

УДК 517.977

© А. А. Успенский, П. Д. Лебедев

ВЫЯВЛЕНИЕ СИНГУЛЯРНОСТИ У ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТИПА ЭЙКОНАЛА В УСЛОВИЯХ МИНИМАЛЬНОЙ ГЛАДКОСТИ ГРАНИЦЫ КРАЕВОГО МНОЖЕСТВА¹

Предмет изучения — псевдовершины краевого множества, необходимые для аналитического и численного конструирования сингулярных ветвей обобщенного (минимаксного) решения задачи Дирихле для уравнения типа эйконала. Рассмотрен случай переменной гладкости границы краевого множества, при котором порядок гладкости в точках рассмотрения понижается до минимально возможного значения — до единицы. Получены необходимые условия существования псевдовершин, выраженные в терминах односторонних частных пределов дифференциальных соотношений, зависящих от свойств локальных диффеоморфизмов, которые определяют эти точки. Приведен пример, иллюстрирующий приложения полученных результатов при решении задачи управления по быстродействию на плоскости.

Ключевые слова: уравнение в частных производных первого порядка, минимаксное решение, быстродействие, волновой фронт, диффеоморфизм, эйконал, функция оптимального результата, сингулярное множество, симметрия, псевдовершина.

DOI: [10.20537/vm180106](https://doi.org/10.20537/vm180106)**Введение**

Необходимость построения решений краевых задач для уравнений в частных производных первого порядка обусловлена потребностями механики, геометрической оптики, теории оптимального управления, дифференциальных игр, сейсмологии, экономики и других отраслей знания. Гладкость краевых условий в общем случае не влечет дифференцируемость решения уравнения указанного типа на всей области рассмотрения. Проблема построения нелокальной теории для таких уравнений снимается введением обобщенных решений. Среди различных подходов [1–3] к определению обобщенных решений уравнений выделим концепцию минимаксного решения [3], которая базируется на конструкциях теории позиционных дифференциальных игр [4]. Эффективность минимаксного подхода нашла подтверждение в разработке теоретических методов и аппроксимационных процедур построения решений различных классов краевых задач для уравнений в частных производных первого порядка и уравнений гамильтонова типа, изучаемых в теории управления и дифференциальных играх (например, [5]).

В настоящей работе исследуется проблема возникновения негладкости у минимаксного решения уравнения Гамильтона–Якоби, которое имеет смысл функции оптимального результата в соответствующей задаче управления по быстродействию. В случае невыпуклости краевого множества даже при достаточно высоком порядке гладкости его границы минимаксное решение уравнения не является всюду дифференцируемой функцией. Обобщенное решение содержит сингулярные множества, на которых эта функция терпит «градиентную катастрофу». Задача исследователя состоит, в частности, в том, чтобы научиться выявлять сингулярные множества и на их основе строить решение краевой задачи в целом [6–11].

Отметим, что минимаксное решение рассматриваемого уравнения Гамильтона–Якоби отличается лишь знаком от эйконала — фундаментального решения [1] основного уравнений геометрической оптики. Волновые фронты эйконала являются линиями уровня соответствующей функции оптимального результата. Эволюция волновых фронтов, их перестройка, возникновение и классификация особенностей изучаются методами и средствами теории особенностей гладких отображений [12, 13]. Техника группового анализа, развиваемая на стыке алгебры

¹Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект № 18–01–00264).

и классического анализа, позволяет в ряде случаев находить гладкие решения уравнения эйконала в явном виде [14]. Численные процедуры построения на сетках обобщенных решений уравнений гамильтонова типа и уравнений типа эйконала предлагаются, например, в [15].

Основным результатом исследования является теорема о необходимых условиях существования псевдовершин. Псевдовершины — особые точки границы краевого множества, связанные с характеристикой множества с точки зрения меры невыпуклости [16, 17]. Их отыскание есть необходимое звено конструирования минимаксного решения краевой задачи Дирихле для уравнений типа эйконала.

§ 1. Объект исследования

Рассматривается краевая задача Дирихле:

$$\min_{\nu: \|\nu\| \leq 1} \left(\nu_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \nu_2 \frac{\partial u}{\partial y} \right) + 1 = 0, \quad (1.1)$$

$$u|_{\Gamma} = 0. \quad (1.2)$$

Здесь $\|\nu\| = \sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2}$ — норма вектора $\nu = (\nu_1, \nu_2)$. Краевое условие (1.2) определено на границе $\Gamma = \partial M$ замкнутого множества $M \subset \mathbb{R}^2$. Предполагается, что Γ не имеет точек самопересечения. Дифференциальные свойства границы Γ будут оговорены ниже при обосновании утверждений.

Минимаксное решение $u(x, y) = \rho((x, y), M)$ задачи (1.1), (1.2), где $\rho(\mathbf{x}, M) = \min_{\mathbf{m} \in M} \|\mathbf{m} - \mathbf{x}\|$ — евклидово расстояние от точки $\mathbf{x} = (x, y)$ до множества M (см. [6]), является функцией оптимального результата в задаче управления по быстрдействию [3] с динамикой

$$\begin{cases} \dot{x} = \nu_1, \\ \dot{y} = \nu_2, \end{cases} \quad (1.3)$$

где управление $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ стеснено ограничением $\|\nu\| \leq 1$, M — целевое множество. Минимаксное решение задачи (1.1), (1.2) противоположно по знаку фундаментальному решению $u_k = u_k(x, y)$ [1] краевой задачи Дирихле для уравнения в частных производных первого порядка типа эйконала для случая изотропной среды:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = 1, \quad (1.4)$$

$$u|_{\Gamma} = 0. \quad (1.5)$$

Здесь краевое условие то же, что и в задаче (1.1), (1.2). Карты линий уровня фундаментального решения задачи (1.4), (1.5) и минимаксного решения задачи (1.1), (1.2) совпадают. В этом смысле решения обеих краевых задач эквивалентны. Характер эволюции волновых фронтов определяется геометрией краевого множества и дифференциальными свойствами его границы. Невыпуклость этого множества влечет наличие у решения задачи сингулярного множества, которое относится к множествам симметрии [7]. В общем случае сингулярное множество состоит из нуль- и одномерных многообразий. Отыскание сингулярного множества в аналитическом виде или же нахождение его аппроксимации с помощью вычислительных процедур заметным образом облегчает построение решения краевой задачи в целом. Особую роль при этом играют псевдовершины — точки на границе краевого множества, «сигнализирующие» о наличии одномерных многообразий, ветвей множества симметрии. Ранее установлена связь посредством аналитических формул между псевдовершинами краевого множества и крайними точками одномерных многообразий («началами» ветвей сингулярного множества) в ряде случаев [9].

Отметим, что выявление псевдовершин проще всего осуществляется на двух классах кривых, ограничивающих краевое множество. Первый класс составляют кусочно-гладкие кривые, изломы которых являются псевдовершинами [9]. Второй класс составляют кривые с порядком

гладкости не ниже третьего, у которых псевдовершины содержатся во множестве точек со стационарной кривизной [11]. Наиболее сложными для анализа выступают кривые переменной гладкости, порядок которой при локальном рассмотрении может меняться в диапазоне от 1 до 3. Ниже рассмотрен случай, когда гладкость кривой минимальна, то есть равна 1. При этом предполагается, что производные второго порядка координатных функций, задающих кривую, существуют в смысле односторонних пределов соответствующих дифференциальных отношений. Получены необходимые условия существования псевдовершин для случая параметризованной границы краевого множества в условиях, допускающих невыпуклость множества. Условия выписаны в терминах стационарности координатных функций, а также в терминах односторонних частичных пределов дифференциальных соотношений, зависящих от свойств локальных диффеоморфизмов, определяющих псевдовершины.

§ 2. Определения, основные понятия

Пусть $\gamma: T \rightarrow \mathbb{R}^2$ — непрерывное отображение числового интервала $T = (\hat{t}, \check{t})$, $-\infty \leq \hat{t} < \check{t} \leq +\infty$ на плоскость. Вектор-функция $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ является по крайней мере один раз дифференцируемой функцией. Образ $\Gamma = \gamma(T)$ этого отображения представляет собой плоскую кривую. Полагаем, что Γ является регулярной, то есть $\gamma'(t) \neq (0, 0)$ для всех $t \in T$, и не имеет точек самопересечения. В рассмотрение также входят контуры — кривые, заданные на конечных интервалах $T = (\hat{t}, \check{t})$, $-\infty < \hat{t} < \check{t} < +\infty$, допускающие доопределение в конечных точках $t = \hat{t}$ и $t = \check{t}$ так, что $\gamma(\hat{t}) = \gamma(\check{t})$.

