ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ

МАТЕМАТИКА 2018. Т. 28. Вып. 1

УДК 517.935

© *Л. И. Родина*

ОПТИМИЗАЦИЯ СРЕДНЕЙ ВРЕМЕННОЙ ВЫГОДЫ ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТНОЙ МОДЕЛИ ПОПУЛЯЦИИ, ПОДВЕРЖЕННОЙ ПРОМЫСЛУ[1]

Рассматривается модель популяции, подверженной промыслу, в которой размеры промысловых заготовок являются случайными величинами. При отсутствии эксплуатации развитие популяции описывается логистическим уравнением $\dot{x} = (a - bx)x$, где коэффициенты a и b являются показателями роста популяции и внутривидовой конкуренции соответственно, а в моменты времени $\tau_k = kd$ из популяции извлекается некоторая случайная доля ресурса ω_k, $k = 1, 2, \ldots$. Предполагаем, что имеется возможность влиять на процесс сбора ресурса таким образом, чтобы остановить заготовку в том случае, когда ее доля окажется достаточно большой (больше некоторого значения $u_k \in (0, 1)$ в момент τ_k), чтобы сохранить возможно больший остаток ресурса для увеличения размера следующего сбора. Исследуется задача оптимального способа эксплуатации популяции $\bar{u} = (u_1, \ldots, u_k, \ldots)$, при котором добываемый ресурс постоянно восстанавливается и значение средней временной выгоды можно оценить снизу по возможности наибольшим числом. Показано, что при недостаточном ограничении доли добываемого ресурса значение средней временной выгоды может равняться нулю для всех или для почти всех значений случайных параметров. Рассматривается также следующая задача: пусть задано значение $u \in (0, 1)$, которым мы ограничиваем случайную долю ресурса ω_k, добываемого из популяции в моменты времени τ_k, $k = 1, 2, \ldots$. Требуется найти минимальное время между соседними изъятиями, необходимое для восстановление ресурса, чтобы можно было производить добычу до тех пор, пока доля извлеченного ресурса не достигнет значения u.

Ключевые слова: модель популяции, подверженной промыслу, средняя временная выгода, оптимальная эксплуатация.

DOI: 10.20537/vm180105

Введение

Исследуется одна из моделей популяционной динамики, заданная дифференциальным уравнением с импульсным воздействием, зависящим от случайных параметров. При отсутствии эксплуатации развитие популяции описывается логистическим уравнением $\dot{x} = (a - bx)x$, где коэффициенты $a > 0$ и $b > 0$ являются показателями роста популяции и внутривидовой конкуренции соответственно, а в моменты времени $\tau_k = kd$, где $d > 0$, из популяции извлекается некоторая случайная доля ресурса $\omega_k \in \Omega \subseteq [0, 1]$, $k = 1, 2, \ldots$. Предполагаем, что имеется возможность влиять на процесс сбора ресурса таким образом, чтобы остановить заготовку в том случае, когда ее доля окажется достаточно большой (больше некоторого значения $u_k \in [0, 1)$ в момент τ_k), чтобы сохранить возможно больший остаток ресурса для увеличения размера следующего сбора. В этом случае доля добываемого ресурса будет равна $\ell_k = \ell(\omega_k, u_k)$, где

$$\ell(\omega_k, u_k) = \begin{cases} \omega_k, & \text{если} \quad \omega_k < u_k, \\ u_k, & \text{если} \quad \omega_k \geqslant u_k, \end{cases} \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

Таким образом, мы рассматриваем эксплуатируемую популяцию, динамика которой задана дифференциальным уравнением с импульсным воздействием:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (a - bx)x, \quad t \neq kd, \\ \Delta x\big|_{t=kd} &= -\ell(\omega_k, u_k)x, \quad k = 1, 2, \ldots, \end{aligned} \tag{0.1}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16–01–00346-а).

