УДК 517.977

© *К. А. Щелчков*

ОБ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ С ДИСКРЕТНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ И НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ[1]

Рассматривается дифференциальная игра двух лиц, описываемая системой вида $\dot{x} = f(x,u) + g(x,v)$, $x \in \mathbb{R}^k$, $u \in U$, $v \in V$. Множеством значений управлений преследователя является конечное подмножество фазового пространства. Множеством значений управлений убегающего является компактное подмножество фазового пространства. Целью преследователя является поимка, то есть приведение системы в любую заданную окрестность начала координат. Получены достаточные условия разрешимости задачи преследования в классе кусочно-программных стратегий преследователя. Также доказано, что независимо от действий убегающего время поимки стремится к нулю, если начальное состояние приближается к началу координат.

Ключевые слова: дифференциальная игра, преследователь, убегающий, нелинейная система.

DOI: 10.20537/vm180110

Дифференциальные игры двух лиц, получившие первоначальное развитие в работах Р. Айзекса [1], в настоящее время представляют собой богатую содержательную теорию [2–14]. Существенный вклад в развитие теории внес Н. Н. Красовский и А. С. Понтрягин. В школе Н. Н. Красовского создана теория позиционных игр, в основе которой лежит понятие максимального стабильного моста и правило экстремального прицеливания. К сожалению, построение максимальных стабильных мостов для исследования конкретных дифференциальных игр весьма затруднительно, а порой невозможно. Более эффективным методом является построение мостов, не являющихся максимальными, но обладающих свойством стабильности и реализующие эффективные процедуры управления. Данный подход активно реализуется при исследовании нелинейных дифференциальных игр. В частности, в работе [15] получены достаточные условия разрешимости в нелинейном примере А.С. Понтрягина. Специальный класс дифференциальных игр рассмотрен в [16]. В работах [17, 18] предложены методы приближенного построения стабильных мостов в нелинейных дифференциальных играх.

В работе [20] были получены достаточные условия приведения траектории системы в начало координат за конечное время при условии, что преследователь использует контрстратегии. В данной работе получены достаточные условия приведения траектории системы в любую заданную окрестность начала координат в предположении, что преследователь использует кусочно-программные стратегии.

§ 1. Постановка задачи

В пространстве $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра двух лиц: преследователя P и убегающего E. Динамика игры описывается системой дифференциальных уравнений.

$$\dot{x} = f(x,u) + g(x,v), \quad u \in U, \quad v \in V, \quad x(0) = x_0,$$

где $x \in \mathbb{R}^k$ — фазовый вектор, $u, v \in \mathbb{R}^k$ — управляющие воздействия. Множество $U = \{u_1, \ldots, u_m\}$, $u_i \in \mathbb{R}^l$, $i = 1, \ldots, m$. Множество $V \subset \mathbb{R}^s$ — компакт. Функция $f : \mathbb{R}^k \times U \to \mathbb{R}^k$ для каждого $u \in U$ липшицева по x. Функция $g : \mathbb{R}^k \times V \to \mathbb{R}^k$ липшицева по совокупности переменных.

Под разбиением σ промежутка $[0,T]$ будем понимать конечное разбиение $\{\tau_q\}_{q=0}^{\eta}$, где $0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_\eta = T$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 17–38–50118–мол_нр).

Определение 1. *Кусочно-постоянной стратегией* W преследователя P называется пара (σ, W_σ), где σ — разбиение промежутка $[0,T]$, а W_σ — семейство отображений $d_r, r=0,1,\ldots,\eta$, ставящих в соответствие величинам $(\tau_r, x(\tau_r))$ точку $\overline{u}_r \in U$.

Под управлением убегающего будем понимать произвольную измеримую функцию $v : [0,\infty) \to V$, не известную преследователю P. Обозначим данную игру $\Gamma(x_0)$.

Определение 2. В игре $\Gamma(x_0)$ *происходит поимка*, если существует $T>0$ такое, что для любого $\varepsilon>0$ существует кусочно-постоянная стратегия W преследователя P такая, что для любого допустимого управления убегающего $v(\cdot)$ выполнено неравенство $\|x(\tau)\|<\varepsilon$ для некоторого $\tau \in [0,T]$.

