ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ

МАТЕМАТИКА 2018. Т. 28. Вып. 1

УДК 517.95

© *К. У. Хубиев*

# ЗАДАЧИ СО СМЕЩЕНИЕМ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ОПЕРАТОРОМ ДРОБНОЙ ДИФФУЗИИ

В работе исследуются нелокальные краевые задачи со смещением и разрывными условиями сопряжения на линии изменения типа для модельного нагруженного уравнения смешанного гиперболо-параболического типа. В параболической области уравнение представляет собой уравнение дробной диффузии, в гиперболической — характеристически нагруженное волновое уравнение. Единственность решения исследуемых задач при определенных условиях на коэффициенты задачи доказывается методом Трикоми. Существование решения задач сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода относительно следа искомого решения на линии изменения типа. Однозначная разрешимость интегрального уравнения следует из единственности решения задач. После решения интегрального уравнения решение задач сводится к решению первой краевой задачи для уравнения дробной диффузии в параболической области и решению задачи Коши для неоднородного волнового уравнения в гиперболической. Выписаны формулы представления решений исследуемых задач в параболической и гиперболической областях.

*Ключевые слова*: нелокальная задача, задача со смещением, нагруженное уравнение, уравнение смешанного типа, гиперболо-параболическое уравнение, оператор дробной диффузии.

DOI: 10.20537/vm180108

## Введение

Интенсивное изучение нелокальных краевых задач, получивших название *краевых задач со смещением*, началось в 1969 году с работы А. М. Нахушева [1]. Как оказалось, нелокальные задачи тесно связаны с нагруженными дифференциальными уравнениями [2]. Также в [2] были введены определения локальных и нелокальных задач, изучены нелокальные задачи для нагруженного гиперболического уравнения и для уравнения Фурье. В некоторых случаях для исследования разрешимости нелокальных краевых задач весьма эффективен метод, основанный на сведении их к локальным задачам для нагруженного уравнения [3–5]. Весьма широкий обзор результатов исследований задач со смещением приводится в монографии [6].

Исследованию локальных и нелокальных краевых задач для нагруженных уравнений с частными производными различных типов посвящено большое количество работ (см. [3, 7] и библиографию там). Теория нагруженных уравнений продолжает интенсивно развиваться и в настоящее время. Отметим некоторые работы [8–19], в которых исследуются локальные и нелокальные краевые задачи для нагруженных уравнений смешанного и гиперболического типов разных порядков в различных областях. В [8] исследуются краевые задачи для модельных нагруженных уравнений гиперболо-параболического типа второго порядка, когда линия изменения типа является нехарактеристической, и третьего порядка, когда линия изменения типа является характеристической. В [9] исследована однозначная разрешимость аналогов задачи Дарбу и краевых задач типа задачи Трикоми для нагруженного интегро-дифференциального уравнения третьего порядка с гиперболическим и параболо-гиперболическим оператором соответственно. В [10] для уравнения гиперболо-параболического типа исследована однозначная разрешимость нелокальной задачи с обобщенными операторами дробного интегродифференцирования в краевом условии. В [11] исследована первая краевая задача для нагруженного уравнения с оператором Лаврентьева–Бицадзе в прямоугольной области. Найдены необходимые и достаточные условия единственности решения поставленной задачи, решение построено в виде суммы ряда по собственным функциям соответствующей одномерной задачи на собственные значения, показана устойчивость решения от граничных функций. В [12] для уравнения смешанного гиперболо-параболического типа с нагруженными слагаемыми установлен критерий единственности решения начально-граничной задачи в прямоугольной области. Решения построены в виде суммы ряда по собственным функциям соответствующей одномерной задачи на собственные значения. В [13] для предложенных в качестве моделей нагруженного уравнения смешанного гиперболо-параболического типа как с характеристическим, так и с нехарактеристическим изменением типа уравнений исследованы краевые задачи, выписаны решения задач в явном виде. В работе [14] доказывается однозначная разрешимость краевых задач для нагруженного интегро-дифференциального уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа с переменными коэффициентами. В [15] рассматривается локальная краевая задача с разрывными условиями сопряжения для нагруженного параболо-гиперболического уравнения с дробной производной Капуто и интегральной нагрузкой. В работе [16] исследуется задача с данными на одной из характеристик для нагруженного вырождающегося гиперболического уравнения с оператором Геллерстедта в главной части и нагрузкой на линии вырождения, которая лежит внутри области. В [17] для нагруженного уравнения гиперболо-параболического типа исследована нелокальная задача с интегральным условием в гиперболической части. В [18] доказан принцип максимума для характеристически нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа общего вида, на его основе в [19] исследован аналог задачи Трикоми для нагруженного уравнения с переменными коэффициентами.

