МАТЕМАТИКА 2018. Т. 28. Вып. 1

УДК 517.9

© *А. Г. Ченцов, И. И. Савенков, Ю. В. Шапарь*

ОДНА ЗАДАЧА НА ПРОГРАММНЫЙ МАКСИМИН ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ ИМПУЛЬСНОГО ХАРАКТЕРА[1]

Рассматривается линейная игровая задача управления на максимин с ограничениями асимптотического характера (ОАХ), которые естественно возникают в связи с реализацией «узких» управляющих импульсов. В содержательном отношении это соответствует импульсным режимам управления с полным расходованием топлива. Возникающая игровая задача отвечает использованию асимптотических режимов управления обоими игроками, что отражено в концепции расширения, реализуемой в классе конечно-аддитивных мер. Исходная содержательная задача управления для каждого из игроков рассматривается как вариант абстрактной постановки, связанной с достижимостью при ОАХ, для которой построена соответствующая обобщенная задача о достижимости и установлено представление множества притяжения (МП), играющее роль асимптотического аналога области достижимости в классической теории управления. Данная конкретизация реализуется для каждого из игроков, на основе чего получается обобщенный максимин, для которого затем указан вариант асимптотической реализации в классе обычных управлений. Получено «конечномерное» описание МП, позволяющее находить упомянутый максимин с применением численных методов. Рассмотрено решение модельного примера задачи об игровом взаимодействии двух материальных точек, включающее этап компьютерного моделирования.

Ключевые слова: конечно-аддитивная мера, область достижимости, линейная управляемая система.

DOI: 10.20537/vm180109

Введение

В статье рассматривается задача на максимин с ограничениями импульсного характера, которые состоят в следующем: исследуется взаимодействие двух линейных управляемых систем с разрывностью в коэффициентах при управляющих воздействиях; для каждой из систем постулируется полное расходование энергоресурса на соответствующем промежутке времени. Кроме того, требуется для каждой из систем формировать программное управление отличным от нуля только на исчезающе малом промежутке времени (точная постановка задачи реализуется в асимптотическом варианте). Реально процесс управления системами осуществляется посредством «узких» (по времени) импульсов с полным расходованием энергоресурса (запаса топлива).

В связи с общими задачами импульсного управления отметим основополагающий подход Н. Н. Красовского (см. [1]), связанный с применением аппарата обобщенных функций. Этот подход послужил основой для многих последующих исследований в области импульсного управления (см. [2–4] и др.).

Особенностью настоящей работы является то, что при реализации импульсных воздействий в условиях разрывности правых частей дифференциальных уравнений типично возникают эффекты типа произведения разрывной функции на обобщенную. В классе линейных управляемых систем удается получить описание упомянутых эффектов на основе построения расширений в классе конечно-аддитивных (к.-а.) мер (см. [5, 6]). Настоящая работа может считаться естественным продолжением [7, 8], где рассматривались вопросы построения асимптотических аналогов областей достижимости (ОД); эти аналоги имеют смысл множеств притяжения (МП). Для последних в [7, 8] получено (даже в несколько более общей задаче) «конечномерное» описание; отметим также работу [9]. В настоящей работе приведены результаты компьютерного моделирования для примера игровой задачи управления материальными точками.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты №№ 16–01–00649, 16–01–00505).

§ 1. Сводка обозначений общего характера

Используется стандартная теоретико-множественная символика (кванторы, пропозициональные связки, $\varnothing$ — пустое множество). Символ def заменяет фразу «по определению», а $\exists!$ — фразу «существует и единственно»; $\triangleq$ — равенство по определению. Семейством называем множество, все элементы которого сами являются множествами. Как правило, ниже рассматриваются семейства подмножеств (п/м) того или иного фиксированного множества. Принимаем аксиому выбора. Для произвольного объекта s через $\{s\}$ обозначаем синглетон, содержащий s. Если H — множество, то через $\mathcal{P}(H)$ (через $\mathcal{P}'(H)$) обозначаем семейство всех (всех непустых) п/м H; итак, $\mathcal{P}'(H) = \mathcal{P}(H) \setminus \{\varnothing\}$.

Кроме того, через $\mathrm{Fin}(H)$ обозначим семейство всех конечных множеств из $\mathcal{P}'(H)$. Если $\mathcal{X}$ — непустое семейство, Y — множество, то

$$\mathcal{X}|_Y \triangleq \{X \cap Y : X \in \mathcal{X}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(Y))$$

есть след семейства $\mathcal{X}$ на множество Y. Если A и B — множества, то через B^A обозначаем множество всех отображений из A в B; если $h \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}(A)$, то $h^1(C) \triangleq \{h(x)\colon x \in C\} \in \mathcal{P}(B)$ (образ C при действии h), $h^1(C) \neq \varnothing$ при $C \neq \varnothing$.

Через $\mathbb{R}$ обозначаем вещественную прямую, $\mathbb{N} \triangleq \{1; 2; \ldots\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R})$ есть натуральный ряд; полагаем, что элементы $\mathbb{N}$ (натуральные числа) не являются множествами. Пусть при $s \in \mathbb{N}$

$$\Big(\overline{1, s} \triangleq \{k \in \mathbb{N} \mid k \leqslant s\}\Big) \ \& \ \Big(\overrightarrow{s, \infty} \triangleq \{k \in \mathbb{N} \mid s \leqslant k\}\Big);$$

получаем два непустых п/м $\mathbb{N}$. Если H — множество и $k \in \mathbb{N}$, то вместо $H^{\overline{1,k}}$ используем более традиционное обозначение H^k, имеющее смысл $H^k = \underbrace{H \times \ldots \times H}_{k \text{ раз}}$; элементы H^k являются, строго говоря, кортежами $(h_i)_{i \in \overline{1,k}} : \overline{1,k} \to H$. Последовательности в H суть элементы множества $H^{\mathbb{N}}$ и только они.

Элементы топологии. Если (X, τ) есть топологическое пространство (ТП), то через $(\tau-\mathrm{comp})[X]$ условимся обозначать семейство всех непустых компактных [10, с. 196] п/м X. Если при этом $A \in \mathcal{P}(X)$, то через $\mathrm{cl}(A, \tau)$ обозначаем замыкание множества A в ТП (X, τ). Пусть при $x \in X$ $N_\tau^0(x) \triangleq \{G \in \tau \mid x \in G\}$; тогда [11, гл. I] $N_\tau(x) \triangleq \{H \in \mathcal{P}(X) \mid \exists\, G \in N_\tau^0(x) : G \subset H\}$ есть фильтр окрестностей x в ТП (X, τ). Заметим, что при $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ и $x \in X$

$$\Big((x_i)_{i \in \mathbb{N}} \xrightarrow{\tau} x\Big) \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} (\forall\, H \in N_\tau(x)\ \exists\, m \in \mathbb{N} : x_k \in H\ \forall\, k \in \overrightarrow{m, \infty}).$$

Если (X, τ_1) и (Y, τ_2) — два ТП, $X \neq \varnothing$, $Y \neq \varnothing$, то

$$C(X, \tau_1, Y, \tau_2) \triangleq \{f \in Y^X \mid f^{-1}(G) \in \tau_1\ \forall\, G \in \tau_2\}$$

есть множество всех непрерывных отображений из (X, τ_1) и (Y, τ_2). Если второе из упомянутых ТП — вещественная прямая $\mathbb{R}$ в обычной $|\cdot|$-топологии $\tau_{\mathbb{R}}$, то упомянутое обозначение упрощается: для каждого ТП (X, τ), $X \neq \varnothing$, полагаем $\mathbb{C}(X, \tau) \triangleq C(X, \tau, \mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$.

Если $k \in \mathbb{N}$, то оснащаем $\mathbb{R}^k$ топологией $\tau_{\mathbb{R}}^{(k)}$ покоординатной сходимости; данная топология порождается нормой $\|\cdot\|_k$ пространства $\mathbb{R}^k$, которую для определенности задаем условием: при $x = (x_i)_{i \in \overline{1,k}} \in \mathbb{R}^k$

$$\|x\|_k \triangleq \max_{1 \leqslant i \leqslant k} |x_i| \in [0, \infty[.$$

Для любых двух ТП (X, τ_1) и (Y, τ_2) через $\tau_1 \otimes \tau_2$ обозначаем естественную топологию произведения [10, с. 127] упомянутых ТП.

§ 2. Множества притяжения (основные понятия)

Рассмотрим некоторые общие конструкции, связанные с задачей о достижимости при ОАХ. В этой связи фиксируем в настоящем разделе непустое множество E, элементы которого рассматриваются в качестве обычных решений (управлений), а также семейство $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, определяющее упомянутые ОАХ. Таким образом, $\mathcal{E}$ есть непустое подсемейство $\mathcal{P}(E)$. Более того, полагаем, что

$$\beta[E] \triangleq \{\mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)) \mid \forall B_1 \in \mathcal{B}\; \forall B_2 \in \mathcal{B}\; \exists B_3 \in \mathcal{B} : B_3 \subset B_1 \cap B_2\} \tag{2.1}$$

и, кроме того, $\beta_0[E] \triangleq \{\mathcal{B} \in \beta[E] \mid \varnothing \notin \mathcal{B}\}$ (семейство всех баз фильтра множества E), мы ограничимся рассмотрением случая

$$\mathcal{E} \in \beta[E], \tag{2.2}$$

что достаточно для всех последующих целей. Итак (см. (2.1), (2.2)), $\mathcal{E}$ — направленное семейство, а тогда для всяких ТП (Y, τ) и отображения $\mathbf{f} \in Y^E$

$$(\mathrm{as})[E; Y; \tau; \mathbf{f}; \mathcal{E}] \triangleq \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \mathrm{cl}(\mathbf{f}^1(\Sigma), \tau) \tag{2.3}$$

есть замкнутое в (Y, τ) п/м Y. Если (Y, τ) есть ТП с первой аксиомой счетности, а семейство $\mathcal{E}$ имеет счетную базу [6, (3.3.17)], то множество (2.3), именуемое ниже МП, допускает секвенциальную реализацию:

$$(\mathrm{as})[E; Y; \tau; \mathbf{f}; \mathcal{E}] = (\mathrm{sas})[E; Y; \tau; \mathbf{f}; \mathcal{E}], \tag{2.4}$$

где (здесь и ниже; см. также [7–9])

$$(\mathrm{sas})[E; Y; \tau; \mathbf{f}; \mathcal{E}] \triangleq \Big\{y \in Y \mid \exists\, (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}} : \\ (\forall\, \Sigma \in \mathcal{E}\; \exists\, m \in \mathbb{N} : x_k \in \Sigma\; \forall\, k \in \overrightarrow{m, \infty})\ \&\ \big((\mathbf{f}(x_i))_{i \in \mathbb{N}} \xrightarrow{\tau} y\big)\Big\}.$$

Заметим, что МП (2.3), (2.4) могут использоваться в качестве «основных» либо «вспомогательных». Полагаем далее, что «основное» МП является всякий раз хаусдорфовым ТП, а «вспомогательное» — компактным. Итак, пусть $(\mathbf{H}, \mathbf{t})$, $\mathbf{H} \neq \varnothing$, — хаусдорфово ТП ($T_2$-пространство) и $\mathbf{h} \in \mathbf{H}^E$; тогда $(\mathrm{as})[E; \mathbf{H}; \mathbf{t}; \mathbf{f}; \mathcal{E}]$, где $\mathcal{E}$ соответствует (2.2), рассматриваем сейчас в качестве «основного» МП. Если при этом имеются компактное ТП $(\mathbf{K}, \theta)$, $\mathbf{K} \neq \varnothing$, отображения $\mathbf{m} \in \mathbf{K}^E$, $g \in C(\mathbf{K}, \theta, \mathbf{H}, \mathbf{t})$ и, кроме того, $\mathbf{h} = g \circ \mathbf{m}$, то $(\mathbf{K}, \theta, \mathbf{m}, g)$ называем компактификатором, отвечающим триплету $(\mathbf{H}, \mathbf{t}, \mathbf{h})$, а МП $(\mathrm{as})[E; \mathbf{K}; \theta; \mathbf{m}; \mathcal{E}]$ рассматриваем как «вспомогательное», имея в виду [6, предложение 5.2.1] получающееся равенство

$$(\mathrm{as})[E; \mathbf{H}; \mathbf{t}; \mathbf{h}; \mathcal{E}] = g^1\left((\mathrm{as})[E; \mathbf{K}; \theta; \mathbf{m}; \mathcal{E}]\right) \tag{2.5}$$

(см. (2.2), (2.3)). В последующих построениях будут использоваться два «основных» МП и, соответственно, два обслуживающих их (в смысле реализации (2.5)) компактификатора. Это отвечает игровому характеру рассматриваемой далее задачи.