Определение 3 (см. [19]). Совокупность векторов $a_1,\ldots,a_n \in \mathbb{R}^k$ называется *положительным базисом*, если для любой точки $\xi \in \mathbb{R}^k$ существуют числа $\mu_1,\ldots,\mu_n \geqslant 0$ такие, что $\xi=\sum_{i=1}^n \mu_i a_i$.

Введем следующие обозначения: $\operatorname{Int} A$ — внутренность множества A; $\operatorname{co} A$ — выпуклая оболочка множества A; $O_\varepsilon(x)$ — ε-окрестность точки x; $D_\varepsilon(x)$ — замкнутый шар радиуса ε с центром в точке x.

§ 2. Теорема о поимке

Теорема 1. *Пусть* $f(0,u_1),\ldots,f(0,u_m)$ *образуют положительный базис и* $-g(0,V) \subset \operatorname{Int}(\operatorname{co}\{f(0,u_1),\ldots,f(0,u_m)\})$. *Тогда, существует* $\varepsilon>0$ *такое, что для любой точки* $x_0 \in O_\varepsilon(0)$ *в игре* $\Gamma(x_0)$ *происходит поимка.*

Доказательство. $\mathbf{1^0}$. Докажем, что существуют $\alpha>0$, $\varepsilon>0$ такие, что для любой точки $x \in O_\varepsilon(0)$ и любого $v \in V$ найдется $i \in \{1,\ldots,m\}$, для которого выполнено

$$\left\langle f(x,u_i)+g(x,v), -\frac{x}{\|x\|}\right\rangle > \alpha. \tag{1}$$

Так как функция $f(x,u)$ является липшицевой по x, то существует $\varepsilon_1>0$ такое, что для всех $x \in O_{\varepsilon_1}(0)$ набор векторов $\{f(x,u_1),\ldots,f(x,u_m)\}$ является положительным базисом. Так как функция $g(x,v)$ липшицева по совокупности переменных, множество $g(x,V)$ является компактом для любого $x \in \mathbb{R}^k$. Кроме того существует $\varepsilon_2>0$ такое, что для любого $x \in O_{\varepsilon_2}(0)$ выполнено $-g(x,V) \subset \operatorname{Int}(\operatorname{co}\{f(x,u_1),\ldots,f(x,u_m)\})$. Возьмем произвольное положительное число $\varepsilon_3<\min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$. Тогда, для любого $x \in O_{\varepsilon_3}(0)$ и любого $v \in V$ выполнено включение $0 \in \operatorname{Int}(\operatorname{co}\{f(x,u_1)+g(x,v),\ldots,f(x,u_m)+g(x,v)\})$. Следовательно, по свойству положительных базисов (см., например, [19]), набор векторов $\{f(x,u_1)+g(x,v),\ldots,f(x,u_m)+g(x,v)\}$ является положительным базисом.

Рассмотрим шар $D_{\varepsilon_3}(0)$. Так как функции f,g являются липшицевыми по первому аргументу, то функции $f(x,u_1),\ldots,f(x,u_m)$ непрерывны по x, компактное множество $g(x,V)$ непрерывно по x в метрике Хаусдорфа. Тогда на данном шаре достигается следующий минимакс

$$\min_{x \in D_{\varepsilon_3}(0)} \min_{v \in V} \max_{i=1,\ldots,m} \left\langle f(x,u_i)+g(x,v), -\frac{x}{\|x\|}\right\rangle, \tag{2}$$

Пусть он достигается в точках $\hat{x} \in D_{\varepsilon_3}(0)$, $\hat{v} \in V$, $u_j \in \{u_1,\ldots,u_m\}$. Так как набор векторов $\{f(\hat{x},u_1)+g(\hat{x},\hat{v}),\ldots,f(\hat{x},u_m)+g(\hat{x},\hat{v})\}$ является положительным базисом, то, в силу построения (2) и свойств положительных базисов (см., например, [19]), имеет место неравенство

$$\alpha_1=\left\langle f(\hat{x},u_j)+g(\hat{x},\hat{v}), -\frac{\hat{x}}{\|\hat{x}\|}\right\rangle > 0.$$

Таким образом, ε_3 является искомым ε, а искомое α является произвольным числом из интервала $(0, \alpha_1)$. Неравенство (1) доказано.