Отметим также некоторые работы, в которых исследуются нелокальные задачи для уравнений, содержащих оператор дробной диффузии. В [20] были исследованы первая краевая задача и задача Коши для уравнений параболического типа с дробной производной, аналоги задачи Трикоми для уравнения гиперболо-параболического типа с оператором дробной диффузии в канонических областях и для уравнений гиперболо-параболического типа с дробной производной второго рода. В [21] для дифференциального уравнения смешанного типа, содержащего уравнение диффузии дробного порядка, исследована в бесконечной области нелокальная задача с разрывными условиями сопряжения. В [22] исследованы смешанные краевые задачи в прямоугольной области для нагруженного диффузионно-волнового уравнения с дробной производной. В [23] для гиперболо-параболического уравнения с частной дробной производной Римана–Лиувилля исследована однозначная разрешимость задачи с обобщенным оператором дробного интегро-дифференцирования в краевом условии.

В данной работе будем рассматривать задачи со смещением для модельного нагруженного [3] уравнения смешанного гиперболо-параболического типа с оператором дробной диффузии. Рассмотрим уравнение

$$\begin{cases} u_{xx} - D^{\alpha}_{0y}u = 0, \quad y > 0, \\ u_{xx} - u_{yy} + \mu_1(x-y)u(x-y,0) + \mu_2(x+y)u(x+y,0) = 0, \quad y < 0, \end{cases} \tag{1}$$

в области $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$, где $\Omega^+ = \{(x,y) : 0 < x < 1,\ y > 0\}$, $\Omega^-$ — область, ограниченная характеристиками волнового уравнения $AC : x + y = 0$, $BC : x - y = 1$ при $y < 0$ и отрезком $[0,1]$ прямой $y = 0$, $0 < \alpha < 1$, $D^{\alpha}_{ax}\varphi(t)$ — оператор дробного интегродифференцирования Римана–Лиувилля порядка $\alpha$ с началом в точке $a$ и с концом в точке $x$ [24, с. 9]:

$$D^{\alpha}_{ax}\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sign}(x-a)}{\Gamma(-\alpha)} \displaystyle\int_a^x \frac{\varphi(t)\,dt}{|x-t|^{\alpha+1}}, \quad \alpha < 0, \\ \varphi(x), \quad \alpha = 0, \\ \operatorname{sign}^{[\alpha]+1}(x-a)\dfrac{\partial^{[\alpha]+1}}{\partial x^{[\alpha]+1}} D^{\alpha-[\alpha]-1}_{ax}\varphi(t) \quad \alpha > 0, \end{cases}$$

где $[\alpha]$ — целая часть числа $\alpha$, удовлетворяющая неравенству $[\alpha] \leqslant \alpha < [\alpha]+1$.

Обозначим через $J$ интервал $0<x<1$ прямой $y=0$, а через $\theta_0(x)=\left(\frac{x}{2},-\frac{x}{2}\right)$, $\theta_1(x)=\left(\frac{x+1}{2},\frac{x-1}{2}\right)$ — точки пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки $(x,0)$, с характеристиками $AC$ и $BC$ соответственно.

**Определение 1.** Под *регулярным решением уравнения* (1) в области $\Omega$ будем понимать функцию $u=u(x,y)$ из класса $y^{1-\alpha}u\in C(\overline{\Omega}^+)$, $y^{1-\alpha}(y^{1-\alpha}u)_y\in C(\Omega^+\cup J)$, $u_{xx}\in C(\Omega^+)$, $u\in C(\overline{\Omega}^-)\cap C^2(\Omega^-)$, удовлетворяющую уравнению (1) в $\Omega^+\cup\Omega^-$.

## § 1. Постановка задач

Для уравнения (1) рассмотрим следующие задачи.

**Задача $\mathbf{N_1}$.** *Найти регулярное в области $\Omega$ решение $u(x,y)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям*

$$u(0,y)=\varphi_0(y),\quad u(1,y)=\varphi_1(y),\qquad y>0, \tag{2}$$

$$au[\theta_0(x)]+bu[\theta_1(x)]=\psi_1(x),\qquad 0\leqslant x\leqslant 1. \tag{3}$$

*Кроме того, на линии $y=0$ выполняются условия сопряжения:*

$$\lim_{y\to 0+}y^{1-\alpha}u(x,y)=\lim_{y\to 0-}u(x,y), \tag{4}$$

$$\lim_{y\to 0+}y^{1-\alpha}\big(y^{1-\alpha}u(x,y)\big)_y=\lim_{y\to 0-}u_y(x,y), \tag{5}$$