§ 3. Один вариант задачи об «асимптотической» достижимости

В настоящем разделе кратко излагается задача асимптотического анализа [9] и схема ее решения. Условия данной задачи таковы, что в ней изначально отсутствуют точные решения в смысле Дж. Варги; данная постановка (см. [7, 9]) является «чисто асимптотической». В дальнейшем будут использоваться два варианта упомянутой задачи о достижимости, которые будут связываться с поведением двух конфликтующих игроков.

В пределах настоящего раздела фиксируем два числа: $a \in \mathbb{R}$ и $b \in \mathbb{R}$, для которых $a < b$. В виде $I \triangleq [a, b]$ имеем невырожденный замкнутый промежуток вещественной прямой $\mathbb{R}$, а в виде $\mathfrak{L} \triangleq \{L \in \mathcal{P}(I) \mid \exists\, c \in I\; \exists\, d \in I :\ (\,]c, d[\subset L)\ \&\ (L \subset [c, d])\}$ получаем полуалгебру [12, гл. I] п/м I, элементами которой являются открытые, замкнутые и полуоткрытые промежутки $\mathbb{R}$, содержащиеся в I. Через $\mathcal{A}$ обозначаем здесь алгебру п/м I, порожденную полуалгеброй $\mathfrak{L}$. Через η обозначаем сужение меры Лебега на алгебру $\mathcal{A}$ (счетно-аддитивное продолжение функции длины, определенной на $\mathfrak{L}$). В связи с понятиями конечно-аддитивной (к.-а.) теории меры следуем [16, гл. 2,3]. Далее к.-а. пространство с мерой $(I, \mathcal{A}, \eta)$ будем использовать в двух вариантах: $(I_1, \mathcal{A}_1, \eta_1)$ и $(I_2, \mathcal{A}_2, \eta_2)$.

Через $(\mathrm{add})[\mathcal{A}]$ обозначаем (см. [5, § 3.3]) множество всех вещественнозначных (в/з) к.-а. мер на алгебре $\mathcal{A}$. Соответственно через $(\mathrm{add})_+[\mathcal{A}]$ обозначаем конус всех неотрицательных в/з к.-а. мер на $\mathcal{A}$ (см. [5, § 3.3]); здесь и ниже линейные операции и порядок в пространствах функционалов определяются поточечно. В виде $\mathbb{P}(\mathcal{A}) \triangleq \{\mu \in (\mathrm{add})_+[\mathcal{A}] \mid \mu(I) = 1\}$ получаем множество всех к.-а. вероятностей на $\mathcal{A}$; $\mathbb{T}(\mathcal{A}) \triangleq \{\mu \in \mathbb{P}(\mathcal{A}) \mid \forall A \in \mathcal{A}\ (\mu(A) = 0) \vee (\mu(A) = 1)\}$. Полагаем

$$\mathbb{A}(\mathcal{A}) \triangleq \{\mu - \nu : \ \mu \in (\mathrm{add})_+[\mathcal{A}],\ \nu \in (\mathrm{add})_+[\mathcal{A}]\},$$

получая [5, (3.3.5)] линейное пространство к.-а. мер ограниченной вариации, определенных на $\mathcal{A}$. Заметим, что [16, (4.11.6)] $\mathbb{A}(\mathcal{A}) = \{\mu \in (\mathrm{add})[\mathcal{A}] \mid \exists c \in [0, \infty[: |\mu(A)| \leqslant c\ \forall A \in \mathcal{A}\}$. Оснащаем $\mathbb{A}(\mathcal{A})$ (сильной) нормой, определяемой посредством полной вариации;

$$(\mathrm{add})_+[\mathcal{A}] \subset \mathbb{A}(\mathcal{A}).$$

Ниже используем ступенчатые и ярусные в/з функции [16, гл. 2]. Пространство $\mathbb{B}(I)$ всех в/з ограниченных функций оснащаем традиционной sup-нормой $\|\cdot\|$ [16, § 2.6]. При этом $(\mathbb{B}(I), \|\cdot\|)$ — банахово пространство [16, с. 104].

Если $\Lambda \in \mathcal{P}(I)$, то полагаем, что $\chi_\Lambda \in \mathbb{R}^I$ есть def индикатор множества Λ, рассматриваемого как п/м I:

$$\Big(\chi_\Lambda(x) \triangleq 1\ \forall x \in \Lambda\Big)\ \&\ \Big(\chi_\Lambda(y) \triangleq 0\ \forall y \in I \setminus \Lambda\Big). \tag{3.1}$$

В частности, функция (3.1) определена при $\Lambda \in \mathcal{A}$. Через $B_0(I, \mathcal{A})$ обозначаем линейную оболочку множества $\{\chi_A : A \in \mathcal{A}\}$, получая линейное многообразие ступенчатых относительно измеримого пространства $(I, \mathcal{A})$ в/з функций на I; $B_0(I, \mathcal{A}) \subset \mathbb{B}(I)$. Тогда

$$B_0^+(I, \mathcal{A}) \triangleq \{f \in B_0(I, \mathcal{A}) \mid 0 \leqslant f(x)\ \forall x \in I\}$$

есть положительный конус линейного многообразия $B_0(I, \mathcal{A})$. Через $B(I, \mathcal{A})$ обозначаем замыкание $B_0(I, \mathcal{A})$ в топологии множества $\mathbb{B}(I)$, порожденной sup-нормой $\|\cdot\|$. Ясно, что $B(I, \mathcal{A}) \in \mathcal{P}(\mathbb{B}(I))$ с нормой, индуцированной из $(\mathbb{B}(I), \|\cdot\|)$, есть банахово пространство. Через $B^*(I, \mathcal{A})$ обозначаем множество всех линейных ограниченных функционалов на $B(I, \mathcal{A})$; иными словами, $B^*(I, \mathcal{A})$ есть топологически сопряженное к $B(I, \mathcal{A})$ пространство. Если $\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{A})$ и $f \in B(I, \mathcal{A})$, то μ-интеграл f

$$\int_I f\, d\mu \in \mathbb{R}$$

определяем по простейшей схеме [5, гл. 3]. Тогда в виде

$$\mu \mapsto \left(\int_I f\, d\mu\right)_{f \in B(I, \mathcal{A})} : \mathbb{A}(\mathcal{A}) \to B^*(I, \mathcal{A})$$

реализуется изометрический изоморфизм $\mathbb{A}(\mathcal{A})$ в (сильной) норме-вариации на $B^*(I, \mathcal{A})$ с традиционной нормой. Получающейся при этом двойственности $(B(I, \mathcal{A}), \mathbb{A}(\mathcal{A}))$ сопоставляется «обычная» $*$-слабая топология $\tau_*(\mathcal{A})$ множества $\mathbb{A}(\mathcal{A})$, превращающая последнее в локально выпуклый σ-компакт

$$(\mathbb{A}(\mathcal{A}), \tau_*(\mathcal{A})). \tag{3.2}$$

Кроме того, $\mathbb{A}(\mathcal{A})$ оснащаем также топологией $\tau_0(\mathcal{A})$ [5, (4.2.9)] подпространства тихоновской степени вещественной прямой $\mathbb{R}$ в дискретной топологии при условии, что $\mathcal{A}$ используется в качестве индексного множества. При этом топологии

$$\tau_*^+(\mathcal{A}) \triangleq \tau_*(\mathcal{A})|_{(\mathrm{add})_+[\mathcal{A}]},\ \ \tau_0^+(\mathcal{A}) \triangleq \tau_0(\mathcal{A})|_{(\mathrm{add})_+[\mathcal{A}]},$$

индуцированные соответственно из ТП (3.2) и

$$(\mathbb{A}(\mathcal{A}), \tau_0(\mathcal{A})),$$

сравнимы: $\tau_*^+(\mathcal{A}) \subset \tau_0^+(\mathcal{A})$. В результате реализуется битопологическое пространство (БТП)

$$((\mathrm{add})_+[\mathcal{A}], \tau_*^+(\mathcal{A}), \tau_0^+(\mathcal{A})),$$

т. е. множество, оснащенное парой сравнимых топологий. Отметим, что [9, раздел 3].

$$\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}) \triangleq \{\mu \in \mathbb{P}(\mathcal{A}) \mid \forall\, A \in \mathcal{A}\ (\eta(A) = 0) \Rightarrow (\mu(A) = 0)\} \in (\tau_*(\mathcal{A}) - \mathrm{comp})[\mathbb{A}(\mathcal{A})], \tag{3.3}$$

$$\mathbb{T}_\eta(\mathcal{A}) \triangleq \{\mu \in \mathbb{T}(\mathcal{A}) \mid \forall\, A \in \mathcal{A}\ (\eta(A) = 0) \Rightarrow (\mu(A) = 0)\} \in (\tau_*(\mathcal{A}) - \mathrm{comp})[\mathbb{A}(\mathcal{A})]. \tag{3.4}$$

Элементы множества (3.3) будут играть роль обобщенных управлений (ОУ); данные ОУ являются, строго говоря, к.-а. вероятностями на $\mathcal{A}$ со свойством слабой абсолютной непрерывности относительно η. Из (3.4) имеем, что $\mathbb{T}_\eta(\mathcal{A}) \subset \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A})$.

Для построения аналогов обычных управлений потребуются некоторые новые обозначения; так, $B_0^+(I, \mathcal{A}) \triangleq \{f \in B_0(I, \mathcal{A}) \mid 0 \leqslant f(t)\ \forall\, t \in I\}$. Тогда [9, (3.3)]

$$\mathbf{F}_\eta(\mathcal{A}) \triangleq \left\{ f \in B_0(I, \mathcal{A}) \mid \int_I f\, d\eta = 1 \right\} \in \mathcal{P}'(B_0^+(I, \mathcal{A})). \tag{3.5}$$

Элементы множества (3.5) будут далее выполнять роль обычных программных управлений на промежутке I.

В [13] указано представление компакта Стоуна (пространство у/ф алгебры множеств), отвечающего ИП $(I, \mathcal{A})$; это представление существенно для целей конкретизации множества допустимых ОУ; см., в частности, [9, (3.4), (3.8)]. Следуя [13], полагаем, что $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})$ есть множество всех у/ф ИП $(I, \mathcal{A})$ ($\mathcal{U} \in \mathcal{P}'(\mathcal{A})$ при $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})$), а

$$\mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{A}) \triangleq \left\{ \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}) \mid \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U = \varnothing \right\}$$

есть множество всех свободных у/ф данного ИП;

$$\mathcal{U}_t^{(-)} \triangleq \{A \in \mathcal{A} \mid \exists\, c \in [a, t[\colon [c, t[\subset A\} \in \mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{A})\ \forall\, t \in]a, b], \tag{3.6}$$

$$\mathcal{U}_t^{(+)} \triangleq \{A \in \mathcal{A} \mid \exists\, c \in]t, b] \colon]t, c] \subset A\} \in \mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{A})\ \forall\, t \in [a, b[. \tag{3.7}$$

В [13] установлено равенство $\mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{A}) \triangleq \left\{\mathcal{U}_t^{(-)} : t \in]a, b]\right\} \cup \left\{\mathcal{U}_t^{(+)} : t \in [a, b[\right\}$, которое определяет нужное представление $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})$, поскольку описание тривиальных (фиксированных) у/ф хорошо известно.