Рассмотрим уравнение вида

$$G(t_1, t_2) = 0.$$

Здесь $G = G(t_1, t_2)$ — функция двух переменных $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$, которая, вообще говоря, не обязательно всюду дифференцируема. Уравнение анализируется на прямоугольных открытых областях $\Pi(t_0, \delta_1, \delta_2) = \{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2: t_1 \in (t_0 - \delta_1, t_0), t_2 \in (t_0, t_0 + \delta_2)\}$, где $t_0 \in \mathbb{R}$ фиксировано, параметры малости $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$. Решения этого уравнения ищем в классе локальных диффеоморфизмов [18], графики которых лежат в $\Pi(t_0, \delta_1, \delta_2)$. Здесь диффеоморфизм — скалярная непрерывно дифференцируемая строго монотонная без нулей производной функция. Говоря о локальном диффеоморфизме, мы подразумеваем, что он определен в малом — в левой (либо в правой) полукрестности точки рассмотрения.

Определение 1. Локальный диффеоморфизм $t_2 = t_2(t_1)$, такой, что $G(t_1, t_2) = 0$, непрерывен слева в точке $t_1 = t_0$ и отображает левую полукрестность точки в ее правую полукрестность, если выполняются следующие условия:

$$(A1) \quad t_2((t_0 - \delta_1, t_0)) = (t_0, t_0 + \delta_2), \quad \delta_1 > 0, \quad \delta_2 > 0,$$

$$(A2) \quad \lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} t_2(t_1) = t_0.$$

Заметим, что в случае уравнения с симметричной правой частью, когда $G(t_1, t_2) = G(t_2, t_1)$, существует обратный локальный диффеоморфизм $t_1 = t_1(t_2)$, отображающий правую полукрестность точки $t_1 = t_0$ в ее левую полукрестность, причем $\lim_{t_2 \rightarrow t_0 + 0} t_1(t_2) = t_0$.

Выберем произвольно и зафиксируем два момента: $t_1 \in T$ и $t_2 \in T$, $t_1 < t_2$. Проведем через точки $\gamma(t_1)$ и $\gamma(t_2)$ касательные прямые.

Определение 2. Псевдовершиной кривой Γ называется точка

$$(x_0, y_0) \triangleq \lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} (\bar{x}_*, \bar{y}_*),$$

где $(\bar{x}_*, \bar{y}_*) = (\bar{x}_*(t_1), \bar{y}_*(t_1)) \triangleq (x_*(t_1, t_2(t_1)), y_*(t_1, t_2(t_1)))$ — однопараметрическое подмножество решений $(x_*, y_*) = (x_*(t_1, t_2), y_*(t_1, t_2))$ системы уравнений

$$\begin{cases} (x - \gamma_1(t_1))\gamma_2'(t_1) = (y - \gamma_2(t_1))\gamma_1'(t_1), \\ (x - \gamma_1(t_2))\gamma_2'(t_2) = (y - \gamma_2(t_2))\gamma_1'(t_2), \end{cases} \quad (2.1)$$

определяемое непрерывным слева в точке $t_1 = t_0$ локальным диффеоморфизмом $t_2 = t_2(t_1)$ левой полукрестности точки $t_1 = t_0$ на ее правую полукрестность, который задается уравнением

$$G(t_1, t_2) = 0. \quad (2.2)$$

Здесь

- 1) (x_*, y_*) — точка пересечения касательных к кривой Γ в точках $\gamma(t_1)$ и $\gamma(t_2)$,
- 2) $G(t_1, t_2) = \rho^2(\gamma(t_1), (x_*, y_*)) - \rho^2(\gamma(t_2), (x_*, y_*))$ — разность квадратов расстояний между указанными точками $\gamma(t_1)$ и $\gamma(t_2)$ кривой и точкой (x_*, y_*) пересечения касательных, проведенных через $\gamma(t_1)$ и $\gamma(t_2)$.

Уравнение (2.2) позволяет выявлять и классифицировать особые точки границы краевого множества в задачах (1.1), (1.2) и (1.4), (1.5) в зависимости от дифференциальных свойств кривой.

Дополнительно к условиям (A1), (A2) на локальный диффеоморфизм $t_2 = t_2(t_1)$, определенный слева от этой точки $t_1 = t_0 \in \mathbb{R}$, также потребуем, чтобы выполнялось условие

$$(A3) \quad \lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} \frac{dt_2}{dt_1} = c, c \in [-\infty, 0].$$

Указанным образом определенный диффеоморфизм для случая уравнения (2.2) можно рассматривать как локальную перепараметризацию кривой, которая (перепараметризация) задается в окрестности точки неявно с помощью евклидова расстояния. Отметим особенности предложенной математической модели. Введенный диффеоморфизм определяется с одной стороны (слева) от точки $t_1 = t_0$. При этом конструкции присуща симметрия в следующем смысле. Обратный локальный диффеоморфизм $t_1 = t_1(t_2)$ при соблюдении условия (A2) существует, определен с другой стороны (справа) от той же точки $t_2 = t_0$ и наследует аналог этого условия в том смысле, что $\lim_{t_2 \rightarrow t_0 + 0} t_1(t_2) = t_0$. Таким образом, в рамках этой конструкции точка $t_1 = t_0$ «выколота» и рассматривается как предельный элемент. Это важное свойство математической модели, которое позволяет исследовать кривые с различными дифференциальными свойствами, включая негладкие кривые [9]. На локальный диффеоморфизм можно смотреть также как на правило, устанавливающее взаимно однозначное соответствие между парами точек, лежащими в окрестности точки рассмотрения по разные от нее стороны. Кроме того, здесь можно говорить о двойственной кривой $\tilde{\Gamma}$, определенной в плоскости переменных t_1, t_2 непрерывной склейкой графиков исходного диффеоморфизма $t_2 = t_2(t_1)$ и ему обратного диффеоморфизма $t_1 = t_1(t_2)$. При этом дифференциальные свойства кривой $\tilde{\Gamma}$ в точке $(t_1, t_2) = (t_0, t_0)$ определяются дифференциальными свойствами исходной кривой Γ [19].

Уточним дифференциальные свойства регулярной кривой Γ , ограничивающей краевое множество M . Будем полагать, что производная второго порядка $\gamma''(t) = (\gamma_1''(t), \gamma_2''(t))$ существует при всех значений аргумента $t \in T$, кроме конечного числа точек. А именно, имеется конечная совокупность $T = \{t_*\}$, состоящая из точек $t_* \in T$, в которых существуют конечные одно-сторонние производные второго порядка $\gamma''_-(t_*)$ и $\gamma''_+(t_*)$, при этом $\gamma''_-(t_*) \neq \gamma''_+(t_*)$. Здесь и далее нижние индексы «-» и «+» обозначают односторонние производные (левые и правые соответственно) указанного порядка скалярных и векторных функций. Обозначим $\det(a, b)$ определитель второго порядка, построенный на векторах $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$, записанных по строкам. Будем полагать, что выполняется следующее условие для кривой Γ :

(B) Для всех $t_* \in T$ определители $\det(\gamma'(t_*), \gamma''_-(t_*))$ и $\det(\gamma'(t_*), \gamma''_+(t_*))$ конечны, имеют один и тот же знак (в нестрогом смысле), при этом $\det(\gamma'(t_*), \gamma''_-(t_*)) \neq \det(\gamma'(t_*), \gamma''_+(t_*))$.

Условие (B) означает, что односторонние кривизны $\kappa^-(\gamma(t)) = \det(\gamma'(t), \gamma''_-(t))/(s(t))^3$ и $\kappa^+(\gamma(t)) = \det(\gamma'(t), \gamma''_+(t))/(s(t))^3$, где $s(t) = \|\gamma'(t)\|$, не меняют знак в точке разрыва производной второго порядка. Дуга регулярной кривой, содержащая точку с разрывной кривизной в качестве внутренней точки, при соблюдении условия (B) является выпуклой. Множество кривых Γ с указанными дифференциальными свойствами и условием (B), налагаемым на точки разрыва кривизны, обозначим $\{\Gamma\}_T$. При соблюдении условий (A1)–(A3), (B) в случае, когда

$\gamma(t_0) = (\gamma_1(t_0), \gamma_2(t_0))$ — псевдовершина плоской кривой $\Gamma \in \{\Gamma\}_T$, а $t_2 = t_2(t_1)$ — локальный диффеоморфизм, определяемый уравнением (2.2), предельное значение c производной локального диффеоморфизма принимает одно из двух значений, оно равно 0 либо $-\infty$ [10]. Содержательно c является числовым маркером псевдовершины, фиксирующим качественное состояние кривой с точки зрения дифференцируемости. Маркер $c = -1$ в случае дважды дифференцируемости кривой в псевдовершине. Если же кривая гладкая, но при этом не имеет классической кривизны (производные второго порядка координатных функций разрывны, при том, что односторонние производные второго порядка существуют и конечны), то маркер принимает одно из двух крайних значений из своего спектра. Наконец, если рвутся производные первого порядка, то маркер равен отношению дифференциалов дуг кривой, стянутых в точку, при этом $c \neq -1$ (см. [19]).