*где $\varphi_0(y)$, $\varphi_1(y)$, $\psi_1(x)$ — заданные функции, $a$, $b$ — заданные действительные постоянные, $a^2+b^2\neq 0$.*

**Задача $\mathbf{N_2}$.** *Найти регулярное в области $\Omega$ решение $u(x,y)$ уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям (2) и условию*

$$a\frac{d}{dx}u[\theta_0(x)]+b\frac{d}{dx}u[\theta_1(x)]=\psi_2(x),\qquad 0<x<1, \tag{6}$$

*на линии $y=0$ выполняются условия сопряжения (4), (5), $\psi_2(x)$ — заданная функция, $a$, $b$ — заданные действительные постоянные, причем $a^2+b^2\neq 0$.*

Заметим, что при $b=0$ задача $\mathbf{N_1}$ переходит в аналог задачи Трикоми для уравнения (1), исследованный в области $\Omega$ в работе [20, с. 55] для случая $\mu_i=0$, $i=1,2$.

## § 2. Задача $\mathbf{N_1}$

**Теорема 1.** *Если заданы функции $y^{1-\alpha}\varphi_0(y)$, $y^{1-\alpha}\varphi_1(y)\in C(\overline{\Omega}^+)$, $\psi_1(x)\in C^1[0,1]\cap C^2]0,1[$, $\mu_1(x)$, $\mu_2(x)\in C[0,1]\cap C^1]0,1[$ и выполняются условия*

$$ab\leqslant 0,\quad \mu_1(x)\geqslant 0,\quad \mu_2(x)\geqslant 0,\quad \mu_1'(x)\leqslant 0,\quad \mu_2'(x)\geqslant 0,$$

*причем*

$$a^2\lim_{y\to 0+}y^{1-\alpha}\varphi_0(y)-b^2\lim_{y\to 0+}y^{1-\alpha}\varphi_1(y)=a\psi_1(0)-b\psi_1(1), \tag{7}$$

*то задача $\mathbf{N_1}$ имеет решение (и притом единственное).*

Доказательство. Действительно, пусть существует решение $u(x,y)$ задачи $\mathbf{N_1}$. Обозначим

$$\tau(x)=\lim_{y\to 0+}y^{1-\alpha}u(x,y),\ x\in\overline{J}, \tag{8}$$

$$\nu(x)=\lim_{y\to 0+}y^{1-\alpha}\big(y^{1-\alpha}u(x,y)\big)_y,\ x\in J,$$

а из условий задачи получим

$$\tau(0) = \lim_{y\to 0+} y^{1-\alpha}\varphi_0(y) = \psi_1(0), \qquad \tau(1) = \lim_{y\to 0+} y^{1-\alpha}\varphi_1(y) = \widetilde{\varphi}_1. \tag{9}$$

В работе [20, с. 48] функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$ для уравнения (1), принесенное из параболической области $\Omega^+$, получено в виде

$$\nu(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\tau''(x). \tag{10}$$

Если $\mu_i(x) \in C[0,1]$, $i = 1, 2$, то решение задачи Коши для уравнения (1) в области $\Omega^-$ можно представить в виде

$$u(x,y) = \frac{\tau(x+y)+\tau(x-y)}{2} - \frac{1}{2}\int_{x+y}^{x-y}\nu(\xi)\,d\xi + \\ + \frac{1}{2}\int_y^0\int_{x+y-\eta}^{x-y+\eta}\mu_1(\xi-\eta)\tau(\xi-\eta)+\mu_2(\xi+\eta)\tau(\xi+\eta)\,d\xi\,d\eta. \tag{11}$$

Удовлетворяя (11), условию (3) и дифференцируя получившееся тождество, имеем

$$(a+b)\tau'(x) + \frac{1}{2}\Big[ax\mu_1(x) - b(1-x)\mu_2(x)\Big]\tau(x) + \\ + \frac{a}{2}\int_0^x \mu_2(\xi)\tau(\xi)\,d\xi - \frac{b}{2}\int_x^1\mu_1(\xi)\tau(\xi)\,d\xi - (a-b)\nu(x) = 2\psi_1'(x), \tag{12}$$

причем из условия задачи $\mathbf{N_1}$ $a^2+b^2\neq 0$ и условия теоремы 1 $ab \leqslant 0$ следует, что $a \neq b$.