Из свойств функций f, g следует, что существует $D > 0$ такое, что для всех $x \in O_\varepsilon(0)$, любого $v \in V$ и любого $i \in \{1, \ldots, m\}$ имеет место следующее неравенство:

$$\|f(x, u_i) + g(x, v)\| \leqslant D. \tag{3}$$

Оценка справедлива в силу ограниченности функций f, g в данной окрестности.

2⁰. Пусть числа ε, α соответствуют (1) и $x_0 \in O_\varepsilon(0)$. Выберем вектор $\overline{u}_0 \in U$ такой, что

$$\max_{u \in U} \left\langle f(x_0, u), -\frac{x_0}{\|x_0\|} \right\rangle = \left\langle f(x_0, \overline{u}_0), -\frac{x_0}{\|x_0\|} \right\rangle. \tag{4}$$

Совокупность векторов $f(x_0, u_1), \ldots, f(x_0, u_m)$ образует положительный базис. Следовательно

$$\left\langle f(x_0, \overline{u}_0), -\frac{x_0}{\|x_0\|} \right\rangle > 0.$$

Пусть вектор $\overline{v} \in V$ такой, что

$$\min_{v \in V} \left\langle f(x_0, \overline{u}_0) + g(x_0, v), -\frac{x_0}{\|x_0\|} \right\rangle = \left\langle f(x_0, \overline{u}_0) + g(x_0, \overline{v}), -\frac{x_0}{\|x_0\|} \right\rangle. \tag{5}$$

Так как $-g(x_0, \overline{v}) \in \operatorname{Int}(\operatorname{co}\{f(x_0, u_1), \ldots, f(x_0, u_m)\})$, то существуют такие $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geqslant 0$, что $\lambda_1 + \cdots + \lambda_m = 1$ и $\lambda_1 f(x_0, u_1) + \cdots + \lambda_m f(x_0, u_m) = -g(x_0, \overline{v})$. Отсюда

$$\left\langle f(x_0, \overline{u}_0) + g(x_0, \overline{v}), -\frac{x_0}{\|x_0\|} \right\rangle = \left\langle f(x_0, \overline{u}_0) - \sum_{j=1,\ldots,m} \lambda_j f(x_0, u_j), -\frac{x_0}{\|x_0\|} \right\rangle.$$

Заметим, что в силу выбора $\overline{u}_0$ и $-g(x_0, \overline{v}) \in \operatorname{Int}(\operatorname{co}\{f(x_0, u_1), \ldots, f(x_0, u_m)\})$ существует такой индекс $j \in \{1, \ldots, m\}$, что $\lambda_j > 0$ и

$$\left\langle f(x_0, \overline{u}_0), -\frac{x_0}{\|x_0\|} \right\rangle > \left\langle f(x_0, u_j), -\frac{x_0}{\|x_0\|} \right\rangle.$$

Иначе для каждого j такого, что $\lambda_j > 0$ выполнено равенство

$$\left\langle f(x_0, u_j), -\frac{x_0}{\|x_0\|} \right\rangle = \left\langle f(x_0, \overline{u}_0), -\frac{x_0}{\|x_0\|} \right\rangle.$$

Следовательно, в силу (4), вектор $-g(x_0, \overline{v})$ будет принадлежать границе множества $\operatorname{co}\{f(x_0, u_1), \ldots, f(x_0, u_m)\}$. Так как $\overline{u}_0 \in U$, то существует такой индекс $\nu \in \{1, \ldots, m\}$, что $\overline{u}_0 = u_\nu$. Поэтому

$$\left\langle f(x_0, \overline{u}_0) - \sum_{j=1,\ldots,m} \lambda_j f(x_0, u_j), -\frac{x_0}{\|x_0\|} \right\rangle > \left\langle (1 - \lambda_\nu) f(x_0, \overline{u}_0) - f(x_0, \overline{u}_0) \sum_{j=1,\ldots,m, j \neq \nu} \lambda_j, -\frac{x_0}{\|x_0\|} \right\rangle =$$

$$= \left\langle (1 - \lambda_\nu) f(x_0, \overline{u}_0) - f(x_0, \overline{u}_0)(1 - \lambda_\nu), -\frac{x_0}{\|x_0\|} \right\rangle = 0.$$