Заметим, что [14, (10.4.7), (10.4.8), предложение 10.4.2] при $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})$ определена двузначная к.-а. вероятность $æ[\mathcal{U}] \in \mathbb{T}(\mathcal{A})$:

$$\left(æ[\mathcal{U}](U) \triangleq 1\ \forall\, U \in \mathcal{U} \right)\ \&\ \left(æ[\mathcal{U}](A) \triangleq 0\ \forall\, A \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{U} \right).$$

Напомним, что [15, предложение 7.1, теорема 7.1]

$$\mathbb{T}_\eta(\mathcal{A}) = \left\{ æ\left[\mathcal{U}_t^{(-)}\right] : t \in]a, b] \right\} \cup \left\{ æ\left[\mathcal{U}_t^{(+)}\right] : t \in [a, b[\right\} = \mathbb{T}(\mathcal{A}) \cap \mathrm{cl}(\{f * \eta : f \in \mathbb{F}_\eta(\mathcal{A})\}, \tau_*(\mathcal{A})). \tag{3.8}$$

Отметим также следующее представление [6, теорема 3.7.2]:

$$\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}) = \mathrm{cl}(\{f * \eta : f \in \mathbf{F}_\eta(\mathcal{A})\}, \tau_*(\mathcal{A})) = \mathrm{cl}(\{f * \eta : f \in \mathbf{F}_\eta(\mathcal{A})\}, \tau_0(\mathcal{A})). \tag{3.9}$$

В связи с (3.8), (3.9) отметим также [7]. Полагаем, кроме того, что при $t \in]a,b[$

$$\mathbb{P}^0_\eta(\mathcal{A}|t) \triangleq \Big\{\alpha\,\text{æ}\left[\mathcal{U}^{(-)}_t\right] + (1-\alpha)\,\text{æ}\left[\mathcal{U}^{(+)}_t\right] : \alpha \in [0,1]\Big\}, \tag{3.10}$$

получая (см. (3.8)) непустое п/м (компакта) (3.9). В терминах (3.10) определяем множество

$$\mathbb{P}^0_\eta(\mathcal{A}) \triangleq \left(\bigcup_{t\in]a,b[} \mathbb{P}^0_\eta(\mathcal{A}|t)\right) \cup \Big\{\text{æ}\left[\mathcal{U}^{(+)}_a\right]\Big\} \cup \Big\{\text{æ}\left[\mathcal{U}^{(-)}_b\right]\Big\}, \tag{3.11}$$

элементами которого являются η-непрерывные к.-а. вероятности, «привязанные» каждая к некоторой точке из $[a,b]$. Пусть

$$\tau^*_\eta(\mathcal{A}) \triangleq \tau_*(\mathcal{A})|_{\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A})},\ \ \tau^0_\eta(\mathcal{A}) \triangleq \tau_0(\mathcal{A})|_{\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A})}; \tag{3.12}$$

тогда $\tau^*_\eta(\mathcal{A}) \subset \tau^0_\eta(\mathcal{A})$. При этом в виде

$$(\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}), \tau^*_\eta(\mathcal{A}))$$

имеем непустой компакт (компактное хаусдорфово ТП). Если $f \in \mathbf{F}_\eta(\mathcal{A})$, то в силу (3.5) $\mathrm{supp}^b_a(f) \triangleq \{t \in I \mid f(t) \neq 0\} \in \mathcal{P}'(I)$. Поэтому при $f \in \mathbf{F}_\eta(\mathcal{A})$ определены следующие значения:

$$\mathbf{t}_0(f|\,a,b) \triangleq \inf\left(\mathrm{supp}^b_a(f)\right) \in I,\ \ \mathbf{t}^0(f|\,a,b) \triangleq \sup\left(\mathrm{supp}^b_a(f)\right) \in I,$$

$$\mathbf{t}_f(a,b) \triangleq (\mathbf{t}_0(f|\,a,b) + \mathbf{t}^0(f|\,a,b))/2 \in I,$$

$a \leqslant \mathbf{t}_0(f|\,a,b) \leqslant \mathbf{t}_f(a,b) \leqslant \mathbf{t}^0(f|\,a,b)$, $\ \mathbf{t}_0(f|\,a,b) < \mathbf{t}^0(f|\,a,b)$. Согласно (3.5) имеем, что

$$\int_{[\mathbf{t}_0(f|\,a,b),\mathbf{t}^0(f|\,a,b)]} f\,d\eta = \int_I f\,d\eta = 1,$$

а потому $\eta\left([\mathbf{t}_0(f|\,a,b), \mathbf{t}^0(f|\,a,b)]\right) \neq 0$. Следуя построениям [9, раздел 4], полагаем

$$\mathbf{F}_\varepsilon(\mathcal{A},\eta) \triangleq \left\{f \in \mathbf{F}_\eta(\mathcal{A}) \mid \mathbf{t}^0(f|\,a,b) - \mathbf{t}_0(f|\,a,b) < \varepsilon\right\}\ \ \forall\,\varepsilon \in]0,\infty[. \tag{3.13}$$

Легко понять, что каждое из множеств (3.13) непусто. Поэтому

$$\mathfrak{F}_\eta[\mathcal{A}] \triangleq \{\mathbf{F}_\varepsilon(\mathcal{A},\eta) : \varepsilon \in]0,\infty[\,\} \in \beta_0[\mathbf{F}_\eta(\mathcal{A})]. \tag{3.14}$$

Итак (см. (3.14)), множества (3.13) составляют в совокупности БФ (непустого) множества (3.5). Мы используем БФ (3.14) в качестве ОАХ. Упомянутые ОАХ применяются [9, теорема 4.1] при построении МП в битопологическом пространстве (БТП)

$$\left(\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}), \tau^*_\eta(\mathcal{A}), \tau^0_\eta(\mathcal{A})\right)$$

(напомним, что БТП есть триплет (X,τ_1,τ_2), где τ_1 и τ_2 — топологии множества X со свойством $\tau_1 \subset \tau_2$). Пусть, кроме того,

$$\mathfrak{I}_\eta[\mathcal{A}] \triangleq (f * \eta)_{f\in\mathbf{F}_\eta(\mathcal{A})} \in \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A})^{\mathbf{F}_\eta(\mathcal{A})}.$$

Из (3.9) и (3.12) вытекает следующая цепочка равенств:

$$\mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}) = \mathrm{cl}\left(\mathfrak{I}_\eta[\mathcal{A}]^1(\mathbf{F}_\eta(\mathcal{A})), \tau^*_\eta(\mathcal{A})\right) = \mathrm{cl}\left(\mathfrak{I}_\eta[\mathcal{A}]^1(\mathbf{F}_\eta(\mathcal{A})), \tau^0_\eta(\mathcal{A})\right). \tag{3.15}$$

Теперь напомним (см. (3.15)) важное положение [9, теорема 4.1], касающееся представления МП типа (2.3) в терминах (3.11):

$$\mathbb{P}^0_\eta(\mathcal{A}) = (\mathrm{as})[\mathbf{F}_\eta(\mathcal{A}); \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}); \tau^0_\eta(\mathcal{A}); \mathfrak{I}_\eta[\mathcal{A}]; \mathfrak{F}_\eta[\mathcal{A}]] = (\mathrm{as})\left[\mathbf{F}_\eta(\mathcal{A}); \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}); \tau^*_\eta(\mathcal{A}); \mathfrak{I}_\eta[\mathcal{A}]; \mathfrak{F}_\eta[\mathcal{A}]\right] =$$
$$= (\mathrm{sas})\left[\mathbf{F}_\eta(\mathcal{A}); \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}); \tau^0_\eta(\mathcal{A}); \mathfrak{I}_\eta[\mathcal{A}]; \mathfrak{F}_\eta[\mathcal{A}]\right] = (\mathrm{sas})\left[\mathbf{F}_\eta(\mathcal{A}); \mathbb{P}_\eta(\mathcal{A}); \tau^*_\eta(\mathcal{A}); \mathfrak{I}_\eta[\mathcal{A}]; \mathfrak{F}_\eta[\mathcal{A}]\right]. \tag{3.16}$$

Итак, (3.11), (3.16) есть весьма универсальное МП; оно играет далее роль множества допустимых ОЭ. Основное МП конструируется в $\mathbb{R}^n$, где $n \in \mathbb{N}$. Фиксируем $\pi_1 \in B(I, \mathcal{A})$, ..., $\pi_n \in B(I, \mathcal{A})$, получая n-вектор-функцию со значениями $(\pi_i(t))_{i \in \overline{1,n}} \in \mathbb{R}^n \ \forall t \in I$. В этих терминах определяем n-вектор-функционал $\Pi[\eta]$ вида

$$f \mapsto \left(\int_I \pi_i f \, d\eta \right)_{i \in \overline{1,n}} : \mathbf{F}_\eta(\mathcal{A}) \to \mathbb{R}^n; \tag{3.17}$$

используем $\Pi[\eta]$ (3.17) в качестве целевого отображения задачи. В последующих построениях потребуется МП [9, (5.3)]

$$\text{(as)} \left[\mathbf{F}_\eta(\mathcal{A}); \mathbb{R}^n; \tau_{\mathbb{R}}^{(n)}; \Pi[\eta]; \mathfrak{F}_\eta[\mathcal{A}] \right] = \text{(sas)} \left[\mathbf{F}_\eta(\mathcal{A}); \mathbb{R}^n; \tau_{\mathbb{R}}^{(n)}; \Pi[\eta]; \mathfrak{F}_\eta[\mathcal{A}] \right] = \\ = \bigcap_{\varepsilon \in]0, \infty[} \text{cl} \left(\Pi[\eta]^1 (\mathbf{F}_\varepsilon(\mathcal{A}, \eta)), \tau_{\mathbb{R}}^{(n)} \right) \tag{3.18}$$

(ниже будут использоваться два варианта МП (3.18), отвечающие игровому характеру основной задачи).

В [9, теорема 5.1] указано конкретное представление МП (3.18) в виде компакта в $\left(\mathbb{R}^n, \tau_{\mathbb{R}}^{(n)}\right)$. В этой связи введем, следуя [9, раздел 5], по заданным функциям $\pi_1, \ldots, \pi_n$ функции соответствующих односторонних пределов. Напомним с учетом (3.6), (3.7) свойства [9, (5.7)], из которых вытекает корректность следующих (см. [13, предложение 7.1]) определений односторонних пределов функций из $B(I, \mathcal{A})$: если $f \in B(I, \mathcal{A})$, то

1) при $t \in]a; b]$ функция f имеет предел слева в точке t, для которого

$$\lim_{\theta \uparrow t} f(\theta) = \int_I f \, d\text{æ} \left[\mathcal{U}_t^{(-)} \right] \in \mathbb{R};$$

2) при $t \in [a; b[$ функция f имеет предел справа в точке t, для которого

$$\lim_{\theta \downarrow t} f(\theta) = \int_I f \, d\text{æ} \left[\mathcal{U}_t^{(+)} \right] \in \mathbb{R}.$$

Поэтому [9, (5.10)] определены следующие векторы:

$$\left(\widehat{\pi}_\uparrow(t) \triangleq \left(\lim_{\theta \uparrow t} \pi_i(\theta) \right)_{i \in \overline{1,n}} \in \mathbb{R}^n \forall t \in]a, b] \right) \& \left(\widehat{\pi}_\downarrow(t) \triangleq \left(\lim_{\theta \downarrow t} \pi_i(\theta) \right)_{i \in \overline{1,n}} \in \mathbb{R}^n \forall t \in [a, b[\right). \tag{3.19}$$

Если $x \in \mathbb{R}^n$ и $y \in \mathbb{R}^n$, то через $[x; y]_n$ обозначаем множество всех векторов $\alpha x + (1 - \alpha) y$, $\alpha \in [0, 1]$; получаем сегмент в $\mathbb{R}^n$. Тогда МП (3.18) обладает следующим «конечномерным» представлением в терминах векторов (3.19):

$$\text{(as)} \left[\mathbf{F}_\eta(\mathcal{A}); \mathbb{R}^n; \tau_{\mathbb{R}}^{(n)}; \Pi[\eta]; \mathfrak{F}_\eta[\mathcal{A}] \right] = \text{(sas)} \left[\mathbf{F}_\eta(\mathcal{A}); \mathbb{R}^n; \tau_{\mathbb{R}}^{(n)}; \Pi[\eta]; \mathfrak{F}_\eta[\mathcal{A}] \right] = \\ = \left(\bigcup_{t \in]a, b[} [\widehat{\pi}_\uparrow(t); \widehat{\pi}_\downarrow(t)]_n \right) \cup \{ \widehat{\pi}_\downarrow(a); \widehat{\pi}_\uparrow(b) \} \in \left(\tau_{\mathbb{R}}^{(n)} - \text{comp} \right) [\mathbb{R}^n]. \tag{3.20}$$

Таким образом, в виде непустого компакта (3.20) реализуется МП (3.18). В дальнейшем изложении нам потребуются два варианта (3.20), отвечающие двум игрокам.

§ 4. Абстрактная игровая задача программного управления, 1

Рассмотрим применение конструкций предыдущего параграфа для решения одной игровой задачи. Последняя имеет своим источником содержательную задачу программного управления линейной системой с импульсным ограничением на выбор управлений. Однако в интересах большей общности рассмотрим постановку абстрактной игровой задачи в духе [17]. В то же время обозначения, введенные в предыдущем параграфе, будут в существенной части сохранены при использовании надлежащих индексов, указывающих на принадлежность тому или иному игроку.