Докажем единственность решения задачи $\mathbf{N_1}$. Пусть $\varphi_0(y)\equiv\varphi_1(y) = 0$, $\psi_1(x) = 0$. Тогда $\tau(0) = 0, \tau(1) = \widetilde{\varphi}_1 = 0$. С учетом этого, умножая (10) на функцию $\tau(x)$ и интегрируя от 0 до 1, получим

$$\int_0^1\tau(\xi)\nu(\xi)\,d\xi = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^1\tau(\xi)\tau''(\xi)^2\,d\xi = -\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^1[\tau'(\xi)]^2\,d\xi \leqslant 0. \tag{13}$$

Выражая $\nu(x)$ из (12) и подставляя в интеграл $\displaystyle\int_0^1\tau(\xi)\nu(\xi)\,d\xi$ при $\psi_1(x)\equiv 0$, получим

$$\int_0^1\tau(\xi)\nu(\xi)\,d\xi = \int_0^1\tau(\xi)\bigg\{\frac{a+b}{a-b}\tau'(\xi) + \frac{1}{2(a-b)}\Big[a\xi\mu_1(\xi) - b(1-\xi)\mu_2(\xi)\Big]\tau(\xi) + \\ + \frac{a}{2(a-b)}\int_0^\xi\mu_2(t)\tau(t)\,dt - \frac{b}{2(a-b)}\int_\xi^1\mu_1(t)\tau(t)\,dt\bigg\}\,d\xi. \tag{14}$$

Учитывая, что

$$\int_0^1\tau(\xi)\tau'(\xi)\,d\xi = \int_0^1[\tau^2(\xi)]'\,d\xi = \tau^2(1)-\tau^2(0) = 0,$$

$$\int_0^1\tau(\xi)\int_0^\xi\mu_2(t)\tau(t)\,dt\,d\xi = \int_0^1\mu_2(t)\tau(t)\int_t^1\tau(\xi)\,d\xi\,dt = -\frac{1}{2}\int_0^1\mu_2(t)\bigg[\Big(\int_t^1\tau(\xi)\,d\xi\Big)^2\bigg]'\,dt = \\ = \frac{1}{2}\mu_2(0)\Big(\int_0^1\tau(\xi)\,d\xi\Big)^2 + \frac{1}{2}\int_0^1\mu_2'(t)\Big(\int_t^1\tau(\xi)\,d\xi\Big)^2\,dt,$$

$$\int_0^1\tau(\xi)\int_\xi^1\mu_1(t)\tau(t)\,dt\,d\xi = \int_0^1\mu_1(t)\tau(t)\int_0^t\tau(\xi)\,d\xi\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1\mu_1(t)\bigg[\Big(\int_0^t\tau(\xi)\,d\xi\Big)^2\bigg]'\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\mu_1(1)\Big(\int_0^1 \tau(\xi)\,d\xi\Big)^2 - \frac{1}{2}\int_0^1 \mu_1'(t)\Big(\int_0^t \tau(\xi)\,d\xi\Big)^2\,dt,$$

интеграл (14) примет вид

$$\int_0^1 \tau(\xi)\nu(\xi)\,d\xi = \frac{a}{2(a-b)}\int_0^1 \xi\mu_1(\xi)\tau^2(\xi)\,d\xi - \frac{b}{2(a-b)}\int_0^1 (1-\xi)\mu_2(\xi)\tau^2(\xi)\,d\xi +$$
$$+\frac{a}{4(a-b)}\Big[\mu_2(0)\Big(\int_0^1 \tau(\xi)\,d\xi\Big)^2 + \int_0^1 \mu_2'(t)\Big(\int_t^1 \tau(\xi)\,d\xi\Big)^2\,dt\Big] -$$
$$-\frac{b}{4(a-b)}\Big[\mu_1(1)\Big(\int_0^1 \tau(\xi)\,d\xi\Big)^2 - \int_0^1 \mu_1'(t)\Big(\int_0^t \tau(\xi)\,d\xi\Big)^2\,dt\Big]. \tag{15}$$

Так как из условия $ab \leqslant 0$ следует, что $\dfrac{a}{a-b} \geqslant 0$, $\dfrac{b}{a-b} \leqslant 0$, при выполнении условий теоремы 1 на функции $\mu_i(x)$, $i=1,2$, из (15) получаем $\displaystyle\int_0^1 \tau(\xi)\nu(\xi)\,d\xi \geqslant 0$.

Отсюда и из (13) заключаем, что $\displaystyle\int_0^1 \tau(\xi)\nu(\xi)\,d\xi = 0$. Поскольку левая часть (13) равна нулю, получим, что $\tau(x) = \mathrm{const}$, откуда, учитывая что $\tau(0) = 0$, получаем, что $\tau(x) \equiv 0$, а из (10) получим, что и $\nu(x) \equiv 0$. Отсюда и из формулы (12) заключаем, что $u(x,y) \equiv 0$ в области $\Omega^-$.