Отсюда

$$\left\langle f(x_0, \overline{u}_0) + g(x_0, \overline{v}), -\frac{x_0}{\|x_0\|} \right\rangle > 0. \tag{6}$$

Так как минимум в (5) достигается на $\overline{v}$ для любого $\overline{u}_0 \in U$, то, в силу (4) и (6), для всех $u \in U$ имеет место следующее неравенство

$$\left\langle f(x_0,\overline{u}_0)+g(x_0,\overline{v}),-\frac{x_0}{\|x_0\|}\right\rangle \geqslant \left\langle f(x_0,u)+g(x_0,\overline{v}),-\frac{x_0}{\|x_0\|}\right\rangle.$$

Следовательно, в силу (1), для любого $v \in V$ имеет место оценка

$$\left\langle f(x_0,\overline{u}_0)+g(x_0,v),-\frac{x_0}{\|x_0\|}\right\rangle \geqslant \alpha.$$

Также, в силу (1) и липшицевости функций f, g по x, существует число $\delta > 0$ такое, что для любого $x \in D_\delta(x_0)$, любого $v \in V$ выполнено неравенство

$$\left\langle f(x,\overline{u}_0)+g(x,v),-\frac{x_0}{\|x_0\|}\right\rangle \geqslant \frac{\alpha}{2}. \tag{7}$$

Заметим, что δ можно взять общее для всех $x_0 \in O_\varepsilon(0)$:

$$\left\langle f(x,\overline{u}_0)+g(x,v),-\frac{x_0}{\|x_0\|}\right\rangle =$$

$$=\left\langle f(x,\overline{u}_0)+f(x_0,\overline{u}_0)-f(x_0,\overline{u}_0)+g(x,v)+g(x_0,v)-g(x_0,v),-\frac{x_0}{\|x_0\|}\right\rangle =$$

$$=\left\langle f(x_0,\overline{u}_0)+g(x_0,v),-\frac{x_0}{\|x_0\|}\right\rangle+\left\langle f(x,\overline{u}_0)-f(x_0,\overline{u}_0),-\frac{x_0}{\|x_0\|}\right\rangle+$$

$$+\left\langle g(x,v)-g(x_0,v),-\frac{x_0}{\|x_0\|}\right\rangle \geqslant \alpha - L_f\|x-x_0\| - L_g\|x-x_0\|.$$

Здесь L_f, L_g — константы Липшица функций f и g соответственно. Отсюда видно, что достаточно, чтобы $\delta \leqslant \alpha/(2L_f+2L_g)$.

3^0. Построим стратегию $W = (\sigma, W_\sigma)$ преследователя P для произвольного управления убегающего, $\sigma = \{\tau_i\}_{i=0}^{\infty}$, $\tau_0 = 0$. Пусть далее числа ε, α соответствуют (1), $x_0 \in O_\varepsilon(0)$, δ соответствует (7).

Построим первый отрезок разбиения и управление преследователя на нем. Определим управление $\overline{u}_0$ на первом отрезке разбиения как в пункте 2. Тогда, в силу (7), для любого $v \in V$ имеем

$$\left\langle f(x,\overline{u}_0)+g(x,v),-\frac{x_0}{\|x_0\|}\right\rangle \geqslant \frac{\alpha}{2}.$$

В силу того, что $f(x,\overline{u}_0)+g(x,v) \neq 0$, для любого $x \in (O_\varepsilon(0) \cap D_\delta(x_0))$ и любого $v \in V$ выполнено следующее неравенство:

$$\left\langle \frac{f(x,\overline{u}_0)+g(x,v)}{\|f(x,\overline{u}_0)+g(x,v)\|},-\frac{x_0}{\|x_0\|}\right\rangle \geqslant \frac{\alpha}{2\|f(x,\overline{u}_0)+g(x,v)\|}.$$

Так как $\|f(x,\overline{u}_0)+g(x,v)\| \leqslant D$ в силу (3), справедливо следующее неравенство:

$$1 \geqslant \left\langle \frac{f(x,\overline{u}_0)+g(x,v)}{\|f(x,\overline{u}_0)+g(x,v)\|},-\frac{x_0}{\|x_0\|}\right\rangle \geqslant \frac{\alpha}{2D}.$$