§ 3. Необходимые условия для псевдовершин краевого множества

Сформулируем и докажем основной результат исследования.

Теорема 1. *Если $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$ — псевдовершина плоской регулярной кривой $\Gamma = \gamma(t) \in \{\Gamma\}_T$, ограничивающей краевое множество M в задаче Дирихле (1.1), (1.2), определяемая локальным диффеоморфизмом $t_2 = t_2(t_1)$ из (2.2), то в этой точке выполняется одно из условий:*

$$\gamma'_1(t_0) \neq 0, \quad \gamma'_2(t_0) = 0, \quad (3.1)$$

$$\gamma'_1(t_0) = 0, \quad \gamma'_2(t_0) \neq 0, \quad (3.2)$$

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} \frac{1}{t_1 - t_0} \left(\frac{\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1)}{\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1)} - \frac{-\gamma'_1(t_1)\gamma'_1(t_2) + \gamma'_2(t_1)\gamma'_2(t_2) + s(t_1)s(t_2)}{\gamma'_2(t_1)\gamma'_1(t_2) + \gamma'_2(t_2)\gamma'_1(t_1)} \right) = 0,$$

когда

$$t_2 = t_2(t_1), \quad \gamma'_1(t_0) \neq 0, \quad \gamma'_2(t_0) \neq 0, \quad c = 0, \quad (3.3)$$

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_0 + 0} \frac{1}{t_2 - t_0} \left(\frac{\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1)}{\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1)} - \frac{-\gamma'_1(t_1)\gamma'_1(t_2) + \gamma'_2(t_1)\gamma'_2(t_2) + s(t_1)s(t_2)}{\gamma'_2(t_1)\gamma'_1(t_2) + \gamma'_2(t_2)\gamma'_1(t_1)} \right) = 0,$$

когда

$$t_1 = t_1(t_2), \quad \gamma'_1(t_0) \neq 0, \quad \gamma'_2(t_0) \neq 0, \quad c = -\infty. \quad (3.4)$$

Доказательство. По определению псевдовершины

$$(\bar{x}_*, \bar{y}_*) = (\bar{x}_*(t_1), \bar{y}_*(t_1)) = (x_*(t_1, t_2(t_1)), y_*(t_1, t_2(t_1))),$$

где $(\bar{x}_*, \bar{y}_*) = (x_*(t_1, t_2(t_1)), y_*(t_1, t_2(t_1)))$ — однопараметрическое подмножество решений системы (2.1), определяемое локальным диффеоморфизмом $t_2 = t_2(t_1)$, являющимся решением уравнения (2.2). Кривая Γ регулярная, пусть для определенности $\gamma'_1(t_0) \neq 0$. Тогда в некоторой окрестности $t = t_0$ приращение $\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1) \neq 0$ и производные $\gamma'_1(t_1) \neq 0$, $\gamma'_1(t_2) \neq 0$. В этом случае уравнение (2.2) допускает эквивалентное представление

$$\begin{aligned} & 2(\gamma_2(t_1) - \gamma_2(t_2))(\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1)) + \left(\frac{\gamma'_2(t_1)}{\gamma'_1(t_1)} + \frac{\gamma'_2(t_2)}{\gamma'_1(t_2)} \right) (\gamma_1(t_1) - \gamma_1(t_2))^2 - \\ & - 2 \frac{\gamma'_2(t_1)\gamma'_2(t_2)}{\gamma'_1(t_1)\gamma'_1(t_2)} (\gamma_1(t_1) - \gamma_1(t_2))(\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1)) - \left(\frac{\gamma'_2(t_1)}{\gamma'_1(t_1)} + \frac{\gamma'_2(t_2)}{\gamma'_1(t_2)} \right) (\gamma_2(t_1) - \gamma_2(t_2))^2 = 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Возможны два случая:

случай 1: $\left(\frac{\gamma'_2(t_1)}{\gamma'_1(t_1)} + \frac{\gamma'_2(t_2)}{\gamma'_1(t_2)} \right) = 0;$

случай 2: $\left(\frac{\gamma'_2(t_1)}{\gamma'_1(t_1)} + \frac{\gamma'_2(t_2)}{\gamma'_1(t_2)}\right) \neq 0$.

Случай 1 разобран в [11]. Доказано, что тогда $\gamma'_2(t_0) = 0$. Там же показано, что при предположении $\gamma'_1(t_0) \neq 0$ вторая компонента псевдовершины стационарна: $\gamma'_2(t_0) = 0$. Тем самым считаем условия (3.1) и (3.2) доказанными.

Пусть теперь реализовался наиболее сложный случай 2. После алгебраических преобразований уравнение (3.5) принимает вид

$$\left(\frac{\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1)}{\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1)}\right)^2 + 2\frac{\gamma'_1(t_1)\gamma'_1(t_2) - \gamma'_2(t_1)\gamma'_2(t_2)}{\gamma'_2(t_1)\gamma'_1(t_2) + \gamma'_2(t_2)\gamma'_1(t_1)} \cdot \frac{\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1)}{\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1)} - 1 = 0.$$

Если принять обозначения

$$\lambda \triangleq \lambda(t_1, t_2) \triangleq \frac{\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1)}{\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1)}, \quad \mu \triangleq \mu(t_1, t_2) \triangleq \frac{\gamma'_1(t_1)\gamma'_1(t_2) - \gamma'_2(t_1)\gamma'_2(t_2)}{\gamma'_2(t_1)\gamma'_1(t_2) + \gamma'_2(t_2)\gamma'_1(t_1)},$$

то уравнение относительно λ примет вид

$$\lambda^2 + 2\mu\lambda - 1 = 0.$$

Уравнение является квадратичным, при этом его коэффициенты зависят от двух параметров. Заметим, что оно близко к уравнению гармонической пропорции [20] и имеет два действительных решения разного знака:

$$\lambda_- = -\mu - \sqrt{\mu^2 + 1} < 0, \quad \lambda_+ = -\mu + \sqrt{\mu^2 + 1} > 0,$$

т. е. $\lambda^2 + 2\mu\lambda - 1 = (\lambda - \lambda_-)(\lambda - \lambda_+)$. Ранее показано (см. [11]), что точка $t_1 = t_0$ является корнем второго сомножителя в разложении, т. е. указанная точка есть решение уравнения

$$\frac{\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1)}{\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1)} + \mu(t_1, t_2) - \sqrt{(\mu(t_1, t_2))^2 - 1} = 0, \quad (3.6)$$

когда переменные связаны в силу диффеоморфизма $t_2 = t_2(t_1)$. Поскольку

$$\mu^2 + 1 = \frac{(s(t_1))^2(s(t_2))^2}{\gamma'_2(t_1)\gamma'_1(t_2) + \gamma'_2(t_2)\gamma'_1(t_1)},$$

где $s(t) = \sqrt{(\gamma'_1(t))^2 + (\gamma'_2(t))^2}$ — длина касательного вектора, то

$$\lambda_+ = -\mu + \sqrt{\mu^2 + 1} = \frac{-\gamma'_1(t_1)\gamma'_1(t_2) + \gamma'_2(t_1)\gamma'_2(t_2) + s(t_1)s(t_2)}{\gamma'_2(t_1)\gamma'_1(t_2) + \gamma'_2(t_2)\gamma'_1(t_1)}.$$

Уравнение (3.6) принимает вид

$$\frac{\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1)}{\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1)} - \frac{-\gamma'_1(t_1)\gamma'_1(t_2) + \gamma'_2(t_1)\gamma'_2(t_2) + s(t_1)s(t_2)}{\gamma'_2(t_1)\gamma'_1(t_2) + \gamma'_2(t_2)\gamma'_1(t_1)} = 0. \quad (3.7)$$

Изучим свойства этого уравнения и его значимой части в окрестности точки $(t_1, t_2) = (t_0, t_0)$. Согласно лемме из [10], может реализоваться одна из двух ситуаций относительно предельного значения производной локального диффеоморфизма:

ситуация 1: $c \triangleq \lim_{t_1 \rightarrow t_0-0} \frac{dt_2}{dt_1} = 0$;

ситуация 2: $c \triangleq \lim_{t_1 \rightarrow t_0-0} \frac{dt_2}{dt_1} = -\infty$.