В области же $\Omega^+$ решение первой краевой задачи (2), (8) для уравнения (1) задается формулой [25]

$$u(x,y) = \int_0^y \frac{\partial G}{\partial \xi}\Big|_{\xi=0}\varphi_0(\eta)\,d\eta - \int_0^y \frac{\partial G}{\partial \xi}\Big|_{\xi=1}\varphi_1(\eta)\,d\eta + \int_0^1 G(x,y;\xi,0)\tau(\xi)\,d\xi, \tag{16}$$

где

$$G = G(x,y;\xi,\eta) = \frac{\Gamma(\alpha)}{2}(y-\eta)^{\delta-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Big[e_{1,\delta}^{1,\delta}\Big(-\frac{|x-\xi+2n|}{(y-\eta)^{\delta}}\Big)\Big] - \Big[e_{1,\delta}^{1,\delta}\Big(-\frac{|x+\xi+2n|}{(y-\eta)^{\delta}}\Big)\Big],$$

$\delta = \alpha/2$, $e_{a,b}^{c,d} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(c+ka)\Gamma(d-bk)}$ — функция Райта, $a > b$ [25]. Из формулы (16) следует, что при $\varphi_0(y) = \varphi_1(y) = \tau(x) \equiv 0$ и в области $\Omega^+$ $u(x,y) \equiv 0$. Из того, что однородная задача, соответствующая задаче $\mathbf{N_1}$, имеет только тривиальное решение, заключаем единственность решения задачи $\mathbf{N_1}$ в области $\Omega$.

Докажем теперь существование решения задачи.

Подставляя $\nu(x)$ из (10) в (12), получим уравнение вида

$$\tau''(x) - p\tau'(x) = g(x), \tag{17}$$

где

$$p = \frac{a+b}{a-b}\Gamma(\alpha+1), \quad g(x) = q(x)\tau(x) + r(x), \quad q(x) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(a-b)}\Big(ax\mu_1(x) + b(1-x)\mu_2(x)\Big),$$

$$r(x) = \frac{a\Gamma(\alpha+1)}{2(a-b)}\int_0^x \mu_2(\xi)\tau(\xi)\,d\xi - \frac{b\Gamma(\alpha+1)}{2(a-b)}\int_x^1 \mu_1(\xi)\tau(\xi)\,d\xi - \frac{2\Gamma(\alpha+1)}{a-b}\psi_1'(x).$$

Решение задачи Дирихле (9) для уравнения (17) представимо в виде

$$\tau(x) = \frac{1}{p}\int_0^1 G_1(x,\xi)g(\xi)\,d\xi + G_{1\xi}(x,1)\widetilde{\varphi}_1 - G_{1\xi}(x,0)\psi_1(0), \tag{18}$$

где $G_1(x,\xi)$ — функция Грина:

$$G_1(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{(e^{px}-e^p)(1-e^{-p\xi})}{e^p-1}, & 0\leqslant\xi\leqslant x,\\ \dfrac{(e^{px}-1)(1-e^{p(1-\xi)})}{e^p-1}, & x\leqslant\xi\leqslant 1,\end{cases}$$

$$G_{1\xi}(x,1)=\frac{e^{px}-1}{e^p-1},\quad G_{1\xi}(x,0)=\frac{e^{px}-e^p}{e^p-1}.$$

Подставляя $g(x)$ в (18), после несложных преобразований получим интегральное уравнение

$$\tau(x)+\int_0^1 K(x,\xi)\tau(\xi)d\,\xi=f(x),$$

где

$$K(x,\xi)=\frac{b\mu_1(\xi)}{2(a+b)}\int_0^\xi G_1(x,t)\,dt-\frac{a\mu_2(\xi)}{2(a+b)}\int_\xi^1 G_1(x,t)\,dt-\frac{1}{p}G_1(x,\xi)q(\xi),$$

$$f(x)=G_{1\xi}(x,1)\widetilde{\varphi}_1-G_{1\xi}(x,0)\psi_1(0)-\frac{2}{a+b}\int_0^1 G_1(x,\xi)\psi_1'(\xi)\,d\xi.$$

С учетом свойств функций $\mu_1(x),\mu_2(x),\psi_1(x)$ и $G_1(x,\xi)$ заключаем, что полученное уравнение есть интегральное уравнение Фредгольма второго рода, безусловная разрешимость которого следует из единственности решения задачи $\mathbf{N_1}$, причем $\tau(x)\in C[0,1]\cup C^2]0,1[$. Далее $\nu(x)$ находим из (12), причем $\nu(x)\in C^1]0,1[$.

После нахождения функций $\tau(x)$ и $\nu(x)$ задача $\mathbf{N_1}$ решается в $\Omega^+$ как первая краевая задача для уравнения дробной диффузии по формуле (16) [25], а в $\Omega^-$ решение задается формулой (11). Из условия (7) теоремы будет следовать выполнение условий сопряжения (4), (5).