Возьмем произвольный вектор $p_0 \in \mathbb{R}^k$, $\|p_0\| = 1$ такой, что

$$\left\langle p_0, -\frac{x_0}{\|x_0\|} \right\rangle = \frac{\alpha}{2D}. \tag{8}$$

Тогда существует такое число $\gamma_0 > 0$, что $\|x_0+\gamma_0 p_0\| = \|x_0\|$, то есть точка $x_0+\gamma_0 p_0$ является вторым концом хорды шара $D_{\|x_0\|}(0)$. Следовательно имеет место следующее равенство

$$\min_{\beta\in[0,1]} \|x_0 + \beta\gamma_0 p_0\| = \left\|x_0 + \frac{\gamma_0}{2} p_0\right\|. \tag{9}$$

Выберем $\delta_0 = \min\{\delta, \gamma_0/2\}$. Далее полагаем $\tau_1 = \delta_0/D$, $u(t) = \overline{u}_0$, $t \in [0, \tau_1)$.

Рассмотрим точку $x(\tau_1) = x_0 + \displaystyle\int_{\tau_0}^{\tau_1} (f(x(s), \overline{u}_0) + g(x(s), v(x(s), s)))\, ds \doteq x_1$. Для данного x_1 выполнены следующие свойства: $\|x_1 - x_0\| \leqslant \delta_0/2$, в силу выбора τ_1;

$$\left\langle \frac{x_1 - x_0}{\|x_1 - x_0\|}, -\frac{x_0}{\|x_0\|} \right\rangle \geqslant \frac{\alpha}{2D},$$

в силу (9). Докажем, что $\|x_1\| \leqslant \nu\|x_0\|$ для некоторого $\nu \in [0, 1)$. Рассмотрим $\|x_1\|^2$:

$$\|x_1\|^2 = \|x_0\|^2 + \left\|\int_{\tau_0}^{\tau_1} (f(x(s), \overline{u}_0) + g(x(s), v(s)))\, ds\right\|^2 + 2\left\langle x_0, \int_{\tau_0}^{\tau_1} (f(x(s), \overline{u}_0) + g(x(s), v(s)))\, ds \right\rangle.$$

Рассмотрим скалярное произведение:

$$\left\langle x_0, \int_{\tau_0}^{\tau_1} (f(x(s), \overline{u}_0) + g(x(s), v(s)))\, ds \right\rangle = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \langle x_0,\ f(x(s), \overline{u}_0) + g(x(s), v(s))\rangle\, ds \leqslant$$

$$\leqslant -\int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{\alpha\|x_0\|}{2}\, ds = -\frac{\alpha\|x_0\|}{2} \cdot \frac{\delta_0}{D}.$$

Заметим, что

$$\left\|\int_{\tau_0}^{\tau_1} (f(x(s), \overline{u}_0) + g(x(s), v(s)))\, ds\right\|^2 \leqslant {\delta_0}^2.$$

В силу (1), (3) имеет место неравенство $\alpha < D$. Тогда, в силу (8) и определения γ_0, имеет место равенство $\gamma_0 = \alpha\|x_0\|/D$. Поэтому, $\delta_0 = \mu\gamma_0/2$, где

$$\mu = \frac{\min\{\alpha\|x_0\|/(2D), \delta\}}{\alpha\|x_0\|/(2D)}.$$

Отсюда, $0 < \mu \leqslant 1$ и $\mu = 1$ при $\|x_0\| \leqslant 2D\delta/\alpha$. Следовательно справедлива оценка

$$\left\|\int_{\tau_0}^{\tau_1} (f(x(s), \overline{u}_0) + g(x(s), v(s)))\, ds\right\|^2 + 2\left\langle x_0, \int_{\tau_0}^{\tau_1} (f(x(s), \overline{u}_0) + g(x(s), v(s)))\, ds \right\rangle \leqslant$$

$$\leqslant {\delta_0}^2 - 2\cdot\frac{\alpha\|x_0\|}{2}\cdot\frac{\delta_0}{D} = \frac{\mu^2\gamma_0^2}{4} - \frac{\alpha\|x_0\|\mu\gamma_0}{2D} = \frac{\mu^2\alpha^2\|x_0\|^2}{4D^2} - \frac{\alpha^2\|x_0\|^2\mu}{2D^2} = \frac{\alpha^2(\mu^2 - 2\mu)}{4D^2}\cdot\|x_0\|^2 < 0.$$

Тогда

$$\|x_1\|^2 \leqslant \|x_0\|^2 - \frac{\alpha^2\mu(2-\mu)}{4D^2}\cdot\|x_0\|^2.$$

Отсюда, искомое $\nu = \sqrt{1 - \alpha^2\mu(2-\mu)/(4D^2)}$.