где $(x,\omega_k,u_k)\in[0,+\infty)\times\Omega\times[0,1]$, $\Delta x\big|_{t=kd}=x(kd)-x(kd-0)$; предполагаем, что решения уравнения непрерывны справа. В частном случае, если все $u_k=1$, $\ell(\omega_k,1)=\omega_k$, то есть заготовку ресурса в моменты $\tau_k=kd$ не останавливают.

Рассмотрим множество последовательностей $\Sigma\doteq\{\sigma:\sigma=(\omega_1,\dots,\omega_k,\dots)\}$, где $\omega_k\in\Omega$. Обозначим $U\doteq\{\bar u:\bar u=(u_1,\dots,u_k,\dots)\}$, где $u_k\in[0,1]$,

$$L(\sigma,\bar u)\doteq(\ell_1,\dots,\ell_k,\dots)=\big(\ell(\omega_1,u_1),\dots,\ell(\omega_k,u_k),\dots\big),$$

$X_k=X_k(\ell_1,\dots,\ell_{k-1},x_0)$ — количество ресурса до сбора в момент kd, $k=1,2,\dots$, зависящее от долей ресурса $\ell_i=\ell(\omega_i,u_i)$, $i=1,\dots,k-1$, собранного в предыдущие моменты времени и начального значения x_0. Для любого $x_0\geqslant 0$ введем в рассмотрение функцию

$$H_*\big(L(\sigma,\bar u),x_0\big)\doteq\varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\big(\ell_1,\dots,\ell_{k-1},x_0\big)\ell_k, \tag{0.2}$$

которую назовем *средней временной выгодой* от извлечения ресурса. Если предел (0.2) существует, то среднюю временную выгоду будем обозначать как

$$H\big(L(\sigma,\bar u),x_0\big)\doteq\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k(\ell_1,\dots,\ell_{k-1},x_0)\ell_k.$$

В данной работе мы исследуем задачу выбора управления $\bar u=(u_1,\dots,u_k,\dots)\in U$, ограничивающего долю добываемого ресурса в каждый момент времени kd, при котором значение функции $H_*\big(L(\sigma,\bar u),x_0\big)$ можно оценить снизу с вероятностью единица по возможности наибольшим числом. Заметим, что при недостаточном ограничении на извлечение ресурса значение средней временной выгоды (0.2) может равняться нулю для всех или для почти всех значений $\sigma\in\Sigma$; в последнем разделе приведены условия, при которых выполнено данное равенство. Рассматривается также следующая задача: требуется найти минимальное время между соседними изъятиями, необходимое на возобновление ресурса, чтобы можно было производить добычу до тех пор, пока доля извлеченного ресурса не достигнет заданного значения $u\in(0,1)$.

Отметим, что для детерминированного случая, когда величины импульсного воздействия фиксированы, подобные (и более сложные) задачи исследуются в [1–4], вероятностные модели описаны в [5–7]. Одной из первых работ, посвященной оптимальному сбору ресурса в вероятностных моделях, является, по-видимому, [8], в которой показано, что стохастическую рыбную популяцию можно эксплуатировать до достижения определенного уровня (escapement level), не зависящего от текущего размера популяции. Сравнение различных характеристик для вероятностной и детерминированной моделей проводится в [8, 9]; вопросы оптимальной эксплуатации популяций, заданных различными вероятностными моделями, также рассматриваются в [10–12] (более подробный обзор литературы приведен в [9]).