Теорема 1 доказана. □

## § 3. Задача $\mathbf{N_2}$

Для задачи $\mathbf{N_2}$ справедлива

**Теорема 2.** *Если заданы функции* $y^{1-\alpha}\varphi_0(y)$, $y^{1-\alpha}\varphi_1(y)\in C(\overline{\Omega}^+)$, $\psi_2(x)\in C[0,1]\cap C^1]0,1[$, $\mu_1(x),\mu_2(x)\in C[0,1]\cap C^1]0,1[$ *и выполняются условия*

$$ab\leqslant 0,\quad \mu_1(x)\geqslant 0,\quad \mu_2(x)\geqslant 0,\quad \mu_1'(x)\leqslant 0,\quad \mu_2'(x)\geqslant 0,$$

*то задача* $\mathbf{N_2}$ *имеет решение (и притом единственное).*

Доказательство. В параболической области $\Omega^+$ функциональное соотношение между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$ для задачи $\mathbf{N_2}$ будет задаваться формулой (10).

Из $\Omega^-$, удовлетворяя (11), условию (6), получим

$$(a+b)\tau'(x)+\frac{1}{2}\Big[ax\mu_1(x)-b(1-x)\mu_2(x)\Big]\tau(x)+\\ +\frac{a}{2}\int_0^x\mu_2(\xi)\tau(\xi)\,d\xi-\frac{b}{2}\int_x^1\mu_1(\xi)\tau(\xi)\,d\xi-(a-b)\nu(x)=2\psi_2(x),\quad (19)$$

причем из условия задачи $\mathbf{N_2}$ $a^2+b^2\neq 0$ и условия теоремы 2 $ab\leqslant 0$ следует, что $a\neq b$.

Таким образом, (19) совпадает с соотношением (12) (за исключением правой части). Следовательно, из доказательства теоремы 1 следует справедливость теоремы 2. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Нахушев А.М. О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5. № 1. С. 44–59.
2. Нахушев А.М. О нелокальных краевых задачах со смещением и их связи с нагруженными уравнениями // Дифференциальные уравнения. 1985. Т. 21. № 1. С. 92–101.
3. Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их применения. М.: Наука, 2012. 232 с.
4. Огородников Е.Н. Некоторые характеристические задачи для систем нагруженных дифференциальных уравнений и их связь с нелокальными краевыми задачами // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2003. Вып. 19. С. 22–28. DOI: 10.14498/vsgtu134
5. Кожанов А.И., Пулькина Л.С. О разрешимости краевой задачи с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений // Дифференциальные уравнения. 2006. Т. 42. № 9. С. 1166–1179.
6. Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006. 287 с.
7. Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И. Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений. Алматы: Гылым, 2010. 334 с.
8. Елеев В.А. О некоторых краевых задачах для смешанных нагруженных уравнений второго и третьего порядка // Дифференциальные уравнения. 1994. Т. 30. № 2. С. 230–237.
9. Балтаева У.И. О некоторых краевых задачах для нагруженных интегро-дифференциальных уравнений третьего порядка с действительными параметрами // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. Вып. 3. С. 3–12. DOI: 10.20537/vm120301
10. Тарасенко А.В. О разрешимости нелокальной задачи для нагруженного параболо-гиперболического уравнения // Известия вузов. Математика. 2013. № 1. С. 73–81.
11. Сабитов К.Б., Мелишева Е.П. Задача Дирихле для нагруженного уравнения смешанного типа в прямоугольной области // Известия вузов. Математика. 2013. № 7. С. 62–76.
12. Сабитов К.Б. Начально-граничная задача для параболо-гиперболического уравнения с нагруженными слагаемыми // Известия вузов. Математика. 2015. № 6. С. 31–42.
13. Хубиев К.У. О модели нагруженного гиперболо-параболического уравнения в частных производных второго порядка // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2015. Вып. 2 (11). С. 27–38. DOI: 10.18454/2079-6641-2015-11-2-27-38
14. Islomov B., Baltaeva U.I. Boundary-value problems for a third-order loaded parabolic-hyperbolic equation with variable coefficients // Electronic Journal of Differential Equations. 2015. Vol. 2015. No. 221. P. 1–10. https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2015/221/islomov.pdf
15. Abdullaev O.Kh. On a problem for the loaded mixed type equation with fractional derivative // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2016. Вып. 1 (12). С. 7–14. DOI: 10.18454/2079-6641-2016-12-1-7-14
16. Аттаев А.Х. Задача Гурса для нагруженного вырождающегося гиперболического уравнения второго порядка с оператором Геллерстедта в главной части // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2016. Т. 20. № 1. С. 7–21. DOI: 10.14498/vsgtu1452
17. Хубиев К.У. Задача с интегральным условием в гиперболической части для характеристически нагруженного гиперболо-параболического уравнения // Мат. заметки СВФУ. 2016. Т. 23. № 4. С. 91–98.
18. Хубиев К.У. Принцип максимума для нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа // Владикавказский математический журнал. 2016. Т. 18. № 4. С. 80–85. DOI: 10.23671/VNC.2016.4.5997
19. Хубиев К.У. Аналог задачи Трикоми для характеристически нагруженного уравнения гиперболо-параболического типа с переменными коэффициентами // Уфимский математический журнал. 2017. Т. 9. № 2. С. 94–103.
20. Геккиева С.Х. Краевые задачи для нагруженных параболических уравнений с дробной производной по времени: дис. ... канд. физ.-матем. наук / НИИ ПМА КБНЦ РАН. Нальчик, 2003. 75 с.
21. Репин О.А. Краевая задача для дифференциального уравнения с частной дробной производной Римана–Лиувилля // Уфимский математический журнал. 2015. Т. 7. Вып. 3. С. 70–75.
22. Геккиева С.Х. Смешанные краевые задачи для нагруженного диффузионно-волнового уравнения // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Сер. Математика. Физика. 2016. № 6 (227). Вып. 42. С. 32–35.
23. Тарасенко А.В., Егорова И.П. О нелокальной задаче с дробной производной Римана–Лиувилля для уравнения смешанного типа // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2017. Т. 21. № 1. С. 112–121. DOI: 10.14498/vsgtu1499
24. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