Далее, считая начальной точку x_1 вместо x_0, повторяем вышеописанную процедуру. Найдем вектор $\overline{u}_1 \in U$, удовлетворяющий (4). Затем в соответствии с (8) и (9) находим число γ_1, которое является длиной соответствующей хорды шара $D_{\|x_1\|}(0)$. Так как число δ не зависит от x_1, то аналогично возьмем число $\delta_1 = \min\{\delta, \gamma_1/2\}$. Далее полагаем $\tau_2 = \tau_1 + \delta_1/D$, $u(t) = \overline{u}_1$, $t \in [\tau_1, \tau_2)$. Определим конец второго отрезка разбиения как $\tau_2 - \tau_1 = \delta_1/D$. Тогда, аналогично оценкам для $\|x_1\|^2$, получим и оценку для $x_2 \doteq x(\tau_2) \leqslant \nu\|x_1\|$.

Продолжив данную процедуру получим последовательности левых концов $\{\tau_j\}_{j=0}^{\infty}$ отрезков разбиения, управлений $\{\overline{u}_j\}_{j=0}^{\infty}$ преследователя на соответствующих отрезках, состояний $\{x_j\}_{j=0}^{\infty}$ системы в момент начала отрезков разбиения.

В силу вышеописанной процедуры имеет место оценка $\|x_j\| \leqslant \nu\|x_{j-1}\|$. Следовательно, так как $0 < \nu < 1$, для любого $x_0 \in O_\varepsilon(0)$ справедливо

$$\lim_{j\to\infty} \|x_j\| \leqslant \lim_{j\to\infty} \nu^j \|x_0\| \leqslant \lim_{j\to\infty} \nu^j \varepsilon = 0. \tag{10}$$

Оценим сумму длин отрезков разбиения:

$$\lim_{j\to\infty} \tau_j = \lim_{j\to\infty} \sum_{q=1}^{j} (\tau_q - \tau_{q-1}) = \lim_{j\to\infty} \sum_{q=1}^{j} \frac{\delta_{j-1}}{D} \leqslant \lim_{j\to\infty} \sum_{q=1}^{j} \frac{\gamma_{j-1}}{2D} = \lim_{j\to\infty} \sum_{q=1}^{j} \frac{\alpha x_{j-1}}{2D^2} \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{j\to\infty} \sum_{q=1}^{j} \frac{\alpha\nu^{j-1}\|x_0\|}{2D^2} < \lim_{j\to\infty} \sum_{q=1}^{j} \frac{\alpha\nu^{j-1}\varepsilon}{2D^2} = \lim_{j\to\infty} \frac{\alpha\varepsilon}{2D^2} \cdot \frac{1-\nu^j}{1-\nu} = \frac{\alpha\varepsilon}{2D^2(1-\nu)}. \tag{11}$$

Обозначим $T = \alpha\varepsilon/(2D^2(1-\nu))$. В силу (10) и (11) полученные ε и T есть искомые величины, соответствующие условию теоремы. Действительно, для любой начальной точки $x_0 \in O_\varepsilon(0)$ и произвольного управления убегающего существует стратегия преследователя, гарантирующая сколь угодно близкое приближение к нулю состояния системы за конечное время, не превосходящее T, то есть происходит поимка.

Теорема доказана. □

Замечание 1. Пусть числа ε и T соответствуют условию теоремы, $x_0 \in O_\varepsilon(0)$ — начальное положение. Тогда, в силу (11), поимка происходит гарантированно за время $T(x_0) = \alpha\|x_0\|/(2D^2(1-\nu))$. То есть $T(x_0) \to 0$ при $x_0 \to 0$. Таким образом, в данной дифференциальной игре построено управление для преследователя, которое обеспечивает свойство игры, аналогичное N-локальной управляемости из теории управления.