§ 1. Оптимизация средней временной выгоды для детерминированной модели популяции, подверженной промыслу

Для последующего сравнения с вероятностной моделью (0.1) исследуем детерминированную модель популяции, подверженной промыслу, в которой в моменты времени $\tau_k=kd$ из популяции изымается некоторая доля ресурса u_k:

$$\begin{aligned}\dot x&=(a-bx)x,\quad t\neq kd,\\ \Delta x\big|_{t=kd}&=-u_kx,\quad k=1,2,\dots.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Рассмотрим задачу: как нужно регулировать доли заготовок $u=(u_1,u_2,\dots)$, чтобы величина ресурса, извлеченного за конечное число сборов, или средняя временная выгода за бесконечное число сборов

$$H(\bar u,x_0)\doteq\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\big(u_1,\dots,u_{k-1},x_0\big)u_k$$

были максимальными? Здесь x_0 — начальное количество ресурса, $X_k = X_k\big(u_1, \ldots, u_{k-1}, x_0\big)$ — количество ресурса до сбора в момент kd, $k = 1, 2, \ldots$.

Далее будет показано, что выбор управления для вероятностной модели (0.1) основан на принципе построения последовательности $\bar{u}^* = u^*(x_0) = (u_1^*, u_2^*, \ldots)$ в модели (1.1).

1.1. Оптимизация величины ресурса, извлеченного за конечное число сборов

Предположим, что можно производить заготовки в моменты времени kd, $k = 1, 2, \ldots, m$, где $m \geqslant 2$, $d > 0$. Найдем $u_1, \ldots, u_m$, при которых количество ресурса за m изъятий

$$h(u_1, \ldots, u_m, x_0) \doteq \sum_{k=1}^{m} X_k\big(u_1, \ldots, u_{k-1}, x_0\big) u_k$$

при фиксированном $x_0 > 0$ является максимальным. Отметим, что $h(u_1, \ldots, u_m, 0) = 0$ при любых $(u_1, \ldots, u_m) \in [0, 1]^m$. Обозначим через $x_k = x_k\big(u_1, \ldots, u_k, x_0\big)$ количество ресурса после сбора в момент kd, $k = 1, 2, \ldots, m$, тогда $x_k = X_k(1 - u_k)$. Решая уравнение $\dot{x} = (a - bx)x$, находим, что

$$X_{k+1} = \frac{ae^T x_k}{bx_k(e^T - 1) + a}, \text{ где } T = ad, \ k = 0, 1, \ldots. \tag{1.2}$$

Следовательно,

$$X_{k+1} = \frac{ae^T X_k(1 - u_k)}{bX_k(1 - u_k)(e^T - 1) + a}, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{1.3}$$

Найдем $(u_1^*, \ldots, u_m^*) \in [0, 1]^m$, при которых достигается максимальное значение функции $(u_1, \ldots, u_m) \mapsto h(u_1, \ldots, u_m, x_0)$. Поскольку $h'_{u_m} = X_m \geqslant 0$, то $u_m^* = 1$. Далее,

$$h'_{u_{m-1}} = X_{m-1} + (X_m)'_{u_{m-1}}.$$

Из (1.3) получаем, что уравнение $h'_{u_{m-1}} = 0$ имеет вид

$$X_{m-1} + \Big(\frac{ae^T X_{m-1}(1 - u_{m-1})}{bX_{m-1}(1 - u_{m-1})(e^T - 1) + a}\Big)'_{u_{m-1}} = 0.$$

Так как $X_{m-1} > 0$ при $x_0 > 0$, то $\dfrac{a^2 e^T}{\big(bX_{m-1}(1 - u_{m-1})(e^T - 1) + a\big)^2} = 1$, тогда

$$u_{m-1}^* = \max\Big\{1 - \frac{a}{b(e^{T/2} + 1)X_{m-1}(u_1^*, \ldots, u_{m-2}^*, x_0)}, 0\Big\}.$$

Аналогично $u_k^* = \max\Big\{1 - \dfrac{a}{b(e^{T/2} + 1)X_k(u_1^*, \ldots, u_{k-1}^*, x_0)}, 0\Big\}$ для любого $k = 1, \ldots, m - 1$.

