. 10, pp. 297–350 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/mmo123
21. Tikhonov A.N., Samarskii A.A. *Uravneniya matematicheskoi fiziki* (Equations of mathematical physics), Moscow: Nauka, 1966, 735 p.

Received 24.09.2018

Zapov Aleksandr Sergeevich, Postgraduate Student, Department of Differential Equations, Yaroslavl State University, ul. Sovetskaya, 14, Yaroslavl, 150003, Russia.
E-mail: yar.promo.zapov.a@gmail.com