Далее рассмотрим подробно ситуацию 1, когда маркер

$$c = 0. \quad (3.8)$$

При анализе нам потребуются преобразования приращений функций по формуле конечных приращений Лагранжа на парах точек (t_1, t_2) , лежащих в окрестности $t_0 \in \mathbb{R}$ и упорядоченных так, что $t_1 < t_0 < t_2$:

$$\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1) = \gamma'_1(\tau)(t_2 - t_1), t_2 < \tau < t_1, \quad (3.9)$$

$$\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1) = \gamma'_2(\tilde{\tau})(t_2 - t_1), t_2 < \tilde{\tau} < t_1. \quad (3.10)$$

Заметим, что при $t_2 = t_2(t_1)$ в силу (3.9), (3.10), непрерывности производных координатных функций и, вообще говоря, вне зависимости от значения маркера односторонний левый частичный предел значимой части уравнения (3.7) равен нулю:

$$\begin{aligned} \lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} \left(\frac{\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1)}{\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1)} - \frac{-\gamma'_1(t_1)\gamma'_1(t_2) + \gamma'_2(t_1)\gamma'_2(t_2) + s(t_1)s(t_2)}{\gamma'_2(t_1)\gamma'_1(t_2) + \gamma'_2(t_2)\gamma'_1(t_1)} \right) = \\ = \lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} \frac{\gamma'_2(\tilde{\tau})(t_2 - t_1)}{\gamma'_1(\tau)(t_2 - t_1)} - \frac{2(\gamma'_2(t_0))^2}{2\gamma'_1(t_0)\gamma'_2(t_0)} = \frac{\gamma'_2(t_0)}{\gamma'_1(t_0)} - \frac{\gamma'_2(t_0)}{\gamma'_1(t_0)} = 0, \end{aligned} \quad (3.11)$$

то есть $t_1 = t_0$ является корнем уравнения

$$\frac{\gamma_2(t_2(t_1)) - \gamma_2(t_1)}{\gamma_1(t_2(t_1)) - \gamma_1(t_1)} - \frac{-\gamma'_1(t_1)\gamma'_1(t_2(t_1)) + \gamma'_2(t_1)\gamma'_2(t_2(t_1)) + s(t_1)s(t_2(t_1))}{\gamma'_2(t_1)\gamma'_1(t_2(t_1)) + \gamma'_2(t_2(t_1))\gamma'_1(t_1)} = 0.$$

Другими словами, найдется по крайней мере один раз дифференцируемая скалярная функция $g = g(t_1)$, определенная в левой полукрестности точки $t_0 \in \mathbb{R}$, такая, что (лемма Адамара [18, с. 58])

$$\frac{\gamma_2(t_2(t_1)) - \gamma_2(t_1)}{\gamma_1(t_2(t_1)) - \gamma_1(t_1)} - \frac{-\gamma'_1(t_1)\gamma'_1(t_2(t_1)) + \gamma'_2(t_1)\gamma'_2(t_2(t_1)) + s(t_1)s(t_2(t_1))}{\gamma'_2(t_1)\gamma'_1(t_2(t_1)) + \gamma'_2(t_2(t_1))\gamma'_1(t_1)} = (t_1 - t_0)g(t_1).$$

Условие (3.11) не является конструктивным с точки зрения выявления псевдовершин, поскольку оно выполняется не только в псевдовершине, но и в любой другой точке $\gamma(t_0) \in \Gamma$, $\gamma'_1(t_0) \neq 0$, отличной от псевдовершины. В этом смысле равенство (3.11) заключает в себе вырожденное условие — условие, заведомо выполняемое во всех точках кривой с нестационарной первой координатой.

С целью нахождения конструктивных для выявления псевдовершин соотношений вычислим односторонний левый предел функции $g = g(t_1)$ в точке $t_1 = t_0$, по-прежнему полагая, что переменные стеснены диффеоморфизмом $t_2 = t_2(t_1)$, и при том требуя выполнения условия (3.8) (аргумент у диффеоморфизма всюду далее для краткости изложения опущен):

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} g(t_1) = \lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} \left(\frac{\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1)}{\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1)} - \frac{-\gamma'_1(t_1)\gamma'_1(t_2) + \gamma'_2(t_1)\gamma'_2(t_2) + s(t_1)s(t_2)}{\gamma'_2(t_1)\gamma'_1(t_2) + \gamma'_2(t_2)\gamma'_1(t_1)} \right) (t_0 - t_1)^{-1}.$$

Возникшее отношение бесконечно малых можно разрешить с помощью техники струй (см., например, [11]) или, что по сути близко к указанной технике и в данном случае более оправданно с точки зрения минимизации объема вычислений, с помощью правила Лопиталья. Следуя этому правилу, найдем производную по t_1 числителя:

$$\begin{aligned} \lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} \left(\frac{\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1)}{\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1)} - \frac{-\gamma'_1(t_1)\gamma'_1(t_2) + \gamma'_2(t_1)\gamma'_2(t_2) + s(t_1)s(t_2)}{\gamma'_2(t_1)\gamma'_1(t_2) + \gamma'_2(t_2)\gamma'_1(t_1)} \right)' = \\ = \left(\frac{\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1)}{\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1)} \right)' - \left(\frac{-\det(\gamma'(t_1), \tilde{\gamma}'(t_2)) + s(t_1)s(t_2)}{\gamma'_2(t_1)\gamma'_1(t_2) + \gamma'_2(t_2)\gamma'_1(t_1)} \right)'. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Здесь для краткости принято обозначение $\tilde{\gamma}'(t_2) = (\gamma'_2(t_2), \gamma'_1(t_2))$.

Далее последовательно найдем предел каждой из двух дробей в (3.12). Подчеркнем, что вычисляем односторонние левые частичные пределы. Частичность пределов обусловлена выбором

локального диффеоморфизма с вполне определенным значением маркера $c = 0$, характеризующим дифференциальные свойства кривой в псевдовершине.

Вычислим производную первой дроби:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1)}{\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1)} \right)' &= \frac{(\gamma_2'(t_2)t_2' - \gamma_2'(t_1))(\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1)) - (\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1))(\gamma_1'(t_2)t_2' - \gamma_1'(t_1))}{(\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1))^2} = \\ &= \frac{\gamma_2'(t_2)(\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1)) - \gamma_1'(t_2)(\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1))}{(\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1))^2} t_2' + \\ &+ \frac{-\gamma_2'(t_2)(\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1)) + \gamma_1'(t_1)(\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1))}{(\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1))^2}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Производная t_2' (3.13) является линейной функцией относительно производной локального диффеоморфизма. При этом ее коэффициенты представляют собой частные от бесконечно малых в левой полукрестности точки $t_1 = t_0$. Найдем односторонний левый частичный предел коэффициента при t_2' , применяя правило Лопиталья, формулы конечных приращений Лагранжа (3.9), (3.10), а также равенство (3.8) для маркера $c = 0$:

$$\begin{aligned} &\lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} \frac{\gamma_2'(t_2)(\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1)) - \gamma_1'(t_2)(\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1))}{(\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1))^2} t_2' = \\ &= \lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} \left[\frac{\gamma_2''(t_2)(\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1))t_2' - \gamma_2'(t_2)(\gamma_1'(t_2)t_2' - \gamma_1'(t_1))}{2(\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1))(\gamma_1'(t_2)t_2' - \gamma_1'(t_1))} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{-\gamma_1''(t_2)(\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1))t_2' - \gamma_1'(t_2)(\gamma_2'(t_2)t_2' - \gamma_2'(t_1))}{2(\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1))(\gamma_1'(t_2)t_2' - \gamma_1'(t_1))} \right] = \\ &= \lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} \left[\frac{\gamma_2''(t_2)(\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1)) - \gamma_1''(t_2)(\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1))}{2(\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1))(\gamma_1'(t_2)t_2' - \gamma_1'(t_1))} t_2' + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\gamma_1'(t_1)\gamma_2'(t_2) + \gamma_1'(t_2)\gamma_2'(t_1)}{2(\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1))(\gamma_1'(t_2)t_2' - \gamma_1'(t_1))} \right] = \\ &= \lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} \left[\frac{\gamma_2''(t_2)\gamma_1'(\tau) - \gamma_1''(t_2)\gamma_2'(\tilde{\tau})}{2\gamma_1'(\tau)(\gamma_1'(t_2)t_2' - \gamma_1'(t_1))} t_2' + \frac{-\gamma_1'(t_1)\gamma_2'(t_2) + \gamma_1'(t_2)\gamma_2'(t_1)}{2(\gamma_1'(t_2)t_2' - \gamma_1'(t_1))} \cdot \frac{1}{\gamma_1'(t_2)t_2' - \gamma_1'(t_1)} \right] = \\ &= \frac{\det(\gamma'(t_0), \gamma''(t_0))}{2(\gamma_1'(t_1))^2}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