Покажем, что если $u_k^* > 0$, то $u_{k+1}^* > 0$. Действительно, если $u_k^* > 0$, то из (1.3) следует, что

$$X_{k+1}(u_1^*, \ldots, u_k^*, x_0) = \frac{ae^{T/2}}{b(e^{T/2} + 1)},$$

тогда $u_{k+1}^* = 1 - e^{-T/2} > 0$. Таким образом, найдется $k_0 \in \{1, \ldots, m\}$ такое, что $u_k^* > 0$ для всех $k = k_0, \ldots, m$ и $u_k^* = 0$ для всех $k = 1, \ldots, k_0 - 1$. Тогда

$$X_{k_0} = X_{k_0}(u_1^*, \ldots, u_{k_0-1}^*, x_0) = \frac{ax_0 e^{k_0 T}}{bx_0(e^{k_0 T} - 1) + a}, \quad u_{k_0}^* = 1 - \frac{a}{b\,(e^{T/2} + 1)X_{k_0}}. \tag{1.4}$$

Далее,

$$X_k = \frac{ae^{T/2}}{b\,(e^{T/2} + 1)} \quad \text{для всех} \quad k = k_0 + 1, \ldots, m$$

и $u_k^* = 1 - e^{-T/2}$ для всех $k = k_0 + 1, \ldots, m-1$. Напомним, что $u_m^* = 1$. Таким образом,

$$h(u_1^*, \ldots, u_m^*, x_0) = X_{k_0} + (m - k_0)\frac{a(e^{T/2} - 1)}{b\,(e^{T/2} + 1)} \tag{1.5}$$

для любого $k_0 = 1, \ldots, m$.

1.2. Оптимизация средней временной выгоды

Пусть $k_0 = k_0(x_0)$ — наименьшее натуральное число, такое, что $u_{k_0}^* > 0$. Тогда максимальная средняя временная выгода равна

$$H(\bar{u}^*, x_0) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}h\bigl(u_1^*, \ldots, u_n^*, x_0\bigr),$$

где $u_k^* = 0$ для всех $k = 1, \ldots, k_0 - 1$, $u_{k_0}^*$ удовлетворяет (1.4) и $u_k^* = 1 - e^{-T/2}$ для всех $k > k_0$. Из (1.5) получаем, что предел $H(\bar{u}^*, x_0)$ существует, не зависит от x_0 (если $x_0 > 0$) и

$$H(\bar{u}^*, x_0) = \frac{a(e^{T/2} - 1)}{b\,(e^{T/2} + 1)}. \tag{1.6}$$

§ 2. Оптимизация средней временной выгоды для вероятностной модели динамики популяции

Вернемся к рассмотрению вероятностной модели (0.1). Предполагаем, что задано вероятностное пространство $(\Omega, \widetilde{\mathfrak{A}}, \widetilde{\mu})$, где $\widetilde{\mathfrak{A}}$ — сигма-алгебра подмножеств $\Omega = [0,1]$, на которой определена вероятностная мера $\widetilde{\mu}$. Обозначим через $\mathfrak{A}$ наименьшую сигма-алгебру, порожденную цилиндрическими множествами

$$D_k \doteq \{\sigma \in \Sigma : \omega_1 \in A_1, \ldots, \omega_k \in A_k\}, \quad \text{где} \quad A_i \in \widetilde{\mathfrak{A}},\ i = 1, 2, \ldots, k,$$

и определим меру $\widetilde{\mu}(D_k) = \widetilde{\mu}(A_1) \cdot \ldots \cdot \widetilde{\mu}(A_k)$. Тогда в силу теоремы А. Н. Колмогорова (см., например, [13, с. 176]) на измеримом пространстве $(\Sigma, \mathfrak{A})$ существует единственная вероятностная мера μ, которая является продолжением меры $\widetilde{\mu}$ на сигма-алгебру $\mathfrak{A}$.