Фиксируем $a_1 \in \mathbb{R}$, $b_1 \in \mathbb{R}$, $a_2 \in \mathbb{R}$ и $b_2 \in \mathbb{R}$, для которых $a_1 < b_1$ и $a_2 < b_2$; полагаем, что $I_1 \triangleq [a_1, b_1]$ и $I_2 \triangleq [a_2, b_2]$. Ясно, что $I_1 \neq \varnothing$ и $I_2 \neq \varnothing$. Полуалгебры п/м I_1 и I_2 соответственно имеют вид

$$\mathfrak{L}_1 \triangleq \{L \in \mathcal{P}(I_1) \mid \exists\, c \in I_1\ \exists\, d \in I_1 :\ (]c, d[\subset L)\ \&\ (L \subset [c, d])\},$$

$$\mathfrak{L}_2 \triangleq \{L \in \mathcal{P}(I_2) \mid \exists\, c \in I_2\ \exists\, d \in I_2 :\ (]c, d[\subset L)\ \&\ (L \subset [c, d])\}.$$

Через $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ обозначаем алгебры п/м I_1 и I_2, порожденные полуалгебрами $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$ соответственно (при этом, конечно, $\mathfrak{L}_1 \subset \mathcal{A}_1$ и $\mathfrak{L}_2 \subset \mathcal{A}_2$). Тогда $(I_1, \mathcal{A}_1)$ и $(I_2, \mathcal{A}_2)$ суть непустые ИП с алгебрами множеств. Через η_1 и η_2 обозначаем сужения меры Лебега на $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ соответственно (η_1 и η_2 соответствуют счетно-аддитивным неотрицательным мерам $\alpha\left[\bar{\mathbf{I}}_{a_1}^{b_1}\right]$ и $\alpha\left[\bar{\mathbf{I}}_{a_2}^{b_2}\right]$ в [14, (8.5.1)]). В частности, $\eta_1 \in (\mathrm{add})_+[\mathcal{A}_1]$ и $\eta_2 \in (\mathrm{add})_+[\mathcal{A}_2]$. Теперь воспользуемся обозначениями предыдущего параграфа, заменяя (a, b) на (a_1, b_1) и (a_2, b_2). Кроме того, далее в качестве меры η предыдущего параграфа будем использовать η_1 и η_2. Тогда, в частности, мы получаем два к.-а. пространства с мерой $(I_1, \mathcal{A}_1, \eta_1)$ и $(I_2, \mathcal{A}_2, \eta_2)$, в терминах которых определены (см. (3.3)) непустые компакты

$$\mathbb{P}_{\eta_1}(\mathcal{A}_1) \in (\tau_*(\mathcal{A}_1) - \mathrm{comp})[\mathbb{A}(\mathcal{A}_1)], \tag{4.1}$$

$$\mathbb{P}_{\eta_2}(\mathcal{A}_2) \in (\tau_*(\mathcal{A}_2) - \mathrm{comp})[\mathbb{A}(\mathcal{A}_2)]; \tag{4.2}$$

аналогичным образом определены компакты $\mathbb{T}_{\eta_1}(\mathcal{A}_1)$ и $\mathbb{T}_{\eta_2}(\mathcal{A}_2)$.

Используя (3.5) при условиях $(a, b, \eta) = (a_1, b_1, \eta_1)$ и $(a, b, \eta) = (a_2, b_2, \eta_2)$, получаем (непустые) множества $\mathbf{F}_{\eta_1}(\mathcal{A}_1) \in \mathcal{P}'(B_0^+(I_1, \mathcal{A}_1))$ и $\mathbf{F}_{\eta_2}(\mathcal{A}_2) \in \mathcal{P}'(B_0^+(I_2, \mathcal{A}_2))$, для которых (см. (3.9))

$$\mathbb{P}_{\eta_1}(\mathcal{A}_1) = \mathrm{cl}(\{f * \eta_1 : f \in \mathbf{F}_{\eta_1}(\mathcal{A}_1)\}, \tau_*(\mathcal{A}_1)) = \mathrm{cl}(\{f * \eta_1 : f \in \mathbf{F}_{\eta_1}(\mathcal{A}_1)\}, \tau_0(\mathcal{A}_1)), \tag{4.3}$$

$$\mathbb{P}_{\eta_2}(\mathcal{A}_2) = \mathrm{cl}(\{f * \eta_2 : f \in \mathbf{F}_{\eta_2}(\mathcal{A}_2)\}, \tau_*(\mathcal{A}_2)) = \mathrm{cl}(\{f * \eta_2 : f \in \mathbf{F}_{\eta_2}(\mathcal{A}_2)\}, \tau_0(\mathcal{A}_2)). \tag{4.4}$$

Следуя определениям предыдущего параграфа, вводим непустые множества $\mathbb{P}^0_{\eta_1}(\mathcal{A}_1|t)$, $t \in]a_1, b_1[$, и $\mathbb{P}^0_{\eta_2}(\mathcal{A}_2|t)$, $t \in]a_2, b_2[$, рассматриваемые как п/м компактов

$$\big(\mathbb{P}_{\eta_1}(\mathcal{A}_1), \tau^*_{\eta_1}(\mathcal{A}_1)\big), \quad \big(\mathbb{P}_{\eta_2}(\mathcal{A}_2),\ \tau^*_{\eta_2}(\mathcal{A}_2)\big),$$

где выдерживаются соглашения (см. предыдущий параграф)

$$\tau^*_{\eta_1}(\mathcal{A}_1) \triangleq \tau_*(\mathcal{A}_1)|_{\mathbb{P}_{\eta_1}(\mathcal{A}_1)},\ \ \tau^*_{\eta_2}(\mathcal{A}_2) \triangleq \tau_*(\mathcal{A}_2)|_{\mathbb{P}_{\eta_2}(\mathcal{A}_2)},$$

где учитываются свойства (4.1), (4.2). Напомним, что каждой функции $f \in \mathbf{F}_{\eta_1}(\mathcal{A}_1)$ сопоставляются моменты времени $\mathbf{t}_0(f \mid a_1, b_1) \in I_1$, $\mathbf{t}^0(f \mid a_1, b_1) \in I_1$, для которых

$$\mathbf{t}_0(f \mid a_1, b_1) \leqslant \mathbf{t}^0(f \mid a_1, b_1).$$

С учетом этого имеем теперь при $\varepsilon \in]0, \infty[$ множество

$$\mathbf{F}_\varepsilon(\mathcal{A}_1, \eta_1) \triangleq \big\{f \in \mathbf{F}_{\eta_1}(\mathcal{A}_1) \mid \mathbf{t}^0(f \mid a_1, b_1) - \mathbf{t}_0(f \mid a_1, b_1) < \varepsilon\big\} \in \mathcal{P}'(\mathbf{F}_{\eta_1}(\mathcal{A}_1)).$$

Как следствие, получаем БФ $\mathfrak{F}_{\eta_1}[\mathcal{A}_1] \triangleq \{\mathbf{F}_\varepsilon(\mathcal{A}_1, \eta_1) : \varepsilon \in]0, \infty[\} \in \beta_0[\mathbf{F}_{\eta_1}(\mathcal{A}_1)]$. Аналогичным образом при $f \in \mathbf{F}_{\eta_2}(\mathcal{A}_2)$ имеем $\mathbf{t}_0(f \mid a_2, b_2) \in I_2$, $\mathbf{t}^0(f \mid a_2, b_2) \in I_2$ со свойством

$$\mathbf{t}_0(f \mid a_2, b_2) \leqslant \mathbf{t}^0(f \mid a_2, b_2).$$

В этих терминах при $\varepsilon \in]0, \infty[$ определяем множество

$$\mathbf{F}_\varepsilon(\mathcal{A}_2, \eta_2) \triangleq \big\{f \in \mathbf{F}_{\eta_2}(\mathcal{A}_2) \mid \mathbf{t}^0(f \mid a_2, b_2) - \mathbf{t}_0(f \mid a_2, b_2) < \varepsilon\big\} \in \mathcal{P}'(\mathbf{F}_{\eta_2}(\mathcal{A}_2)).$$

Как следствие, получаем БФ $\mathfrak{F}_{\eta_2}[\mathcal{A}_2] \triangleq \{\mathbf{F}_\varepsilon(\mathcal{A}_2,\eta_2) : \varepsilon \in]0,\infty[\} \in \beta_0[\mathbf{F}_{\eta_2}(\mathcal{A}_2)]$. В виде $\mathfrak{F}_{\eta_1}[\mathcal{A}_1]$ и $\mathfrak{F}_{\eta_2}[\mathcal{A}_2]$ имеем ОАХ игроков I и II соответственно. Соответственно, в виде

$$(\mathbb{P}_{\eta_1}(\mathcal{A}_1), \tau^*_{\eta_1}(\mathcal{A}_1), \tau^0_{\eta_1}(\mathcal{A}_1)),\ (\mathbb{P}_{\eta_2}(\mathcal{A}_2), \tau^*_{\eta_2}(\mathcal{A}_2), \tau^0_{\eta_2}(\mathcal{A}_2)) \tag{4.5}$$

имеем два варианта реализации БТП (3.14). Каждому из вариантов (4.5) соответствует своя конкретизация (3.15), легко извлекаемая из (4.3) и (4.4) соответственно; при этом в качестве $\mathfrak{I}_\eta[\mathcal{A}]$ в (3.15) следует использовать

$$\mathfrak{I}_{\eta_1}[\mathcal{A}_1] \triangleq (f * \eta_1)_{f\in \mathbf{F}_{\eta_1}(\mathcal{A}_1)} \in \mathbb{P}_{\eta_1}(\mathcal{A}_1)^{\mathbf{F}_{\eta_1}(\mathcal{A}_1)}, \tag{4.6}$$

$$\mathfrak{I}_{\eta_2}[\mathcal{A}_2] \triangleq (f * \eta_2)_{f\in \mathbf{F}_{\eta_2}(\mathcal{A}_2)} \in \mathbb{P}_{\eta_2}(\mathcal{A}_2)^{\mathbf{F}_{\eta_2}(\mathcal{A}_2)}. \tag{4.7}$$

Посредством (4.6), (4.7) определены правила плотного погружения непустых множеств $\mathbf{F}_{\eta_1}(\mathcal{A}_1)$, $\mathbf{F}_{\eta_2}(\mathcal{A}_2)$ в БТП (4.5). При использовании (4.6), (4.7) реализуются МП, конкретизирующие (3.16) для игроков I и II; мы получаем $\mathbb{P}^0_{\eta_1}[\mathcal{A}_1]$ и $\mathbb{P}^0_{\eta_2}[\mathcal{A}_2]$. Непрерывные образы этих двух множеств совпадают с основным МП для игроков I и II соответственно.

Теперь рассмотрим два варианта кортежа $(\pi_i)_{i\in\overline{1,n}} \in B(I,\mathcal{A})^n$. Для этого фиксируем $n_1 \in \mathbb{N}$ и $n_2 \in \mathbb{N}$, после чего полагаем заданными ярусные функции

$$\pi^{(1)}_1 \in B(I_1,\mathcal{A}_1),\ \ldots,\ \pi^{(1)}_{n_1} \in B(I_1,\mathcal{A}_1); \tag{4.8}$$

фиксируем также ярусные функции

$$\pi^{(2)}_1 \in B(I_2,\mathcal{A}_2),\ \ldots,\ \pi^{(2)}_{n_2} \in B(I_2,\mathcal{A}_2). \tag{4.9}$$

Посредством (4.8) определяем вектор-функционал $\Pi'[\eta_1]$ в виде

$$f \mapsto (\int_{I_1} \pi^{(1)}_i f\ d\eta_1)_{i\in\overline{1,n_1}} : \mathbf{F}_\eta(\mathcal{A}_1) \to \mathbb{R}^{n_1}.$$

Аналогичным образом функции (4.9) порождают вектор-функционал $\Pi''[\eta_2]$ в виде

$$f \mapsto (\int_{I_2} \pi^{(2)}_i f\ d\eta_2)_{i\in\overline{1,n_2}} : \mathbf{F}_\eta(\mathcal{A}_2) \to \mathbb{R}^{n_2}.$$

Итак, мы имеем следующие два отображения:

$$\Pi'[\eta_1] : \mathbf{F}_{\eta_1}(\mathcal{A}_1) \to \mathbb{R}^{n_1},\ \Pi''[\eta_2] : \mathbf{F}_{\eta_2}(\mathcal{A}_2) \to \mathbb{R}^{n_2}.$$

Напомним, что семейство (3.14) (а это БФ) реализуется далее в двух вариантах:

$$\mathfrak{F}_{\eta_1}[\mathcal{A}_1] \triangleq \{\mathbf{F}_\varepsilon(\mathcal{A}_1,\eta_1) : \varepsilon \in]0,\infty[\} \in \beta_0[\mathbf{F}_{\eta_1}(\mathcal{A}_1)], \tag{4.10}$$

$$\mathfrak{F}_{\eta_2}[\mathcal{A}_2] \triangleq \{\mathbf{F}_\varepsilon(\mathcal{A}_2,\eta_2) : \varepsilon \in]0,\infty[\} \in \beta_0[\mathbf{F}_{\eta_2}(\mathcal{A}_2)]. \tag{4.11}$$

С каждым из этих вариантов связывается свое МП (реализуется конкретизация (3.18)):