Пример 1. Рассмотрим систему (1) в $\mathbb{R}^2$, где

$$f(x,u) = \begin{pmatrix} -a(x_1 - b/d) + c(x_1 - b/d)(x_2 - c/a)u_1, \\ b(x_2 - c/a) - d(x_1 - b/d)(x_2 - c/a)u_2. \end{pmatrix}, \quad g(x,v) = \begin{pmatrix} c(x_1 - b/d)(x_2 - c/a)v_1, \\ -d(x_1 - b/d)(x_2 - c/a)v_2. \end{pmatrix}$$

Здесь, $a, b, c, d > 0$. Пусть

$$U = \{(1 - a^2/c^2, 0), (-1 - a^2/c^2, 0), (-1 - a^2/c^2, -2), (1 - a^2/c^2, -2)\},$$

$$V = [-\alpha, \alpha] \times [-\alpha, \alpha], \quad \alpha \in (0,1).$$

Функции f, g являются липшицевыми по совокупности переменных.

$$f(0,U) = \{(bc^2/(ad), -bc/a), (-bc^2/(ad), -bc/a), (-bc^2/(ad), bc/a), (bc^2/(ad), bc/a)\},$$

$$g(0,V) = [-\alpha bc^2/(ad), \alpha bc^2/(ad)] \times [-\alpha bc/a, \alpha bc/a].$$

Отсюда, выполнено включение $-g(0,V) \subset \operatorname{Int}(\operatorname{co} f(0,U))$. Следовательно выполнены условия теоремы, то есть существует окрестность нуля, из которой происходит поимка.

МАТЕМАТИКА 2018. Т. 28. Вып. 1

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 480 с.
2. Blaquiere A., Gerard F., Leitmann G. Quantitative and qualitative differential games. New York: Academic Press, 1969. 172 p.
3. Красовский Н.Н. Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. М.: Наука, 1985. 520 с.
4. Friedman A. Differential games. New York: John Wiley and Sons, 1971. 350 p.
5. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
6. Hajek O. Pursuit games. New York: Academic Press, 1975. 266 p.
7. Leitmann G. Cooperative and noncooperative many-player differential games. Austria. Vienna: Springer–Verlag, 1974. 77 p.
8. Пшеничный Б.Н., Остапенко В.В. Дифференциальные игры. Киев: Наукова думка, 1992. 259 с.
9. Черноусько Ф.Л., Меликян А.А. Игровые задачи управления и поиска. М.: Наука, 1978. 270 с.
10. Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.
11. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды. Т. 2. М.: Наука, 1988. 575 с.
12. Chikrii A.A. Conflict controlled processes. Boston–London–Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997. 404 p.
13. Григоренко Н.Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во Московского ун-та, 1990. 197 с.
14. Сатимов Н.Ю., Рихсиев Б.Б. Методы решения задачи уклонения от встречи в математической теории управления. Ташкент: Фан, 2000. 176 с.
15. Никольский М.С. Одна нелинейная задача преследования // Кибернетика. 1973. № 2. С. 92–94.
16. Пшеничный Б.Н., Шишкина Н.Б. Достаточные условия конечности времени преследования // Прикладная математика и механика. 1985. Т. 49. Вып. 4. С. 517–523.
17. Двуреченский П.Е., Иванов Г.Е. Алгоритмы вычисления операторов Минковского и их применение в дифференциальных играх // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2014. Т. 54. № 2. С. 224–255. DOI: 10.7868/S0044466914020057
18. Ушаков В.Н., Ершов А.А. К решению задачи управления с фиксированным моментом окончания // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26. Вып. 4. С. 543–564. DOI: 10.20537/vm160409
19. Петров Н.Н. Об управляемости автономных систем // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4. № 4. С. 606–617.
20. Щелчков К.А. К нелинейной задаче преследования с дискретным управлением // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27. Вып. 3. С. 389–395. DOI: 10.20537/vm170308

Поступила в редакцию 26.01.2018

Щелчков Кирилл Александрович, аспирант, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: incognitobox@mail.ru

K. A. Shchelchkov

A nonlinear pursuit problem with discrete control and incomplete information

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2018, vol. 28, issue 1, pp. 111–118 (in Russian).