25. Псху А.В. Решение первой краевой задачи для уравнения диффузии дробного порядка // Дифференциальные уравнения. 2003. Т. 39. № 9. С. 1286–1289.

Поступила в редакцию 02.02.2018

Хубиев Казбек Узеирович, к. ф.-м. н., старший научный сотрудник, Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, 360000, Россия, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 А.
E-mail: khubiev_math@mail.ru

***K. U. Khubiev***

**Boundary value problem with shift for loaded hyperbolic-parabolic type equation involving fractional diffusion operator**

**Citation:** *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2018, vol. 28, issue 1, pp. 82–90 (in Russian).

*Keywords*: nonlocal problem, problem with shift, loaded equation, equation of mixed type, hyperbolic-parabolic type equation, fractional diffusion operator.

MSC2010: 35M10, 35M12

DOI: 10.20537/vm180108

The paper deals with non-local boundary-value problems with shift and discontinuous conjugation conditions in the line of type changing for a model loaded hyperbolic-parabolic type equation. The parabolic domain presents a fractional diffusion equation while the hyperbolic one presents a characteristically loaded wave equation. The uniqueness of the solution to the considered problems under certain conditions on the coefficients is proved by the Tricomi method. The existence of the solution involves solving the Fredholm integral equation of the second kind with respect to the trace of the sought solution in the line of type changing. The unique solvability of the integral equation implies the uniqueness of the solution to the problems. Once the integral equation is solved, the solution to the problems is reduced to solving the first boundary value problem for the fractional diffusion equation in the parabolic domain and the Cauchy problem for the inhomogeneous wave equation in the hyperbolic one. In addition, representation formulas are written out for solving the problems under study in the parabolic and hyperbolic domains.

REFERENCES

1. Nakhushev A.M. Certain boundary value problems for hyperbolic equations and equations of mixed type, *Differ. Uravn.*, 1969, vol. 5, no. 1, pp. 44–59 (in Russian).
2. Nakhushev A.M. Nonlocal boundary-problems with displacement and their relation to loaded equations, *Differential Equations*, 1985, vol. 21, no. 1, pp. 74–81.
3. Nakhushev A.M. *Nagruzhennye uravneniya i ikh primeneniya* (Loaded equations and their applications), Moscow: Nauka, 2012, 232 p.
4. Ogorodnikov E.N. Some characteristic problems for loaded systems of differential equations and their relationship with non-local boundary value problems, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2003, issue 19, pp. 22–28 (in Russian). DOI: 10.14498/vsgtu134
5. Kozhanov A.I., Pul'kina L.S. On the solvability of boundary value problems with a nonlocal boundary condition of integral form for multidimensional hyperbolic equations, *Differential Equations*, 2006, vol. 42, issue 9, pp. 1233–1246. DOI: 10.1134/S0012266106090023
6. Nakhushev A.M. *Zadachi so smeshcheniem dlya uravnenii v chastnykh proizvodnykh* (Problems with shifts for partial differential equations), Moscow: Nauka, 2006, 287 p.
7. Dzhenaliyev M.T., Ramazanov M.I. *Nagruzhennye uravneniya kak vozmushcheniya differentsial'nykh uravnenii* (Loaded equation as perturbed differential equations), Almaty: Gylym, 2010, 334 p.
8. Eleev V.A. Some boundary value problems for mixed loaded equations of second and third orders, *Differential Equations*, 1994, vol. 30, no. 2, pp. 210–217.
9. Baltaeva U.I. On some boundary value problems for a third order loaded integro-differential equation with real parameters, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2012, issue 3, pp. 3–12 (in Russian). DOI: 10.20537/vm120301