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_1 &\triangleq (\mathrm{as})[\mathbf{F}_{\eta_1}(\mathcal{A}_1);\ \mathbb{R}^{n_1};\ \tau^{(n_1)}_{\mathbb{R}};\ \Pi'[\eta_1];\ \mathfrak{F}_{\eta_1}[\mathcal{A}_1]] =\\ &= (\mathrm{sas})[\mathbf{F}_{\eta_1}(\mathcal{A}_1);\ \mathbb{R}^{n_1};\ \tau^{(n_1)}_{\mathbb{R}};\ \Pi'[\eta_1];\ \mathfrak{F}_{\eta_1}[\mathcal{A}_1]] =\\ &= \bigcap_{\varepsilon\in]0,\infty[} \mathrm{cl}\left(\Pi'[\eta_1]^1(\mathbf{F}_\varepsilon(\mathcal{A}_1,\eta_1)), \tau^{(n_1)}_{\mathbb{R}}\right),\end{aligned} \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_2 &\triangleq (\mathrm{as})[\mathbf{F}_{\eta_2}(\mathcal{A}_2);\ \mathbb{R}^{n_2};\ \tau^{(n_2)}_{\mathbb{R}};\ \Pi''[\eta_2];\ \mathfrak{F}_{\eta_2}[\mathcal{A}_2]] =\\ &= (\mathrm{sas})[\mathbf{F}_{\eta_2}(\mathcal{A}_2);\ \mathbb{R}^{n_2};\ \tau^{(n_2)}_{\mathbb{R}};\ \Pi''[\eta_2];\ \mathfrak{F}_{\eta_2}[\mathcal{A}_2]] =\\ &= \bigcap_{\varepsilon\in]0,\infty[} \mathrm{cl}\left(\Pi''[\eta_2]^1(\mathbf{F}_\varepsilon(\mathcal{A}_2,\eta_2)), \tau^{(n_2)}_{\mathbb{R}}\right).\end{aligned} \tag{4.13}$$

В виде (4.12) и (4.13) имеем два варианта МП; при этом

$$\mathfrak{A}_1 \in (\tau_{\mathbb{R}}^{(n_1)} - \mathrm{comp})[\mathbb{R}^{n_1}],\ \mathfrak{A}_2 \in (\tau_{\mathbb{R}}^{(n_2)} - \mathrm{comp})[\mathbb{R}^{n_2}].$$

Итак, МП (4.12), (4.13) суть непустые конечномерные компакты. В (4.12), (4.13) имеем конкретизацию общих построений [17]. В этой связи отметим, что множества $\mathbb{U}$ и $\mathbb{V}$ работы [17] в нашем случае имеют вид

$$\mathbb{U} \triangleq \mathbf{F}_{\eta_1}(\mathcal{A}_1),\ \mathbb{V} \triangleq \mathbf{F}_{\eta_2}(\mathcal{A}_2),\ \mathbb{U} \neq \emptyset,\ \mathbb{V} \neq \emptyset.$$

В последующих построениях в качестве множеств ОЭ игроков используем $\mathbb{P}_{\eta_1}(\mathcal{A}_1)$ и $\mathbb{P}_{\eta_2}(\mathcal{A}_2)$. Рассмотрим подробнее некоторые вопросы конкретизации построений [17]. Введем вектор-функционалы

$$\widetilde{\Pi}'[\eta_1] : \mathbb{P}_{\eta_1}(\mathcal{A}_1) \to \mathbb{R}^{n_1},\ \widetilde{\Pi}''[\eta_2] : \mathbb{P}_{\eta_2}(\mathcal{A}_2) \to \mathbb{R}^{n_2}$$

посредством следующих условий:

$$\begin{gathered}\left(\widetilde{\Pi}'[\eta_1](\mu) \triangleq \left(\int_{I_1} \pi_i^{(1)}\, d\mu\right)_{i\in\overline{1,n_1}} \quad \forall \mu \in \mathbb{P}_{\eta_1}(\mathcal{A}_1)\right) \,\&\\ \&\left(\widetilde{\Pi}''[\eta_2](\mu) \triangleq \left(\int_{I_2} \pi_i^{(2)}\, d\mu\right)_{i\in\overline{1,n_2}} \quad \forall \mu \in \mathbb{P}_{\eta_2}(\mathcal{A}_2)\right).\end{gathered} \tag{4.14}$$

Данные вектор-функционалы можно рассматривать в качестве непрерывных (в *-слабом смысле) аналогов вектор-функционалов $\Pi'[\eta_1]$ и $\Pi''[\eta_2]$ соответственно. Теперь естественная конкретизация множеств U и V работы [17] имеет (см. (4.14)) следующий вид:

$$U \triangleq \widetilde{\Pi}'[\eta_1]^1(\mathbb{P}_{\eta_1}(\mathcal{A}_1)) = \left\{\left(\int_{I_1} \pi_i^{(1)}\, d\mu\right)_{i\in\overline{1,n_1}} : \quad \mu \in \mathbb{P}_{\eta_1}(\mathcal{A}_1)\right\}, \tag{4.15}$$

$$V \triangleq \widetilde{\Pi}''[\eta_2]^1(\mathbb{P}_{\eta_2}(\mathcal{A}_2)) = \left\{\left(\int_{I_2} \pi_i^{(2)}\, d\mu\right)_{i\in\overline{1,n_2}} : \quad \mu \in \mathbb{P}_{\eta_2}(\mathcal{A}_2)\right\}. \tag{4.16}$$

Напомним, что согласно (4.14) вектор-функционал $\widetilde{\Pi}'[\eta_1]$ непрерывен в смысле топологии $\tau_{\eta_1}^*(\mathcal{A}_1)$, а $\widetilde{\Pi}''[\eta_2]$ непрерывен в смысле $\tau_{\eta_2}^*(\mathcal{A}_2)$. Поэтому (см. (4.13), (4.14))

$$\Big(U \in (\tau_{\mathbb{R}}^{(n_1)} - \mathrm{comp})[\mathbb{R}^{n_1}]\Big) \,\&\, \Big(V \in (\tau_{\mathbb{R}}^{(n_2)} - \mathrm{comp})[\mathbb{R}^{n_2}]\Big). \tag{4.17}$$

Конкретизируем метрики ρ_1, ρ_2 [17, с. 106]. Итак, ρ_1 есть

$$(x_1, x_2) \mapsto ||x_1 - x_2||_{n_1} : U \times U \to [0, \infty[,$$

а ρ_2 определяется как

$$(y_1, y_2) \mapsto ||y_1 - y_2||_{n_2} : V \times V \to [0, \infty[.$$

При этом топологии $\tau_{\mathbb{R}}^{(n_1)}|_U$ и $\tau_{\mathbb{R}}^{(n_2)}|_V$ конечномерных компактов (4.17) порождены метриками ρ_1 и ρ_2 соответственно. В обозначениях [17, с. 106] получаем, что

$$\tau_{\mathbb{R}}^{(n_1)}|_U = \tau_{\rho_1}^0[U],\ \tau_{\mathbb{R}}^{(n_2)}|_V = \tau_{\rho_2}^0[V]. \tag{4.18}$$

Тогда получаем, как следствие, что

$$(U, \tau_{\rho_1}^0[U]) = (U, \tau_{\mathbb{R}}^{(n_1)}|_U),\ (V, \tau_{\rho_2}^0[V]) = (V, \tau_{\mathbb{R}}^{(n_2)}|_V) \tag{4.19}$$

суть непустые метризуемые компакты (сохраняем обозначение топологий в (4.18), принятые в [17, § 2]). Свойства компактности [17, (2.2)] при этом выполняются.

Теперь конкретизируем отображения g и h в [17, с. 106]. А именно, полагаем, что в нашем случае

$$g \triangleq \Pi'[\eta_1]. \tag{4.20}$$

С учетом (4.15) и (4.20) получаем, что при $f \in \mathbf{F}_{\eta_1}(\mathcal{A}_1)$

$$g(f) = \Pi'[\eta_1](f) = \Big(\int_{I_1} \pi_i^{(1)} f \, d\eta_1\Big)_{i\in\overline{1,n_1}} = \Big(\int_{I_1} \pi_i^{(1)} \, d(f * \eta_1)\Big)_{i\in\overline{1,n_1}} \in U,$$

поскольку $f * \eta_1 \in \mathbb{P}_{\eta_1}(\mathcal{A}_1)$ (см. [16, определение 3.7.1], а также (4.3)). Аналогичным образом конкретизируется h:

$$h \triangleq \Pi''[\eta_2]. \tag{4.21}$$

С учетом (4.16) и (4.21) получаем, что при $f \in \mathbf{F}_{\eta_2}(\mathcal{A}_2)$

$$h(f) = \Pi''[\eta_2](f) = \Big(\int_{I_2} \pi_i^{(2)} f \, d\eta_2\Big)_{i\in\overline{1,n_2}} = \Big(\int_{I_2} \pi_i^{(2)} \, d(f * \eta_2)\Big)_{i\in\overline{1,n_2}} \in V,$$

так как $f * \eta_2 \in \mathbb{P}_{\eta_2}(\mathcal{A}_2)$ в силу (4.4). Таким образом, в обозначениях [17]

$$(g = \Pi'[\eta_1] \in U^{\mathbb{U}}) \ \& \ (h = \Pi''[\eta_2] \in V^{\mathbb{V}}). \tag{4.22}$$

С учетом (4.17) и (4.22) получаем, что в рассматриваемом случае выполняются условия [17, § 2]. С учетом (4.18) ТП [17, (2.4)] конкретизируется следующим образом:

$$\tau^0_{\rho_1}[U] \otimes \tau^0_{\rho_2}[V] = \tau_{\mathbb{R}}^{(n_1)}|_U \otimes \tau_{\mathbb{R}}^{(n_2)}|_V. \tag{4.23}$$

Метрика ρ_3, порождающая данную топологию, имеет вид

$$((u_1, v_1), (u_2, v_2)) \mapsto \sup(\{\rho_1(u_1, u_2); \rho_2(v_1, v_2)\}) : (U \times V) \times (U \times V) \to [0, \infty[.$$

Полагаем далее, что выбор $f' \in \mathbf{F}_{\eta_1}(\mathcal{A}_1)$ (то есть выбор $f' \in \mathbb{U}$) находится в распоряжении игрока I, а выбор $f'' \in \mathbf{F}_{\eta_2}(\mathcal{A}_2)$ (то есть выбор $f'' \in \mathbb{V}$) — в распоряжении игрока II, что соответствует логике [17, § 2].

Функционал стоимости. Введем в рассмотрение (непрерывную) функцию

$$\mathbf{f} \in \mathbb{C}(U \times V, \ \tau^0_{\rho_1}[U] \otimes \tau^0_{\rho_2}[V]). \tag{4.24}$$

Заметим, что в силу (4.17) топология (4.23) превращает $U \times V$ в метризуемый (посредством ρ_3) компакт, а $\mathbf{f}$ (4.24) — равномерно непрерывная в смысле метрики ρ_3 функция.

Представления множеств притяжения. Напомним, что БФ $\mathfrak{F}_{\eta_1}[\mathcal{A}_1]$ и $\mathfrak{F}_{\eta_2}[\mathcal{A}_2]$ могут использоваться в качестве направленных семейств $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ работы [17, (2.1)]: далее

$$\mathcal{U} \triangleq \mathfrak{F}_{\eta_1}[\mathcal{A}_1], \ \mathcal{V} \triangleq \mathfrak{F}_{\eta_2}[\mathcal{A}_2]. \tag{4.25}$$

С учетом (4.25) конкретизируем МП $\mathbb{G}_1$ и $\mathbb{G}_2$ [17, (2.6)]. Мы получили

$$U = \widetilde{\Pi}'[\eta_1]^1(\mathbb{P}_{\eta_1}(\mathcal{A}_1)), \ \tau^0_{\rho_1}[U] = \tau_{\mathbb{R}}^{(n_1)}|_U, \ g = \Pi'[\eta_1] \in U^{\mathbb{U}}, \ \mathcal{U} = \mathfrak{F}_{\eta_1}[\mathcal{A}_1].$$

Поэтому для МП $\mathbb{G}_1$ [17, (2.6)] получаем следующее представление:

$$\begin{aligned}
\mathbb{G}_1 &= (\mathrm{as})[\mathbb{U}; U; \tau^0_{\rho_1}[U]; g; \mathcal{U}] = \\
&= \bigcap_{\Sigma\in\mathcal{U}} \mathrm{cl}(g^1(\Sigma), \tau^0_{\rho_1}[U]) = \bigcap_{\Sigma\in\mathcal{U}} \mathrm{cl}(g^1(\Sigma), \tau_{\mathbb{R}}^{(n_1)}|_U) = \\
&= \bigcap_{\Sigma\in\mathcal{U}} \mathrm{cl}(g^1(\Sigma), \tau_{\mathbb{R}}^{(n_1)}) = \bigcap_{\Sigma\in\mathcal{U}} \mathrm{cl}(\Pi'[\eta_1]^1(\Sigma), \tau_{\mathbb{R}}^{(n_1)}).
\end{aligned}$$

С учетом (4.12) получаем следующее равенство:

$$\mathbb{G}_1 = \mathfrak{A}_1. \tag{4.26}$$

Вместе с тем имеем систему равенств

$$V = \widetilde{\Pi}''[\eta_2]^1(\mathbb{P}_{\eta_2}(\mathcal{A}_2)),\ \ \tau^0_{\rho_2}[V] = \tau_{\mathbb{R}}^{(n_2)}|_V,\ \ h = \Pi''[\eta_2] \in V^{\mathbb{V}},\ \ \mathcal{V} = \mathfrak{F}_{\eta_2}[\mathcal{A}_2].$$