При вычислении предела (3.14) приняты во внимание следующие три предельных соотношения:

$$\begin{aligned} &\lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} \frac{\gamma_2''(t_2)\gamma_1'(\tau) - \gamma_1''(t_2)\gamma_2'(\tilde{\tau})}{2\gamma_1'(\tau)(\gamma_1'(t_2)t_2' - \gamma_1'(t_1))} = \frac{\det(\gamma'(t_0), \gamma''(t_0))}{2(\gamma_1'(t_1))^2(-1)} = -\frac{\det(\gamma'(t_0), \gamma''(t_0))}{2(\gamma_1'(t_1))^2}, \\ &\lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} \frac{-\gamma_1'(t_1)\gamma_2'(t_2) + \gamma_1'(t_2)\gamma_2'(t_1)}{2(\gamma_1'(t_2)t_2' - \gamma_1'(t_1))} = \lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} \frac{(-\gamma_1'(t_1)\gamma_2'(t_2) + \gamma_1'(t_2)\gamma_2'(t_1))'}{(2(\gamma_1'(t_2)t_2' - \gamma_1'(t_1)))'} = \\ &= \lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} \frac{-(\gamma_1'(t_1)\gamma_2''(t_2) - \gamma_1''(t_2)\gamma_2'(t_1))t_2' + \gamma_1'(t_2)\gamma_2''(t_1) - \gamma_1''(t_1)\gamma_2'(t_2)}{2(\gamma_1'(t_2)t_2' - \gamma_1'(t_1))} = -\frac{\det(\gamma'(t_0), \gamma''(t_0))}{2(\gamma_1'(t_1))}, \\ &\lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} \frac{1}{\gamma_1'(t_2)t_2' - \gamma_1'(t_1)} = -\frac{1}{\gamma_1'(t_0)}. \end{aligned}$$

Следом найдем односторонний левый частичный предел «свободного члена» в (3.13):

$$\begin{aligned}
& \lim_{t_1 \rightarrow t_0-0} \frac{-\gamma'_2(t_2)(\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1)) + \gamma'_1(t_1)(\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1))}{(\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1))^2} = \\
& = \lim_{t_1 \rightarrow t_0-0} \frac{[-\gamma'_2(t_2)(\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1)) + \gamma'_1(t_1)(\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1))]'}{[(\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1))^2]'} = \\
& \lim_{t_1 \rightarrow t_0-0} \left[\frac{-\gamma''_2(t_1)(\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1)) - \gamma'_2(t_1)(\gamma'_1(t_2)t'_2 - \gamma'_1(t_1))}{2(\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1))(\gamma'_1(t_2)t'_2 - \gamma'_1(t_1))} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\gamma''_1(t_1)(\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1)) + \gamma'_1(t_1)(\gamma'_2(t_2)t'_2 - \gamma'_1(t_2))}{2(\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1))(\gamma'_1(t_2)t'_2 - \gamma'_1(t_1))} \right] = \\
& \lim_{t_1 \rightarrow t_0-0} \left[\frac{-\gamma''_2(t_1)(\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1)) + \gamma''_1(t_1)(\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1))}{2(\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1))(\gamma'_1(t_2)t'_2 - \gamma'_1(t_1))} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{(\gamma'_1(t_1)\gamma'_2(t_2) - \gamma'_2(t_1)\gamma'_1(t_2))t'_2}{2(\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1))(\gamma'_1(t_2)t'_2 - \gamma'_1(t_1))} \right] = \\
& = \frac{-\gamma''_2(t_0)\gamma'_1(t_0) + \gamma''_1(t_0)\gamma'_2(t_0)}{-2(\gamma'_1(t_0))^2} = \frac{\det(\gamma'(t_0), \gamma''_-(t_0))}{2(\gamma'_1(t_0))^2}.
\end{aligned}$$

Тогда с учетом (3.8) и представления (3.13) имеем

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_0-0} \left(\frac{\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1)}{\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1)} \right)' = \frac{\det(\gamma'(t_0), \gamma''_-(t_0))}{2(\gamma'_1(t_0))^2}. \quad (3.15)$$

Вычислим производную второй дроби в (3.12):

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{-\det(\gamma'(t_1), \hat{\gamma}'(t_2)) + s(t_1)s(t_2)}{\gamma'_2(t_1)\gamma'_1(t_2) + \gamma'_2(t_2)\gamma'_1(t_1)} \right)' = \\
& = \frac{(-\det(\gamma''(t_1), \hat{\gamma}'(t_2)) - \det(\gamma'(t_1), \hat{\gamma}''(t_2))t'_2)(\gamma'_2(t_1)\gamma'_1(t_2) + \gamma'_2(t_2)\gamma'_1(t_1))}{(\gamma'_2(t_1)\gamma'_1(t_2) + \gamma'_2(t_2)\gamma'_1(t_1))^2} + \\
& + \left(\frac{\gamma'_1(t_1)\gamma''_1(t_1) + \gamma'_2(t_1)\gamma''_2(t_1)}{s(t_1)}s(t_2) + s(t_1)\frac{\gamma'_1(t_2)\gamma''_1(t_2) + \gamma'_2(t_2)\gamma''_2(t_2)}{s(t_2)} \right) \times \\
& \quad \times \frac{\gamma'_2(t_1)\gamma'_1(t_2) + \gamma'_2(t_2)\gamma'_1(t_1)}{(\gamma'_2(t_1)\gamma'_1(t_2) + \gamma'_2(t_2)\gamma'_1(t_1))^2} - \\
& - (-\det(\gamma'(t_1), \hat{\gamma}'(t_2)) + s(t_1)s(t_2)) \frac{\gamma''_2(t_1)\gamma'_1(t_2) + \gamma'_2(t_1)\gamma''_1(t_2)t'_2 + \gamma'_2(t_2)\gamma'_1(t_1)t'_2 + \gamma'_2(t_2)\gamma''_1(t_1)}{(\gamma'_2(t_1)\gamma'_1(t_2) + \gamma'_2(t_2)\gamma'_1(t_1))^2}.
\end{aligned}$$

После чего найдем односторонний левый частичный (обусловленный значением маркера (3.8)) предел этой дроби, опуская для краткости обозначение t_0 предельного значения аргумента t_1 :

$$\begin{aligned}
& \lim_{t_1 \rightarrow t_0-0} \left(\frac{-\det(\gamma'(t_1), \hat{\gamma}'(t_2)) + s(t_1)s(t_2)}{\gamma'_2(t_1)\gamma'_1(t_2) + \gamma'_2(t_2)\gamma'_1(t_1)} \right)' = \\
& = \frac{-\det(\gamma''_-, \hat{\gamma}')2\gamma'_2\gamma'_1 + (\gamma'_1\gamma''_{1,-} + \gamma'_2\gamma''_{2,-})2\gamma'_2\gamma'_1 - (-\det(\gamma'_-, \hat{\gamma}') + (s)^2)(\gamma''_{2,-}\gamma'_1 + \gamma'_2\gamma''_{1,-})}{4(\gamma'_2\gamma'_1)^2}.
\end{aligned}$$

В дальнейшем учитывая ограничение на знаменатель, полагаем $\gamma'_2 \neq 0$. Поскольку

$$-\det(\gamma'_-, \tilde{\gamma}') + (s)^2 = -(\gamma'_1)^2 + (\gamma'_2)^2 + (\gamma'_1)^2 + (\gamma'_2)^2 = 2(\gamma'_2)^2,$$

то

$$\begin{aligned} & \lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} \left(\frac{-\det(\gamma'(t_1), \tilde{\gamma}'(t_2)) + s(t_1)s(t_2)}{\gamma'_2(t_1)\gamma'_1(t_2) + \gamma'_2(t_2)\gamma'_1(t_1)} \right)' = \\ &= \frac{-\det(\gamma''_-, \tilde{\gamma}') 2\gamma'_2\gamma'_1 + (\gamma'_1\gamma''_{1,-} + \gamma'_2\gamma''_{2,-}) 2\gamma'_2\gamma'_1 - 2(\gamma'_2)^2(\gamma''_{2,-}\gamma'_1 + \gamma'_2\gamma''_{1,-})}{4(\gamma'_2\gamma'_1)^2} = \\ &= \frac{-\det(\gamma''_-, \tilde{\gamma}')\gamma'_1 + (\gamma'_1\gamma''_{1,-} + \gamma'_2\gamma''_{2,-})\gamma'_1 - \gamma'_2(\gamma''_{2,-}\gamma'_1 + \gamma'_2\gamma''_{1,-})}{2\gamma'_2(\gamma'_1)^2} = \\ &= \frac{-(\gamma'_1)^2\gamma''_{1,-} + \gamma'_1\gamma'_2\gamma''_{2,-} + (\gamma'_1)^2\gamma''_{1,-} + \gamma'_1\gamma'_2\gamma''_{2,-} - \gamma'_1\gamma'_2\gamma''_{2,-} - (\gamma'_2)^2\gamma''_{1,-}}{2\gamma'_2(\gamma'_1)^2} = \\ &= \frac{\gamma'_1\gamma'_2\gamma''_{2,-} - (\gamma'_2)^2\gamma''_{1,-}}{2\gamma'_2(\gamma'_1)^2} = \frac{\det(\gamma', \gamma''_-)}{2(\gamma'_1)^2}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