10. Tarasenko A.V. Solvability of a nonlocal problem for a loaded parabolic-hyperbolic equation, *Russian Mathematics*, 2013, vol. 57, issue 1, pp. 64–71. DOI: 10.3103/S1066369X13010076
11. Sabitov K.B., Melisheva E.P. The Dirichlet problem for a loaded mixed-type equation in a rectangular domain, *Russian Mathematics*, 2013, vol. 57, issue 7, pp. 53–65. DOI: 10.3103/S1066369X13070062
12. Sabitov K.B. Initial-boundary problem for parabolic-hyperbolic equation with loaded summands, *Russian Mathematics*, 2015, vol. 59, issue 6, pp. 23–33. DOI: 10.3103/S1066369X15060055
13. Khubiev K.U. On model of loaded hyperbolic-parabolic partial differential equation of second order, *Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences*, 2015, vol. 11, issue 2, pp. 24–35. DOI: 10.18454/2313-0156-2015-11-2-24-35
14. Islomov B., Baltaeva U.I. Boundary-value problems for a third-order loaded parabolic-hyperbolic equation with variable coefficients, *Electronic Journal of Differential Equations*, 2015, vol. 2015, no. 221, pp. 1–10. `https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2015/221/islomov.pdf`
15. Abdullaev O.Kh. On a problem for the loaded mixed type equation with fractional derivative, *Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences*, 2016, vol. 12, issue 1, pp. 5–11. DOI: 10.18454/2313-0156-2016-12-1-5-11
16. Attaev A.H. Goursat problem for loaded degenerate second order hyperbolic equation with Gellerstedt operator in principal part, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2016, vol. 20, no. 1, pp. 7–21 (in Russian). DOI: 10.14498/vsgtu1452
17. Khubiev K.U. A problem with an integral condition in the hyperbolic part for a characteristically loaded hyperbolic-parabolic equation, *Yakutian Mathematical Journal*, 2016, vol. 23, issue 4, pp. 91–98 (in Russian).
18. Khubiev K.U. A maximum principle for a loaded hyperbolic-parabolic equation, *Vladikavkaz. Mat. Zh*, 2016, vol. 18, no. 4, pp. 80–85 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2016.4.5997
19. Khubiev K.U. Analogue of Tricomi problem for characteristically loaded hyperbolic-parabolic equation with variable coefficients, *Ufa Mathematical Journal*, 2017, vol. 9, no. 2, pp. 92–101. DOI: 10.13108/2017-9-2-92
20. Gekkieva S.Kh. *Boundary value problems for loaded parabolic equations with a fractional derivative with respect to time*, Cand. Sci. (Phys.–Math.) Dissertation, Nalchik, 2003, 75 p. (In Russian).
21. Repin O.A. Boundary value problem for partial differential equation with fractional Riemann–Liouville derivative, *Ufa Mathematical Journal*, 2015, vol. 7, no. 3, pp. 67–72. DOI: 10.13108/2015-7-3-67
22. Gekkieva S.Kh. Mixed boundary value problems for the loaded diffusion-wave equation, *Nauch. Vedom. Belgor. Gos. Univ., Ser. Mat., Fiz.*, 2016, vol. 6 (227), issue 42, pp. 32–35 (in Russian).
23. Tarasenko A.V., Egorova I.P. On nonlocal problem with fractional Riemann–Liouville derivatives for a mixed-type equation, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2017, vol. 21, no. 1, pp. 112–121 (in Russian). DOI: 10.14498/vsgtu1499
24. Nakhushev A.M. *Drobnoe ischislenie i ego primenenie* (Fractional calculus and its applications), Moscow: Fizmatlit, 2003, 272 p.
25. Pskhu A.V. Solution of the first boundary value problem for a fractional-order diffusion equation, *Differential Equations*, 2003, vol. 39, issue 9, pp. 1359–1363. DOI: 10.1023/B:DIEQ.0000012703.45373.aa

Received 02.02.2018

Khubiev Kazbek Uzeirovich, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Institute of Applied Mathematics and Automation, ul. Shortanova, 89 A, Nalchik, 360000, Russia.
E-mail: khubiev_math@mail.ru