Тогда [17, (2.6)] получаем цепочку равенств

$$\begin{aligned}\mathbb{G}_2 &= (\mathrm{as})[\mathbb{V}; V; \tau^0_{\rho_2}[V], h, \mathcal{V}] = \\ &= \bigcap_{\Sigma\in\mathcal{V}} \mathrm{cl}(h^1(\Sigma), \tau^0_{\rho_2}[V]) = \bigcap_{\Sigma\in\mathcal{V}} \mathrm{cl}(h^1(\Sigma), \tau_{\mathbb{R}}^{(n_2)}|_V) = \\ &= \bigcap_{\Sigma\in\mathcal{V}} \mathrm{cl}(h^1(\Sigma), \tau_{\mathbb{R}}^{(n_2)}) = \bigcap_{\Sigma\in\mathcal{V}} \mathrm{cl}(\Pi''[\eta_2]^1(\Sigma), \tau_{\mathbb{R}}^{(n_2)}).\end{aligned}$$

С учетом (4.13) получаем следующее равенство:

$$\mathbb{G}_2 = \mathfrak{A}_2. \tag{4.27}$$

Посредством (4.26) и (4.27) конкретизированы представления множеств $\mathbb{G}_1$ и $\mathbb{G}_2$ работы [17]. Отметим теперь, что в [9, теорема 5.1] получено конечномерное описание двух упомянутых множеств. Нам потребуются некоторые положения [13], а именно:

1) при $\hat{h} \in B(I_1, \mathcal{A}_1)$ и $t \in [a_1, b_1[$ определен предел справа функции $\hat{h}$ в точке t, обозначаемый через
$$\lim_{\theta\downarrow t} \hat{h}(\theta),\ \ \lim_{\theta\downarrow t} \hat{h}(\theta) \in \mathbb{R}; \tag{4.28}$$

2) при $\widetilde{h} \in B(I_1, \mathcal{A}_1)$ и $\widetilde{t} \in]a_1, b_1]$ определен предел слева функции $\widetilde{h}$ в точке $\widetilde{t}$, обозначаемый через
$$\lim_{\theta\uparrow \widetilde{t}} \widetilde{h}(\theta),\ \ \lim_{\theta\uparrow \widetilde{t}} \widetilde{h}(\theta) \in \mathbb{R}. \tag{4.29}$$

Аналогичным образом при $\hat{h} \in B(I_2, \mathcal{A}_2)$ и $t \in [a_2, b_2[$ определен предел справа функции $\hat{h}$ в точке t, обозначаемый подобно (4.28); кроме того, при $\widetilde{h} \in B(I_2, \mathcal{A}_2)$ и $\widetilde{t} \in]a_2, b_2]$ определен предел слева функции $\widetilde{h}$ в точке $\widetilde{t}$, обозначаемый подобно (4.29).

Как следствие, получаем, что определены векторы

$$\begin{aligned}&\left(\hat{\pi}^{(1)}_{\uparrow}(t) \triangleq \left(\lim_{\theta\uparrow t} \pi^{(1)}_i(\theta)\right)_{i\in\overline{1,n_1}} \in \mathbb{R}^{n_1}\quad \forall t \in]a_1,\ b_1]\right) \& \\ \& &\left(\hat{\pi}^{(1)}_{\downarrow}(t) \triangleq \left(\lim_{\theta\downarrow t} \pi^{(1)}_i(\theta)\right)_{i\in\overline{1,n_1}} \in \mathbb{R}^{n_1}\quad \forall t \in [a_1,\ b_1[\right).\end{aligned} \tag{4.30}$$

Аналогичным образом определяются векторы

$$\begin{aligned}&\left(\hat{\pi}^{(2)}_{\uparrow}(t) \triangleq \left(\lim_{\theta\uparrow t} \pi^{(2)}_i(\theta)\right)_{i\in\overline{1,n_2}} \in \mathbb{R}^{n_2}\quad \forall t \in]a_2,\ b_2]\right) \& \\ \& &\left(\hat{\pi}^{(2)}_{\downarrow}(t) \triangleq \left(\lim_{\theta\downarrow t} \pi^{(2)}_i(\theta)\right)_{i\in\overline{1,n_2}} \in \mathbb{R}^{n_2}\quad \forall t \in [a_2,\ b_2[\right).\end{aligned} \tag{4.31}$$

Кроме того, при $k \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}^k$ и $y \in \mathbb{R}^k$ полагаем, что

$$[x, y]_k \triangleq \{\alpha x + (1-\alpha)y : \alpha \in [0,1]\},$$

получая выпуклую оболочку двухэлементного (вообще говоря) множества $\{x; y\}$. Тогда (см. [9, теорема 5.1])

$$\mathbb{G}_1 = \mathfrak{A}_1 = \left(\bigcup_{t \in]a_1, b_1[} [\hat{\pi}_{\uparrow}^{(1)}(t); \hat{\pi}_{\downarrow}^{(1)}(t)]_{n_1} \right) \cup \left\{ \hat{\pi}_{\downarrow}^{(1)}(a_1); \hat{\pi}_{\uparrow}^{(1)}(b_1) \right\} \in (\tau_{\mathbb{R}}^{(n_1)} - \text{comp})[\mathbb{R}^{n_1}], \tag{4.32}$$

$$\mathbb{G}_2 = \mathfrak{A}_2 = \left(\bigcup_{t \in]a_2, b_2[} [\hat{\pi}_{\uparrow}^{(2)}(t); \hat{\pi}_{\downarrow}^{(2)}(t)]_{n_2} \right) \cup \left\{ \hat{\pi}_{\downarrow}^{(2)}(a_2); \hat{\pi}_{\uparrow}^{(2)}(b_2) \right\} \in (\tau_{\mathbb{R}}^{(n_2)} - \text{comp})[\mathbb{R}^{n_2}]. \tag{4.33}$$

В частности, $\mathbb{G}_1 \neq \emptyset$ и $\mathbb{G}_2 \neq \emptyset$. Итак, выполнены условия [17, (2.11)]. С учетом [17, (2.12)] имеем также, что

$$(\emptyset \neq \mathcal{U}) \ \& \ (\emptyset \neq \mathcal{V}). \tag{4.34}$$

С учетом (4.25) получаем, что при $\varepsilon \in]0, \infty[$

$$(\mathbf{F}_\varepsilon(\mathcal{A}_1, \eta_1) \neq \emptyset) \ \ \& \ \ (\mathbf{F}_\varepsilon(\mathcal{A}_2, \eta_2) \neq \emptyset).$$

Максимин при ограничениях асимптотического характера

Вернемся к (4.24). С учетом (4.22) и (4.34) получаем, что $g^1(S) \in \mathcal{P}'(U)$ при $S \in \mathcal{U}$; кроме того, $h^1(T) \in \mathcal{P}'(V)$ при $T \in \mathcal{V}$. С учетом (4.17), (4.18) имеем свойства

$$\begin{gathered}\big(\text{cl}(g^1(S), \tau_{\rho_1}^0[U]) \in (\tau_{\rho_1}^0[U] - \text{comp})[U] \ \ \forall S \in \mathcal{U}\big) \ \& \\ \& \ \big(\text{cl}(h^1(T), \tau_{\rho_2}^0[V]) \in (\tau_{\rho_2}^0[V] - \text{comp})[V] \ \ \forall T \in \mathcal{V}\big).\end{gathered} \tag{4.35}$$

Из (4.24) вытекает свойство [17, (2.14)], то есть $\mathbf{f}(\cdot, y) \in \mathbb{C}(U, \tau_{\rho_1}^0[U]) \ \ \forall y \in V$. Учитывая (4.35), получаем, что при $y \in V$ и $S \in \mathcal{U}$ определено значение

$$\min_{x \in \text{cl}(g^1(S), \tau_{\rho_1}^0[U])} \mathbf{f}(x, y) \in \mathbb{R}. \tag{4.36}$$

Рассмотрим зависимость, определенную на V, со значениями (4.36); см. [17, (2.16)]. Точнее, при $S \in \mathcal{U}$ имеем в виде $\mathbb{F}_S$, $\mathbb{F}_S \in \mathbb{C}(V, \tau_{\rho_2}^0[V])$, функцию

$$y \mapsto \min_{x \in \text{cl}(g^1(S), \tau_{\rho_1}^0[U])} \mathbf{f}(x, y) : V \to \mathbb{R}; \tag{4.37}$$

см. [17, замечание 1]. С учетом (4.17) при $S \in \mathcal{U}$ и $T \in \mathcal{V}$ определен (см. [17, (2.21)]) максимин

$$\max_{y \in \text{cl}(h^1(T), \tau_{\rho_2}^0[V])} \ \min_{x \in \text{cl}(g^1(S), \tau_{\rho_1}^0[U])} \mathbf{f}(x, y) = \max_{y \in \text{cl}(h^1(T), \tau_{\rho_2}^0[V])} \mathbb{F}_S(y) \in \mathbb{R}.$$

Согласно [17, (2.22)] получаем (см. (4.35)) также при $S \in \mathcal{U}$ и $y \in \mathcal{V}$ равенство

$$\mathbb{F}_S(y) = \inf_{x \in g^1(S)} \mathbf{f}(x, y)$$

(см. [17, замечание 2]). Следуя [17, (2.32)], получаем при $S \in \mathcal{U}$ и $T \in \mathcal{V}$ (непустое) множество $\big\{\mathbb{F}_S(y) : y \in h^1(T)\big\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R})$. С учетом (4.17) и непрерывности функций (4.37) имеем свойство ограниченности упомянутых множеств, а тогда при $S \in \mathcal{U}$ и $T \in \mathcal{V}$ определено (конечное) значение

$$\mathfrak{V}(S, T) \triangleq \sup_{y \in h^1(T)} \mathbb{F}_S(y) = \sup_{y \in h^1(T)} \ \inf_{x \in g^1(S)} \mathbf{f}(x, y) = \sup_{v \in T} \ \inf_{u \in S} \mathbf{f}(g(u), h(v)) \in \mathbb{R}. \tag{4.38}$$

Мы рассматриваем (4.38) как реализуемый при условиях $u \in S$ и $v \in T$ максимин функции платы.

§ 5. Абстрактная игровая задача программного управления, 2

В настоящем параграфе будет получено представление «асимптотического» максимина, отвечающего зависимости

$$(S,T) \mapsto \mathfrak{V}(S,T) : \mathcal{U} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}; \tag{5.1}$$

грубо говоря, речь пойдет о пределе значений (5.1) при переборе $S \in \mathcal{U}$ и $T \in \mathcal{V}$. В этой связи напомним, что [17, (2.6)] $\mathbb{G}_1 \in \mathcal{P}'(U)$ и $\mathbb{G}_2 \in \mathcal{P}'(V)$; см. (4.15), (4.16), (4.32) и (4.33). Поскольку $\mathbb{G}_1 = \mathfrak{A}_1$ и $\mathbb{G}_2 = \mathfrak{A}_2$ компактны в $(\mathbb{R}^{n_1}, \tau_{\mathbb{R}}^{(n_1)})$ и $(\mathbb{R}^{n_2}, \tau_{\mathbb{R}}^{(n_2)})$ соответственно и при этом $\mathbb{G}_1 \subset U$ и $\mathbb{G}_2 \subset V$, то согласно (4.19)

$$\big(\mathbb{G}_1 \in (\tau^0_{\rho_1}[U] - \mathrm{comp})[U]\big) \;\&\; \big(\mathbb{G}_2 \in (\tau^0_{\rho_2}[V] - \mathrm{comp})[V]\big) \tag{5.2}$$

(используем транзитивность операции перехода к подпространству); итак, имеем [17, (3.1)]. В силу (4.24) имеем непрерывность функций-сечений $\mathbf{f}(x,\cdot)$ и $\mathbf{f}(\cdot,y)$ при $x \in U$ и $y \in V$. Поэтому (см. [17, (3.2), (3.3)]) определена функция $\mathbf{F}$, $\mathbf{F} \in \mathbb{C}(V, \tau^0_{\rho_2}[V])$, вида

$$y \mapsto \min_{x \in \mathbb{G}_1} \mathbf{f}(x,y) : V \to \mathbb{R};$$

см. [17, замечание 4]. Как следствие (см. (5.2)), определен [17, (3.13)] обобщенный максимин

$$\mathbf{V} \triangleq \max_{y \in \mathbb{G}_2} \mathbf{F}(y) = \max_{y \in \mathbb{G}_2} \min_{x \in \mathbb{G}_1} \mathbf{f}(x,y) \in \mathbb{R}. \tag{5.3}$$

Поэтому для определения $\mathbf{V}$ можно использовать (4.32), (4.33). Таким образом, $\mathbf{V}$ есть максимин непрерывной функции на произведении конечномерных компактов, определяемых в явном виде. С другой стороны, согласно [17, теорема 1] $\mathbf{V} \in \mathbb{R}$, так что

$$\forall \zeta \in]0,\infty[\ \ \exists S_\zeta \in \mathcal{U}\ \exists T_\zeta \in \mathcal{V} : |\mathfrak{V}(S,T) - \mathbf{V}| < \zeta \ \ \forall S \in \mathcal{U} \cap \mathcal{P}'(S_\zeta)\ \ \forall T \in \mathcal{V} \cap \mathcal{P}'(T_\zeta). \tag{5.4}$$