В итоге из (3.15), (3.16) следует

$$\begin{aligned} & \lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} \frac{1}{t_1 - t_0} \left(\frac{\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1)}{\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1)} - \frac{-\gamma'_1(t_1)\gamma'_1(t_2) + \gamma'_2(t_1)\gamma'_2(t_2) + s(t_1)s(t_2)}{\gamma'_2(t_1)\gamma'_1(t_2) + \gamma'_2(t_2)\gamma'_1(t_1)} \right) = \\ &= \frac{\det(\gamma'(t_0), \gamma''_-(t_0))}{2(\gamma'_1(t_0))^2} - \frac{\det(\gamma'(t_0), \gamma''_-(t_0))}{2(\gamma'_1(t_0))^2} = 0, \end{aligned}$$

когда $t_2 = t_2(t_1)$, $\lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} \frac{dt_2}{dt_1}(t_1) = 0$, $\gamma'_1(t_0) \neq 0$, $\gamma'_2(t_0) \neq 0$. Равенство (3.3) доказано.

Рассуждая аналогичным образом в ситуации 2, когда маркер $c = -\infty$, что равносильно условию $\lim_{t_2 \rightarrow t_0 + 0} \frac{dt_1}{dt_2}(t_1) = 0$, принимая во внимание имеющиеся в математической модели симметрии, получим

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_0 + 0} \frac{1}{t_2 - t_0} \left(\frac{\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1)}{\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1)} - \frac{-\gamma'_1(t_1)\gamma'_1(t_2) + \gamma'_2(t_1)\gamma'_2(t_2) + s(t_1)s(t_2)}{\gamma'_2(t_1)\gamma'_1(t_2) + \gamma'_2(t_2)\gamma'_1(t_1)} \right) = 0,$$

здесь $t_1 = t_1(t_2)$, $c = -\infty$, $\gamma'_1(t_0) \neq 0$, $\gamma'_2(t_0) \neq 0$. Равенство (3.4) обосновано. \square

§ 4. Приложение

Пример 1. Приведем пример задачи управления, решение которой основано на выявлении псевдовершины целевого множества с указанными выше дифференциальными свойствами. Рассмотрим задачу управления по быстродействию с динамикой (1.3) для случая, когда целевое множество M является подграфиком функции $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, где

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x, & x \leq x_0, \\ x^{-1}, & x > x_0. \end{cases}$$

Здесь $x_0 = 1$. M является невыпуклым множеством с гладкой границей Γ , описываемой вектор-функцией $\gamma(t) = (t, f(t))$, $t \in \mathbb{R}$. Следуя определению 2, находим совокупность псевдовершин множества M , которая для данного примера включает единственную точку $A = (x_0, f(x_0)) = (1, 1)$, причем в этой точке производная второго порядка разрывна, односторонние производные второго порядка $f''_-(x_0) = 0$, $f''_+(x_0) = 2$. Локальный диффеоморфизм $t_1 = t_1(t_2)$, определяющий псевдовершину $A = (1, 1)$, находится из уравнения (2.2) и имеет вид

$$t_1(t_2) = \frac{2t_2}{t_2 + 1} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{t_2 - 1}{t_2 + 1} \sqrt{t_2^2 + t_2^{-2}}.$$

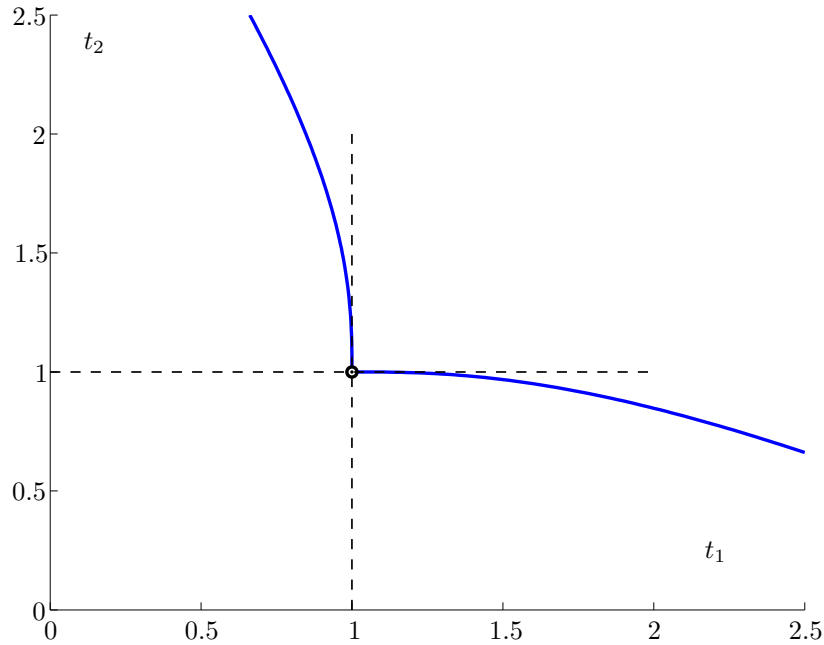


Рис. 1. Непрерывная склейка графиков взаимнообратных диффеоморфизмов $t_1 = t_1(t_2)$ и $t_2 = t_2(t_1)$ в точке $(t_1, t_2) = (x_0, x_0)$ в случае разрыва кривизны кривой Γ в псевдовершине $A = (x_0, f(x_0))$

Ни одна из координат псевдовершины не является стационарной, здесь $\gamma'(x_0) = (-1, -1)$. Нетрудно проверить, что $\lim_{t_2 \rightarrow x_0+0} \frac{dt_1}{dt_2}(t_2) = 0$, стало быть, маркер $c = -\infty$ (см. рис. 1).

В силу теоремы с необходимостью должно выполняться предельное соотношение (3.4), которое с учетом частного характера ситуации (граница множества — график скалярной функции) принимает вид

$$\lim_{t_2 \rightarrow x_0+0} \frac{1}{t_2 - x_0} \left(\frac{t_1 - t_2}{f(t_1) - f(t_2)} - \frac{-f'(t_1)f'(t_2) + 1 + \sqrt{1 + (f'(t_1))^2} \sqrt{1 + (f'(t_2))^2}}{f'(t_1) + f'(t_2)} \right) = 0. \quad (4.1)$$

При проверке истинности (4.1) примем во внимание, что обратная маркеру величина $\frac{1}{c} = \lim_{t_2 \rightarrow x_0+0} \frac{dt_1}{dt_2}(t_2) = 0$. Удостоверимся в справедливости необходимых условий, опираясь на правило Лопиталю, продифференцировав по t_2 каждую из дробей, стоящих в (4.1) в скобках. Напомним, что здесь $t_1 = t_1(t_2)$. Имеем

$$\begin{aligned} \left(\frac{t_1 - t_2}{f(t_1) - f(t_2)} \right)' &= \frac{(t_1' - 1)(2 - t_1 - t_2^{-1}) - (t_1 - t_2)(-t_1' + t_2^{-2})}{(2 - t_1 - t_2^{-1})^2} = \\ &= \frac{2 - t_2^{-1} - t_2}{(2 - t_1 - t_2^{-1})^2} t_1' + \frac{-2 + t_1 + 2t_2^{-1} - t_1 t_2^{-2}}{(2 - t_1 - t_2^{-1})^2}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Найдем в (4.2) предел коэффициента при t_1' :

$$\begin{aligned} \lim_{t_2 \rightarrow 1+0} \frac{2 - t_2^{-1} - t_2}{(2 - t_1 - t_2^{-1})^2} &= \lim_{t_2 \rightarrow 1+0} \frac{t_2^{-2} - 1}{2(2 - t_1 - t_2^{-1})(-t_1' + t_2^{-2})} = \\ &= \lim_{t_2 \rightarrow 1+0} \left[\frac{t_2^{-2} - 1}{2(2 - t_1 - t_2^{-1})} \cdot \frac{1}{-t_1' + t_2^{-2}} \right] = \lim_{t_2 \rightarrow 1+0} \frac{(t_2^{-2} - 1)'}{2(2 - t_1 - t_2^{-1})'} = \lim_{t_2 \rightarrow 1+0} \frac{2t_2^{-3}}{2(-t_1' + t_2^{-2})} = 1. \end{aligned}$$