Keywords: differential game, pursuer, evader, nonlinear system.

MSC2010: 49N70, 49N75

DOI: 10.20537/vm180110

A two-person differential game is considered. The game is described by the system of differential equations $\dot{x} = f(x, u) + g(x, v)$, where $x \in \mathbb{R}^k$, $u \in U$, $v \in V$. The pursuer's admissible control set is a finite subset of phase space. The evader's admissible control set is a compact subset of phase space. The pursuer's purpose is to capture the evader, viz. system translation to any given neighborhood of zero. Sufficient conditions for the solvability of a capture problem in the piecewise open-loop strategies class are obtained. In addition, it is proved that the capture time tends to zero with the initial position approaching to zero. It happens independent of the evader's actions.

REFERENCES

1. Isaacs R. *Differential games*, New York: John Wiley and Sons, 1965, 416 p.
2. Blaquiere A., Gerard F., Leitmann G. *Quantitative and qualitative differential games*, New York: Academic Press, 1969, 172 p.
3. Krasovskii N.N. *Upravlenie dinamicheskoi sistemoi. Zadacha o minimume garantirovannogo rezul'tata* (Control of dynamic systems. Problem of the minimum guaranteed result), Moscow: Nauka, 1985, 518 p.
4. Friedman A. *Differential games*, New York: John Wiley and Sons, 1971, 350 p.
5. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry* (Positional differential games), Moscow: Nauka, 1974, 456 p.
6. Hajek O. *Pursuit games*, New York: Academic Press, 1975, 266 p.
7. Leitmann G. *Cooperative and noncooperative many-player differential games*, Austria, Vienna: Springer–Verlag, 1974, 77 p.
8. Pshenichnyi B.N., Ostapenko V.V. *Differentsial'nye igry* (Differential games) Kiev: Naukova dumka, 1992, 259 p.
9. Chernousko F.L., Melikyan A.A. *Igrovye zadachi upravleniya i poiska* (Game problems of control and search), Moscow: Nauka, 1978, 270 p.
10. Subbotin A.I., Chentsov A.G. *Optimizatsiya garantii v zadachakh upravleniya* (Optimization of guarantee in control problems), Moscow: Nauka, 1981, 288 p.
11. Pontryagin L.S. *Izbrannye nauchnye trudy* (Selected scientific works. Vol. 2), Moscow: Nauka, 1988, 575 p.
12. Chikrii A.A. *Conflict-controlled processes*, Boston–London–Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997, 404 p.
13. Grigorenko N.L. *Matematicheskie metody upravleniya neskol'kimi dinamicheskimi protsessami* (Mathematical methods of control over multiple dynamic processes), Moscow: Moscow State University, 1990, 197 p.
14. Satimov N.Yu., Rikhsiev B.B. *Metody resheniya zadachi ukloneniya ot vstrechi v matematicheskoi teorii upravleniya* (Methods of solving the problem of avoiding encounter in mathematical control theory), Tashkent: Fan, 2000, 176 p.
15. Nikol'skii M.S. A nonlinear pursuit problem, *Kibernetika*, 1973, no. 2, pp. 92–94 (in Russian).
16. Pshenichnyi B.N., Shishkina N.B. Sufficient conditions of finiteness of the pursuit time, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1985, vol. 49, issue 4, pp. 399–404. DOI: 10.1016/0021-8928(85)90043-7
17. Dvurechensky P.E., Ivanov G.E. Algorithms for computing Minkowski operators and their application in differential games, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2014, vol. 54, issue 2, pp. 235–264. DOI: 10.1134/S0965542514020055
18. Ushakov V.N., Ershov A.A. On the solution of control problems with fixed terminal time, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2016, vol. 26, issue 4, pp. 543–564 (in Russian). DOI: 10.20537/vm160409
19. Petrov N.N. On a controllability of autonomous systems, *Differ. uravn.*, 1968, vol. 4, no. 4, pp. 606–617 (in Russian).
20. Shchelchkov K.A. To a nonlinear pursuit problem with discrete control, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2017, vol. 27, issue 3, pp. 389–395. DOI: 10.20537/vm170308

Received 26.01.2018

Shchelchkov Kirill Aleksandrovich, Post-Graduate Student, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: incognitobox@mail.ru