Теперь учтем (4.10), (4.11) и (4.25). Получаем тогда в силу (5.4) следующее

Предложение 1. *Если* $\zeta \in]0,\infty[$, *то* $\exists \delta \in]0,\infty[$:

$$|\mathfrak{V}\left(\mathbf{F}_{\delta_1}(\mathcal{A}_1,\eta_1), \mathbf{F}_{\delta_2}(\mathcal{A}_2,\eta_2)\right) - \mathbf{V}| < \zeta \quad \forall \delta_1 \in]0,\delta]\ \forall \delta_2 \in]0,\delta].$$

При доказательстве следует, наряду с (4.10), (4.11) и (4.25), учесть, что при $\varepsilon_1 \in]0,\infty[$ и $\varepsilon_2 \in]0,\infty[$

$$(\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_2) \Rightarrow ((\mathbf{F}_{\varepsilon_1}(\mathcal{A}_1,\eta_1) \subset \mathbf{F}_{\varepsilon_2}(\mathcal{A}_1,\eta_1)) \& (\mathbf{F}_{\varepsilon_1}(\mathcal{A}_2,\eta_2) \subset \mathbf{F}_{\varepsilon_2}(\mathcal{A}_2,\eta_2))).$$

В связи с предложением 1 отметим, что при $\varepsilon_1 \in]0,\infty[$ и $\varepsilon_2 \in]0,\infty[$

$$\mathfrak{V}\left(\mathbf{F}_{\varepsilon_1}(\mathcal{A}_1,\eta_1), \mathbf{F}_{\varepsilon_2}(\mathcal{A}_2,\eta_2)\right) = \sup_{v \in \mathbf{F}_{\varepsilon_2}(\mathcal{A}_2,\eta_2)} \ \inf_{u \in \mathbf{F}_{\varepsilon_1}(\mathcal{A}_1,\eta_1)} \mathbf{f}(\Pi'[\eta_1](u), \Pi''[\eta_2](v)) =$$
$$= \sup_{v \in \mathbf{F}_{\varepsilon_2}(\mathcal{A}_2,\eta_2)} \ \inf_{u \in \mathbf{F}_{\varepsilon_1}(\mathcal{A}_1,\eta_1)} \mathbf{f}\left(\left(\int_{I_1} \pi_i^{(1)} u \, d\eta_1 \right)_{i \in \overline{1,n_1}}, \left(\int_{I_2} \pi_j^{(2)} v \, d\eta_2 \right)_{j \in \overline{1,n_2}} \right). \tag{5.5}$$

Итак, в терминах «конечномерного» (обобщенного) максимина $\mathbf{V}$ определяется предел реализуемых максиминов (5.5) при неограниченном приближении параметров точности ε_1 и ε_2 к нулю.

§ 6. Одна игровая задача управления материальными точками

В настоящем параграфе обсуждается частный случай постановки, связанной с предложением 1 и являющейся развитием построений [8, глава 4] на случай игровой задачи программного управления системой материальных точек. Всюду в дальнейшем полагаем, что $a_1 = a_2 = 0$ и $b_1 = b_2 = 1$. Поэтому $I_1 = I_2 = [0, 1]$. На промежутке $[0, 1]$ рассматриваются траектории управляемых систем Σ_1 и Σ_2. Здесь поведения Σ_1 описывается дифференциальными уравнениями

$$\dot{y}_1(t) = y_2(t), \quad \dot{y}_2(t) = \mathbf{b}_1(t)u(t), \tag{6.1}$$

а поведение Σ_2 характеризуется дифференциальными уравнениями

$$\dot{z}_1(t) = z_2(t), \quad \dot{z}_2(t) = \mathbf{b}_2(t)v(t). \tag{6.2}$$

Итак, имеем две управляемые материальные точки (МТ). Сам процесс управления каждой из МТ осуществляется в режиме «узких» импульсов [8, § 17]. В отношении управляющих программ $u = u(\cdot)$ и $v = v(\cdot)$ придерживаемся соглашений, соответствующих (3.5). А именно: мы рассматриваем случай, когда обычные управления $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ неотрицательны и имеют единичный интеграл, что отвечает ситуации полного расходования топлива. В случае когда начальные ресурсы в системах (6.1) и (6.2) не являются «единичными», мы сводим все же постановку к варианту, связанному с (3.5) (см. также определения параграфа 4), переопределяя $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_2$ посредством домножения на скаляры, определяющие начальные запасы топлива. В настоящем изложении ограничимся рассмотрением случая, когда $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_2$ — суть кусочно-постоянные функции.

Мы рассматриваем задачу терминального управления, когда функция стоимости определяется в виде

$$||y(1) - z(1)|| \in [0, \infty[, \tag{6.3}$$

где $y(1)$ — терминальное состояние МТ (6.1), а $z(1)$ — аналогичное состояние МТ (6.2). Рассматриваем задачу о поиске гарантированного результата второго игрока. Точнее, исследуется задача на программный максимин в условиях импульсных воздействий. При этом функции $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_2$ не будут предполагаться непрерывными (будем допускать, что и $\mathbf{b}_1$, и $\mathbf{b}_2$ могут иметь конечное число точек разрыва). Как и в [8, § 17], будем для простоты предполагать начальные условия для первой МТ нулевыми, то есть требовать, чтобы $y_1(0) = y_2(0) = 0$. Для второй МТ зададим произвольные начальные условия, то есть $z_1(0) = z_{(0,1)} \in \mathbb{R}$, $z_2(0) = z_{(0,2)} \in \mathbb{R}$.

Вышеупомянутую содержательную задачу преобразуем к постановке, рассматриваемой в §§ 4, 5. Для этого с учетом формулы Коши и (6.3) полагаем, что $n_1 = n_2 = 2$, а функции $\pi_1^{(1)}$, $\pi_2^{(1)}$, $\pi_1^{(2)}$, $\pi_2^{(2)}$ имеют следующий вид. А именно: при $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \pi_1^{(1)}(t) &\triangleq (1-t)\mathbf{b}_1(t), \quad \pi_2^{(1)}(t) \triangleq \mathbf{b}_1(t), \\ \pi_1^{(2)}(t) &\triangleq (1-t)\mathbf{b}_2(t), \quad \pi_2^{(2)}(t) \triangleq \mathbf{b}_2(t), \end{aligned} \tag{6.4}$$

В нашем примере $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$ (так как $I_1 = I_2$). Мы полагаем, учитывая содержательное обсуждение в начале параграфа, что $\mathbf{b}_1 \in B_0(I_1, \mathcal{A}_1)$ и $\mathbf{b}_2 \in B_0(I_2, \mathcal{A}_2)$, где $B_0(I_1, \mathcal{A}_1) = B_0(I_2, \mathcal{A}_2)$. В данном примере $\eta_1 = \eta_2$ есть сужение меры Лебега на алгебру $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$; условия § 4 на η_1, η_2 выполняются. С учетом (6.4) можно конкретизировать отображения $\Pi'[\eta_1]$, $\Pi''[\eta_2]$, $\widetilde{\Pi}'[\eta_1]$ и $\widetilde{\Pi}''[\eta_2]$ (см. § 4), однако для нашей цели, связанной с определением максимина $\mathbf{V}$, достаточно (см. (4.33), (4.34)) использовать сами функции (6.4). Нам следует только конкретизировать (4.30), (4.31). Такая конкретизация выполнена в [8, § 17], где рассматривалось управление одной МТ. По аналогии с [8, § 17] введем вектор-функцию

$$\mathbf{p} :]0, 1] \to \mathbb{R}^2$$

посредством следующих условий: при $t \in]0, 1]$

$$\Big(\mathbf{p}(t)(1) \triangleq 1 - t\Big) \;\&\; \Big(\mathbf{p}(t)(2) \triangleq 1\Big).$$

Кроме того, по аналогии с [8, § 17] введем вектор-функцию

$$\mathbf{q} : [0,1[\to \mathbb{R}^2,$$

для которой при $t \in [0,1[$

$$\Big(\mathbf{q}(t)(1) \triangleq 1 - t\Big) \ \& \ \Big(\mathbf{q}(t)(2) \triangleq 1\Big).$$

В этих обозначениях, согласно [8, (17.14), (17.16)], при $t \in]0,1]$

$$\Big(\hat{\pi}^{(1)}_{\uparrow}(t) \triangleq (\lim_{\theta\uparrow t}\mathbf{b}_1(\theta))\mathbf{p}(t)\Big) \,\&\, \Big(\hat{\pi}^{(2)}_{\uparrow}(t) \triangleq (\lim_{\theta\uparrow t}\mathbf{b}_2(\theta))\mathbf{p}(t)\Big),$$

а при $t \in [0,1[$ справедливы равенства

$$\Big(\hat{\pi}^{(1)}_{\downarrow}(t) \triangleq (\lim_{\theta\downarrow t}\mathbf{b}_1(\theta))\mathbf{q}(t)\Big) \,\&\, \Big(\hat{\pi}^{(2)}_{\downarrow}(t) \triangleq (\lim_{\theta\downarrow t}\mathbf{b}_2(\theta))\mathbf{q}(t)\Big).$$

Данные выражения следует использовать в (4.32) и (4.33). Тогда (в нашем случае задачи управления МТ)

$$\mathbb{G}_1 = \bigcup_{t\in]0,1[}\Big[\hat{\pi}^{(1)}_{\uparrow}(t);\ \hat{\pi}^{(1)}_{\downarrow}(t)\Big]_2 \cup \Big\{\hat{\pi}^{(1)}_{\uparrow}(1);\ \hat{\pi}^{(1)}_{\downarrow}(0)\Big\}, \tag{6.5}$$

$$\mathbb{G}_2 = \bigcup_{t\in]0,1[}\Big[\hat{\pi}^{(2)}_{\uparrow}(t);\ \hat{\pi}^{(2)}_{\downarrow}(t)\Big]_2 \cup \Big\{\hat{\pi}^{(2)}_{\uparrow}(1);\ \hat{\pi}^{(2)}_{\downarrow}(0)\Big\}. \tag{6.6}$$

При этом (см. [8, с. 111]) $\mathbf{p}(1)$ есть плоский вектор с координатами 0 и 1; $\mathbf{q}(0)$ есть плоский вектор с координатами, равными 1.

Мы ограничимся сейчас рассмотрением случая, подобного [8, § 18]: каждая из функций $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ имеет одно переключение, осуществляемое в моменты $t_0 \in]0,1[$ и $t^0 \in]0,1[$ соответственно. Будем использовать определение индикатора (3.1) при условии, что $I = [0,1]$ (итак, в (3.1) Λ есть п/м $[0,1]$). Мы фиксируем $b_1^{(1)} \in \mathbb{R}$, $b_2^{(1)} \in \mathbb{R}$, $b_1^{(2)} \in \mathbb{R}$, $b_2^{(2)} \in \mathbb{R}$, для которых

$$0 < b_1^{(1)} < b_2^{(1)},\ \ 0 < b_1^{(2)} < b_2^{(2)}.$$

Рассматриваем случай, когда

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_1 &= b_1^{(1)}\chi_{[0,t_0[} + b_2^{(1)}\chi_{[t_0,1]},\\ \mathbf{b}_2 &= b_1^{(2)}\chi_{[0,t^0[} + b_2^{(2)}\chi_{[t^0,1]}.\end{aligned} \tag{6.7}$$

В связи с (6.5), (6.6) имеет смысл указать односторонние пределы функций (6.7). При этом согласно (6.7)

$$\begin{aligned}&\Big(\lim_{\theta\uparrow t}\mathbf{b}_1(\theta) = \mathbf{b}_1(t)\ \ \forall t \in]0,1]\setminus\{t_0\}\Big) \,\&\, \Big(\lim_{\theta\uparrow t_0}\mathbf{b}_1(\theta) = b_1^{(1)}\Big) \,\&\\ &\&\, \Big(\lim_{\theta\downarrow t}\mathbf{b}_1(\theta) = \mathbf{b}_1(t)\ \ \forall t \in [0,1[\setminus\{t_0\}\Big) \,\&\, \Big(\lim_{\theta\downarrow t_0}\mathbf{b}_1(\theta) = b_2^{(1)}\Big),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\Big(\lim_{\theta\uparrow t}\mathbf{b}_2(\theta) = \mathbf{b}_2(t)\ \ \forall t \in]0,1]\setminus\{t^0\}\Big) \,\&\, \Big(\lim_{\theta\uparrow t^0}\mathbf{b}_2(\theta) = b_1^{(2)}\Big) \,\&\\ &\&\, \Big(\lim_{\theta\downarrow t}\mathbf{b}_2(\theta) = \mathbf{b}_2(t)\ \ \forall t \in [0,1[\setminus\{t^0\}\Big) \,\&\, \Big(\lim_{\theta\downarrow t^0}\mathbf{b}_2(\theta) = b_2^{(2)}\Big).\end{aligned}$$

После нахождения множеств $\mathbb{G}_1$, $\mathbb{G}_2$ перейдем к нахождению максимина (5.3):

$$\mathbf{V} = \max_{y \in \mathbb{G}_2} \min_{x \in \mathbb{G}_1} \mathbf{f}(x, y) \in \mathbb{R},$$

где $\mathbf{f}$ определяется евклидовым расстоянием с учетом вектора сдвига, определенного начальными условиями второй МТ:

$$\mathbf{f}(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1 - z_{(0,1)} - z_{(0,2)})^2 + (x_2 - y_2 - z_{(0,2)})^2},$$

здесь x_i, y_i — координаты x, y соответственно.