Далее вычислим предел свободного члена в (4.2):

$$\lim_{t_2 \rightarrow 1+0} \frac{-2 + t_1 + 2t_2^{-1} - t_1 t_2^{-2}}{(2 - t_1 - t_2^{-1})^2} = \lim_{t_2 \rightarrow 1+0} \frac{t_1' - 2t_2^{-2} + t_1' t_2^{-2} + 2t_1 t_2^{-3}}{2(2 - t_1 - t_2^{-1})(-t_1' + t_2^{-2})} =$$

$$= \lim_{t_2 \rightarrow 1+0} \left[\frac{1 - t_2^{-2}}{2(2 - t_1 - t_2^{-1})} \cdot \frac{t_1'}{-t_1' + t_2^{-2}} + \frac{-2t_2^{-2} + 2t_1 t_2^{-3}}{2(2 - t_1 - t_2^{-1})} \cdot \frac{1}{-t_1' + t_2^{-2}} \right] = -1.$$

Здесь учтено, что

$$\lim_{t_2 \rightarrow 1+0} \frac{1 - t_2^{-2}}{2(2 - t_1 - t_2^{-1})} = \lim_{t_2 \rightarrow 1+0} \frac{2t_2^{-3}}{2(-t_1' + t_2^{-2})} = 1, \quad \lim_{t_2 \rightarrow 1+0} \frac{t_1'}{-t_1' + t_2^{-2}} = 0, \quad \lim_{t_2 \rightarrow 1+0} \frac{1}{-t_1' + t_2^{-2}} = 1,$$

$$\lim_{t_2 \rightarrow 1+0} \frac{-2t_2^{-2} + 2t_1 t_2^{-3}}{2(2 - t_1 - t_2^{-1})} = \lim_{t_2 \rightarrow 1+0} \frac{4t_2^{-3} + 2t_1' t_2^{-3} - 6t_1 t_2^{-4}}{2(-t_1' + t_2^{-2})} = -1.$$

Поскольку $\lim_{t_2 \rightarrow 1+0} t_1'(t_2) = 0$, то из (4.2) следует

$$\left(\frac{t_1 - t_2}{f(t_1) - f(t_2)} \right)' = -1. \quad (4.3)$$

Далее вычислим производную второй дроби, стоящей в (4.1), и ее предел:

$$\lim_{t_2 \rightarrow 1+0} \left(\frac{-f'(t_1)f'(t_2) + 1 + \sqrt{1 + (f'(t_1))^2} \sqrt{1 + (f'(t_2))^2}}{f'(t_1) + f'(t_2)} \right)' =$$

$$= \lim_{t_2 \rightarrow 1+0} \left(\frac{-t_2^{-2} + 1 + \sqrt{2(1 + t_2^{-4})}}{-1 - t_2^{-2}} \right)' =$$

$$= \lim_{t_2 \rightarrow 1+0} \left(\frac{2t_2^{-3} - 4t_2^{-5}(2(1 + t_2^{-4}))^{-1/2}}{-1 - t_2^{-2}} - \frac{(-t_2^{-2} + 1 + (2(1 + t_2^{-4}))^{1/2}) 2t_2^{-3}}{(-1 - t_2^{-2})^2} \right) = -1. \quad (4.4)$$

Из (4.3), (4.4) и равенства $(t_2 - x_0)' = 1$ следует справедливость (4.1).

Наличие у краевого множества задачи управления по быстрдействию псевдовершины позволяет сформировать с помощью системы уравнений, сопряженной к системе (2.1), сингулярное множество, а затем и функцию оптимального результата. Подробное описание технологии построения, например, в [6, 7]. На рис. 2 представлены линии уровня функции оптимального результата рассматриваемой задачи и сингулярная кривая, отвечающая псевдовершине

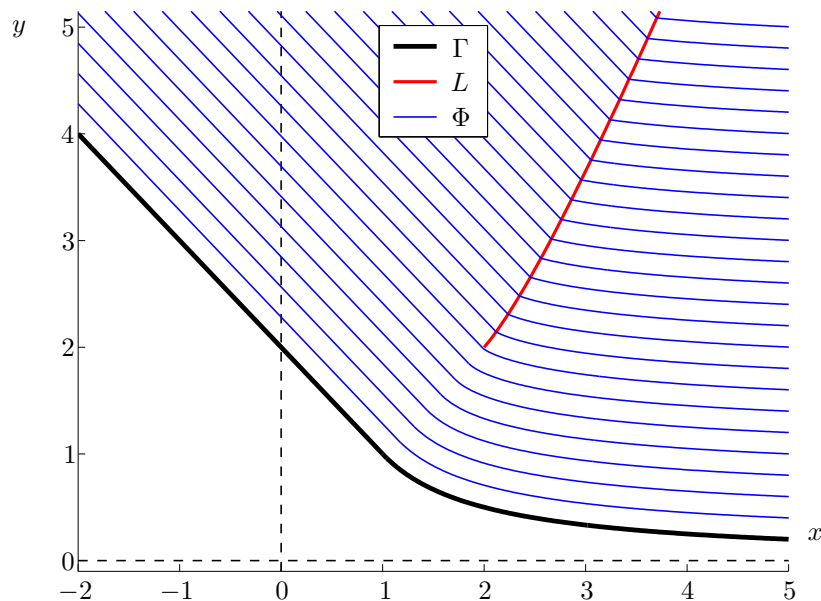


Рис. 2. Кривая Γ , сечения Φ множества управляемости и сингулярное множество L

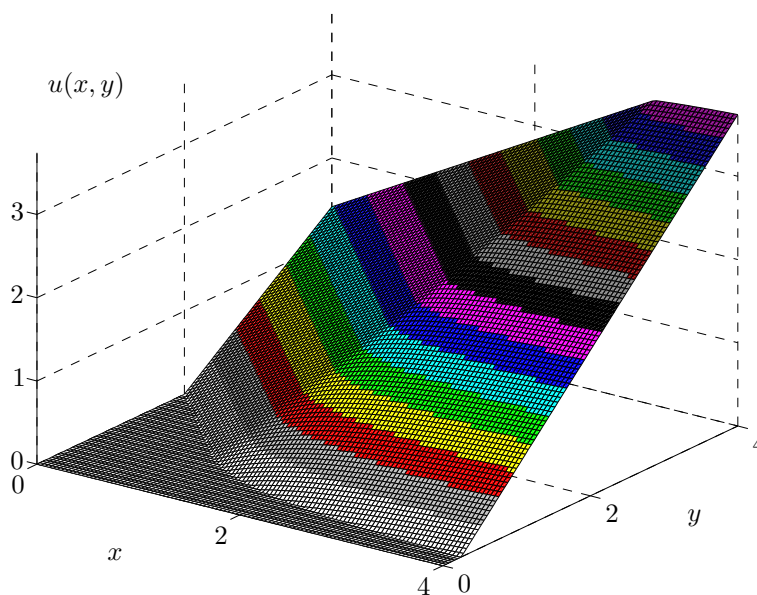


Рис. 3. График функции оптимального результата $u(x, y)$

$A = (x_0, f(x_0))$ целевого множества M . На рис. 3 показан график функции оптимального результата $u(x, y) = \rho((x, y), M)$ в задаче управления по быстродействию с динамикой (1.3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кружков С.Н. Обобщенные решения уравнений Гамильтона–Якоби типа эйконала. I. Постановка задач, теоремы существования, единственности и устойчивости, некоторые свойства решений // Математический сборник. 1975. Т. 98 (140). № 3 (11). С. 450–493.
2. Crandall M.G., Lions P.-L. Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Transactions of the American Mathematical Society. 1983. Vol. 277. No. 1. P. 1–42. DOI: [10.1090/S0002-9947-1983-0690039-8](https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1983-0690039-8)
3. Субботин А.И. Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 336 с.
4. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
5. Григорьева С.В., Пахотинских В.Ю., Успенский А.А., Ушаков В.Н. Конструирование решений в некоторых дифференциальных играх с фазовыми ограничениями // Математический сборник. 2005. Т. 196. № 4. С. 51–78. DOI: [10.4213/sm1284](https://doi.org/10.4213/sm1284)
6. Лебедев П.Д., Успенский А.А., Ушаков В.Н. Построение минимаксного решения уравнения типа эйконала // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14. № 2. С. 182–191.
7. Успенский А.А., Лебедев П.Д. Построение функции оптимального результата в задаче быстродействия на основе множества симметрии // Автоматика и телемеханика. 2009. № 7. С. 50–57.
8. Успенский А.А., Лебедев П.Д. О множестве предельных значений локальных диффеоморфизмов при эволюции волновых фронтов // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16. № 1. С. 171–185.
9. Успенский А.А. Формулы исчисления негладких особенностей функции оптимального результата в задаче быстродействия // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20. № 3. С. 276–290.
10. Успенский А.А., Лебедев П.Д. Построение сингулярных кривых для обобщенных решений уравнений типа эйконала в условиях разрыва кривизны границы краевого множества // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22. № 1. С. 282–293.
11. Успенский А.А. Необходимые условия существования псевдовершин краевого множества в задаче Дирихле для уравнения эйконала // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21. № 1. С. 250–263.
12. Арнольд В.И. Особенности каустик и волновых фронтов. М.: Фазис, 1996. 334 с.
13. Закалюкин В.М., Курбацкий А.Н. Особенности огибающих семейств плоскостей в теории управления // Труды Математического института имени В. А. Стеклова. 2008. Т. 262. С. 73–86.