Проведем численное построение МП двух игроков для фиксированных значений постоянных $t_0 = t^0 = 0.5$, $b_1^{(1)} = 0.5$, $b_2^{(1)} = 2.2$, $b_1^{(2)} = 1$, $b_2^{(2)} = 2.1$, $z_{(0,1)} = -0.4$, $z_{(0,2)} = 0.2$. Для вычислений был использован язык программирования Python со следующими open-source библиотеками: numpy, matplotlib. Вычислительный эксперимент проводился на ПК с процессором Intel Core i5 (x64) с тактовой частотой 1.6GHz и объемом оперативной памяти 4GB под управлением ОС Windows 7.

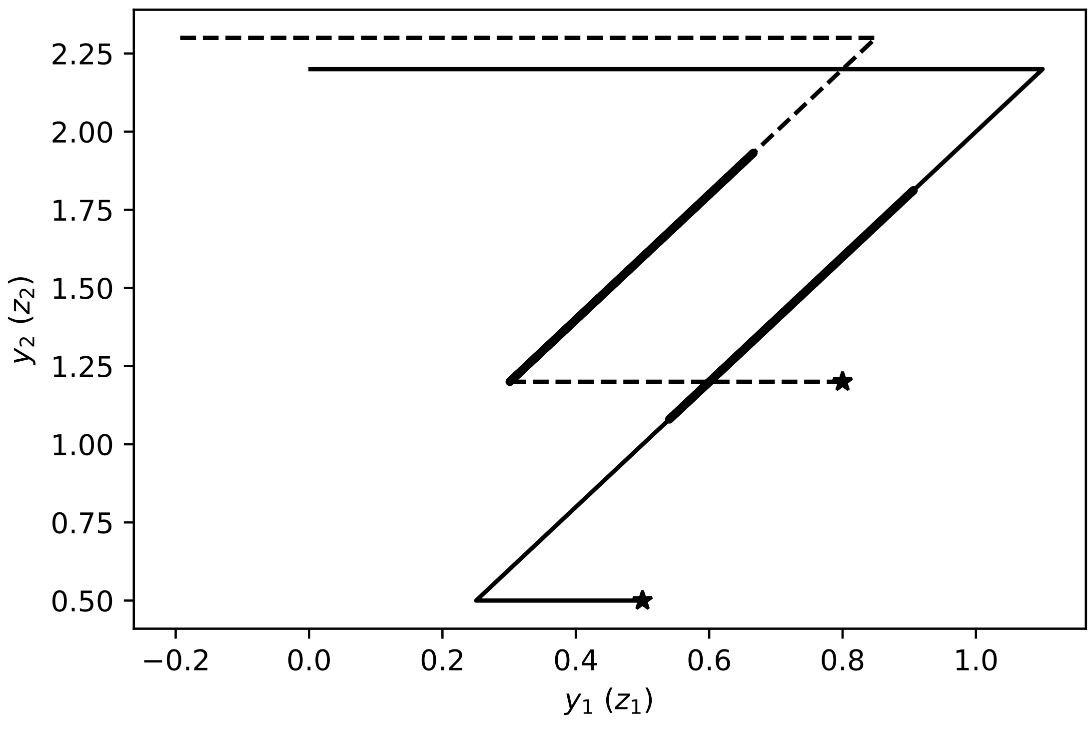

Рис. 1. МП первого и второго игрока

Были получены следующие результаты: на рис. 1 изображено сплошной линией МП $\mathbb{G}_1$ для первого игрока, для второго — множество $\mathbb{G}_2$, смещенное на вектор с координатами $z_{(0,1)} + z_{(0,2)}$ и $z_{(0,2)}$ соответственно, оно изображено пунктирной линией. Звездочкой отмечен начальный момент времени, а также отмечены точки реализации максимина игровой задачи $\mathbf{V} = 0.2681320...$; итак, выделенные точки на пунктирной линии соответствуют максиминным допустимым ОУ игрока II (на графике это выделенные точки из $\mathbb{G}_2$). Каждой такой точке сопоставляется минимизирующая точка из $\mathbb{G}_1$; множество таких точек также выделено на графике. При этом ОУ игрока II, доставляющее максимин, обеспечивает реализацию точек, которые соответствуют моменту времени t^0. Иными словами, в данном примере максиминное программное управление игрока II является элементом подмножества $\mathbb{P}_{\eta_2}(\mathcal{A}_2|t^0)$ и не является обычным управлением, то есть элементом множества $\mathbf{F}_{\eta_2}(\mathcal{A}_2)$. Тем самым иллюстрируется существенность конструкции расширения и, в частности, роль ОУ. +

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
2. Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем. М.: Мир, 1971. 309 с.
3. Завалищин С.Т., Сесекин А.Н. Импульсные процессы. Модели и приложения. М.: Наука, 1991. 255 с.
4. Дыхта В.А., Самсонюк О.Н. Оптимальное импульсное управление с приложениями. М.: Физматлит, 2000. 256 с.
5. Ченцов А.Г. Конечно-аддитивные меры и релаксации экстремальных задач. Екатеринбург: УИФ «Наука», 1993. 232 с.
6. Chentsov A.G. Asymptotic attainability. Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 1997. 322 p.
7. Ченцов А.Г., Бакланов А.П. Об одной задаче асимптотического анализа, связанной с построением области достижимости // Тр. МИАН. 2015. Т. 291. С. 292–311.
8. Ченцов А.Г., Бакланов А.П., Савенков И.И. Задача о достижимости с ограничениями асимптотического характера // Известия Института математики и информатики УдГУ. 2016. Вып. 1 (47). С. 54–118.
9. Ченцов А.Г., Бакланов А.П. К вопросу о построении множества достижимости при ограничениях асимптотического характера // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20. № 3. С. 309–323.
10. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986. 752 с.
11. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. М.: Наука, 1968. 272 с.
12. Неве Ж. Математические основы теории вероятностей. М.: Мир, 1969. 309 с.
13. Ченцов А.Г. Об одном примере представления пространства ультрафильтров алгебры множеств // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17. № 4. С. 293–311.
14. Ченцов А.Г. Элементы конечно-аддитивной теории меры, II. Екатеринбург: УГТУ–УПИ, 2010. 541 с.
15. Ченцов А.Г. О некоторых вопросах структуры ультрафильтров, связанных с расширениями абстрактных задач управления // Автоматика и телемеханика. 2013. № 12. С. 119–139.
16. Ченцов А.Г. Элементы конечно-аддитивной теории меры, I. Екатеринбург: УГТУ–УПИ, 2009. 389 с.
17. Ченцов А.Г. О представлении максимина в игровой задаче с ограничениями асимптотического характера // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. Вып. 3. С. 104–119. DOI: 10.20537/vm100312

Поступила в редакцию 15.01.2018

Ченцов Александр Георгиевич, д. ф.-м. н., член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16;
профессор, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19
E-mail: chentsov@imm.uran.ru

Савенков Илья Ильич, магистр, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19
E-mail: slaeme@yandex.ru

Шапарь Юлия Викторовна, к. ф.-м. н., доцент, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19
E-mail: shaparuv@mail.ru

A. G. Chentsov, I. I. Savenkov, Yu. V. Shapar’

A problem of program maximin with constraints of asymptotic nature

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp’yuternye Nauki*, 2018, vol. 28, issue 1, pp. 91–110 (in Russian).

МАТЕМАТИКА 2018. Т. 28. Вып. 1

Keywords: finitely additive measure, attainability domain, linear control system.

MSC2010: 28A33

DOI: 10.20537/vm180109

We consider a linear game control problem for maximin with asymptotic constraints, which naturally arise in connection with the realization of "narrow" control pulses. In terms of content, this corresponds to pulsed control modes with full fuel consumption. The emerging game problem corresponds to the use of asymptotic control modes by both players, which is reflected in the expansion concept realized in the class of finitely additive measures. The original content control problem for each of the players is considered as a variant of abstract formulation related to attainability under asymptotic constraints, for which the corresponding generalized attainability problem is constructed and the representation of the attraction set playing the role of an asymptotic analogue of an attainability domain in the classical control theory is established. This concretization is realized for each of the players, on the basis of which a generalized maximin is obtained, for which a variant of the asymptotic realization in the class of ordinary controls is indicated. A "finite-dimensional" description of the attraction set is obtained, which makes it possible to find maximin using numerical methods. The solution of a model example of the problem of game interaction of two material points, including the stage of computer modeling, is considered.

REFERENCES

1. Krasovskii N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem* (Theory of motion control), Moscow: Nauka, 1968, 476 p.
2. Halanay A., Wexler D. *Kachestvennaya teoriya impul'snykh sistem* (Qualitative theory of impulsive systems), Moscow: Mir, 1971, 309 p.
3. Zavalishchin S.T., Sesekin A.N. *Impul'snye processy. Modeli i prilozheniya* (Impulse proccesses. Models and applications), Moscow: Nauka, 1991, 255 p.
4. Dykhta V.A., Samsonyuk O.N. *Optimal'noe impul'snoe upravlenie s prilozheniyami* (Optimal inpulse control and applications), Moscow: Fizmatlit, 2000, 256 p.
5. Chentsov A.G. *Finitely additive measures and relaxations of extremal problems*, New York: Consultants Bureau, 1996, 244 p.
6. Chentsov A.G. *Asymptotic attainability*, Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 1997, 322 p.
7. Chentsov A.G., Baklanov A.P. On an asymptotic analysis problem related to the construction of an attainability domain, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2015, vol. 291, issue 1, pp. 279–298. DOI: 10.1134/S0081543815080222
8. Chentsov A.G., Baklanov A.P., Savenkov I.I. A problem of attainability with constraints of asymptotic nature, *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, 2016, issue 1 (47), pp. 54–118 (in Russian).
9. Chentsov A.G., Baklanov A.P. On the question of construction of an attraction set under constraints of asymptotic nature, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2014, vol. 291, suppl. 1, pp. S40–S55. DOI: 10.1134/S0081543815090035
10. Engel'king R. *Obshchaya topologiya* (General topology), Moscow: Mir, 1986, 752 p.
11. Bourbaki N. *Topologie Generale*, Paris: Hermann, 1961, 263 p. Translated under the title *Obshchaya topologiya*, Moscow: Nauka, 1968, 272 p.
12. Neve Zh. *Matematicheskie osnovy teorii veroyatnostei* (Mathematical basis of probabilities theory), Moscow: Mir, 1969, 309 p.
13. Chentsov A.G. On one example of representing the ultrafilter space for an algebra of sets, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2011, vol. 17, no. 4, pp. 293–311 (in Russian).
14. Chentsov A.G. *Elementy konechno-additivnoi teorii mery, II* (Elements of a finitely additive measure theory, II), Yekaterinburg: USTU–UPI, 2010, 541 p.
15. Chentsov A.G. On certain problems of the structure of ultrafilters related to extensions of abstract control problems, *Automation and Remote Control*, 2013, vol. 74, no. 12, pp. 2020–2036. DOI: 10.1134/S0005117913120060
16. Chentsov A.G. *Elementy konechno-additivnoi teorii mery, I* (Elements of a finitely additive measure theory, I), Yekaterinburg: USTU–UPI, 2009, 389 p.
17. Chentsov A.G. About presentation of maximin in the game problem with constraints of asymptotic character, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2010, issue 3, pp. 104–119 (in Russian). DOI: 10.20537/vm100312

Received 15.01.2018

Chentsov Aleksandr Georgievich, Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding Member, Russian Academy of Sciences, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia;
Professor, Ural Federal University, ul. Mira, 19, Yekaterinburg, 620002, Russia.
E-mail: chentsov@imm.uran.ru

Savenkov Il'ya Il'ich, Master Student, Ural Federal University, ul. Mira, 19, Yekaterinburg, 620002, Russia.
E-mail: slaeme@yandex.ru

Shapar' Yuliya Viktorovna, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Ural Federal University, ul. Mira, 19, Yekaterinburg, 620002, Russia.
E-mail: shaparuv@mail.ru