14. Боровских А.В. Группы эквивалентности уравнений эйконала и классы эквивалентных уравнений // Вестник НГУ. 2006. № 4. С. 3–42.
15. Sethian J. A., Vladimirsky A. Fast methods for the eikonal and related Hamilton–Jacobi equations on unstructured meshes // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 2000. Vol. 97. № 11. P. 5699–5703.
DOI: [10.1073/pnas.090060097](https://doi.org/10.1073/pnas.090060097)
16. Успенский А.А., Ушаков В.Н., Фомин А.Н. α -множества и их свойства / Институт математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2004. 62 с. Деп. в ВИНИТИ 02.04.2004, № 543-В2004.
17. Ушаков В.Н., Успенский А.А. Альфа-множества в конечномерных евклидовых пространствах и их свойства // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26. Вып. 1. С. 95–120. DOI: [10.20537/vm160109](https://doi.org/10.20537/vm160109)
18. Брус Дж., Джиблин П. Кривые и особенности. М.: Мир, 1988. 262 с.
19. Успенский А.А. Производные в силу диффеоморфизмов и их приложения в теории управления и геометрической оптике // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21. № 2. С. 252–266.
20. Ohm M. Lehrbuch der gesamten höhern Mathematik. Bd 2. Leipzig: Verlag Friedrich Volckmar, 1835.

Поступила в редакцию 01.02.2018

Успенский Александр Александрович, д. ф.-м. н., зав. сектором, отдел динамических систем, Институт математики и механики УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.

E-mail: uspen@imm.uran.ru

Лебедев Павел Дмитриевич, к. ф.-м. н., старший научный сотрудник, отдел динамических систем, Институт математики и механики УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.

E-mail: pleb@yandex.ru

A. A. Uspenskii, P. D. Lebedev

Identification of the singularity of the generalized solution of the Dirichlet problem for an eikonal type equation under the conditions of minimal smoothness of a boundary set

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2018, vol. 28, issue 1, pp. 59–73 (in Russian).

Keywords: first-order partial differential equation, minimax solution, velocity, wave front, diffeomorphism, eikonal, optimal result function, singular set, symmetry, pseudo-vertex.

MSC2010: 35A18

DOI: [10.20537/vm180106](https://doi.org/10.20537/vm180106)

The subject of the study is pseudo-vertices of a boundary set, which are necessary for the analytical and numerical construction of singular branches of the generalized (minimax) solution of the Dirichlet problem for an eikonal type equation. The case of variable smoothness of the boundary set boundary is considered, under which the order of smoothness at the points of consideration is reduced to the lowest possible value — up to one. Necessary conditions for the existence of pseudo-vertices are obtained, expressed in terms of one-sided partial limits of differential relations, depending on the properties of local diffeomorphisms that determine these points. An example is given that illustrates the application of the results obtained while solving the velocity problem.

REFERENCES

1. Kruzhkov S.N. Generalized solutions of the Hamilton–Jacobi equations of eikonal type. I. Formulation of the problems; existence, uniqueness and stability theorems; some properties of the solutions, *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1975, vol. 27, no. 3, pp. 406–446. DOI: [10.1070/SM1975v027n03ABEH002522](https://doi.org/10.1070/SM1975v027n03ABEH002522)
2. Crandall M.G., Lions P.-L. Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations, *Transactions of the American Mathematical Society*, 1983, vol. 277, no. 1, pp. 1–42. DOI: [10.1090/S0002-9947-1983-0690039-8](https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1983-0690039-8)
3. Subbotin A.I. *Generalized solutions of first order PDEs: the dynamical optimization perspective*, Boston: Birkhäuser, 1995, XII+314 p. DOI: [10.1007/978-1-4612-0847-1](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0847-1)

4. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry* (Positional differential games), Moscow: Nauka, 1974, 456 p.
5. Grigor'eva S.V., Pakhotinskikh V.Yu., Uspenskii A.A., Ushakov V.N. Construction of solutions in certain differential games with phase constraints, *Sbornik: Mathematics*, 2005, vol. 196, no. 4, pp. 513–539. DOI: [10.1070/SM2005v196n04ABEH000890](https://doi.org/10.1070/SM2005v196n04ABEH000890)
6. Lebedev P.D., Uspenskii A.A., Ushakov V.N. Construction of a minimax solution for an eikonal-type equation, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2008, vol. 263, suppl. 2, pp. S191–S201. DOI: [10.1134/S0081543808060175](https://doi.org/10.1134/S0081543808060175)
7. Uspenskii A.A., Lebedev P.D. Construction of the optimal outcome function for a time-optimal problem on the basis of a symmetry set, *Automation and Remote Control*, 2009, vol. 70, no. 7, pp. 1132–1139. DOI: [10.1134/S0005117909070054](https://doi.org/10.1134/S0005117909070054)
8. Uspenskii A.A., Lebedev P.D. On the set of limit values of local diffeomorphisms in wavefront evolution, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2011, vol. 272, suppl. 1, pp. S255–S270. DOI: [10.1134/S0081543811020180](https://doi.org/10.1134/S0081543811020180)
9. Uspenskii A.A. Calculation formulas for nonsmooth singularities of the optimal result function in a time-optimal problem, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2015, vol. 291, suppl. 1, pp. S239–S254. DOI: [10.1134/S0081543815090163](https://doi.org/10.1134/S0081543815090163)
10. Uspenskii A.A., Lebedev P.D. The construction of singular curves for generalized solutions of eikonal-type equations with a curvature break in the boundary of the edge set, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2017, vol. 297, suppl. 1, pp. S191–S202. DOI: [10.1134/S0081543817050212](https://doi.org/10.1134/S0081543817050212)
11. Uspenskii A.A. Necessary conditions for the existence of pseudovertices of the boundary set in the Dirichlet problem for the eikonal equation, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2015, vol. 21, no. 1, pp. 250–263 (in Russian).
12. Arnold V.I. *Singularities of caustics and wave fronts*, Springer Netherlands, 1990, XIII+259 p. DOI: [10.1007/978-94-011-3330-2](https://doi.org/10.1007/978-94-011-3330-2)
13. Zakalyukin V.M., Kurbatskii A.N. Envelope singularities of families of planes in control theory, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2008, vol. 262, issue 1, pp. 66–79. DOI: [10.1134/S0081543808030073](https://doi.org/10.1134/S0081543808030073)
14. Borovskikh A.V. Equivalence groups of eikonal equation and classes of equivalent equations, *Vestnik Novosibirskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2006, no. 4, pp. 3–42 (in Russian).
15. Sethian J.A., Vladimirsky A. Fast methods for the Eikonal and related Hamilton–Jacobi equations on unstructured meshes, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 2000, vol. 97, no. 11, pp. 5699–5703. DOI: [10.1073/pnas.090060097](https://doi.org/10.1073/pnas.090060097)
16. Uspenskii A.A., Ushakov V.N., Fomin A.N. α -sets and their properties, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 2004, 62 p. Deposited in VINITI 02.04.2004, no. 543-B2004 (in Russian).
17. Ushakov V.N., Uspenskii A.A. α -sets in finite dimensional Euclidean spaces and their properties, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2016, vol. 26, issue 1, pp. 95–120. DOI: [10.20537/vm160109](https://doi.org/10.20537/vm160109)
18. Bruce J.W., Giblin P.J. *Curves and singularities*, Cambridge: Cambridge University Press, 1984, 222 p. Translated under the title *Krivye i osobennosti*, Moscow: Mir, 1988, 262 p.
19. Uspenskii A.A. Derivatives with respect to diffeomorphisms and their applications in control theory and geometrical optics, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2016, vol. 293, suppl. 1, pp. 238–253. DOI: [10.1134/S0081543816050217](https://doi.org/10.1134/S0081543816050217)
20. Ohm M. *Lehrbuch der gesamten höhern Mathematik. Bd. 2.*, Leipzig: Verlag Friedrich Volckmar, 1835.

Received 01.02.2018

Uspenskii Aleksandr Aleksandrovich, Doctor of Physics and Mathematics, Department of Dynamical Systems, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia.

E-mail: uspen@imm.uran.ru

Lebedev Pavel Dmitrievich, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Department of Dynamical Systems, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia.

E-mail: pleb@yandex.ru