Предполагаем, что вероятностная мера $\widetilde{\mu}\bigl((\alpha,\beta]\bigr) = F(\beta) - F(\alpha)$ определена с помощью функции распределения F и $F(0) < 1$. Для любого $u \in [0,1]$ введем случайную величину

$$\ell(\omega, u) = \begin{cases} \omega, & \text{если} \quad \omega < u, \\ u, & \text{если} \quad \omega \geqslant u, \end{cases}$$

и обозначим через $M\ell(\omega, u)$ ее математическое ожидание. Если $u \in [0, 1 - e^{-T})$, то определим

$$X(u) \doteq \frac{ae^T(1-u) - a}{b(e^T - 1)(1-u)}, \quad x(u) \doteq X(u)(1-u) = \frac{ae^T(1-u) - a}{b(e^T - 1)}. \tag{2.1}$$

Теорема 1. *Если $F(0) < 1$, то для любых $u \in (0, 1 - e^{-T})$ и $x_0 > 0$ существует управление $\bar{u} \in U$ такое, что для почти всех $\sigma \in \Sigma$ выполнены неравенства*

$$X(u)M\ell(\omega, u) \leqslant H_*\bigl(L(\sigma, \bar{u}), x_0\bigr) \leqslant \frac{a}{b}M\ell(\omega, u). \tag{2.2}$$

Доказательство. Отметим, что $0 < x(u) \leqslant X(u) < a/b$ и $X(u)$ является положительной неподвижной точкой уравнения (1.3), если $u_k = u$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Рассмотрим три случая.

1. Если $x_0 \in [x(u), a/b]$, то будем полагать $u_k = u$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Несложно проверить, что

$$X_1 = \frac{ax_0e^T}{bx_0(e^T - 1) + a} \geqslant X(u),$$

поэтому, так как $\ell(\omega_1, u) \leqslant u$,

$$x_1 = X_1(1 - \ell(\omega_1, u)) \geqslant X(u)(1 - \ell(\omega_1, u)) \geqslant X(u)(1 - u) = x(u).$$

Аналогично получаем, что $X_k \geqslant X(u)$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Таким образом, если $\bar{u} = (u, u, \ldots)$, то

$$H_*\big(L(\sigma, \bar{u}), x_0\big) \geqslant X(u) \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ell(\omega_k, u). \tag{2.3}$$

2. Пусть $x_0 \in (0, x(u))$. Положим $u_k = 0$ для всех $k = 1, \ldots, k_0$, где $k_0 = k_0(x_0)$ — первое из натуральных чисел, таких, что

$$x_k = \frac{a x_0 e^{kT}}{b x_0 (e^{kT} - 1) + a} \geqslant x(u).$$

Данное значение k_0 существует, так как последнее неравенство выполнено при всех $k \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих

$$k \geqslant \frac{1}{T} \ln \frac{x(u)(a - b x_0)}{x_0 (a - b x(u))}.$$

Пусть $u_k = u$ для всех $k > k_0$, тогда $X_k \geqslant X(u)$ при $k > k_0$. Следовательно, если $u_k = 0$ для всех $k = 1, \ldots, k_0$ и $u_k = u$ при $k > k_0$, то справедливо неравенство (2.3).

Отметим, что случайные величины $\ell(\omega_k, u)$ независимы, одинаково распределены, и так как $0 \leqslant \ell(\omega_k, u) \leqslant u$ для всех $k \in \mathbb{N}$, то

$$M|\ell(\omega_k, u)| = M\ell(\omega_k, u) \leqslant u < \infty.$$

Тогда из усиленного закона больших чисел Колмогорова следует, что для почти всех $\sigma \in \Sigma$ имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ell(\omega_k, u) = M\ell(\omega, u),$$

поэтому из (2.3) получаем первое неравенство в (2.2).

Далее, если $x_0 \leqslant a/b$, то $X_k \leqslant a/b$ для всех $k \in \mathbb{N}$, поэтому

$$H_*\big(L(\sigma, \bar{u}), x_0\big) \leqslant \frac{a}{b} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ell(\omega_k, u) = \frac{a}{b} M\ell(\omega, u)$$

для почти всех $\sigma \in \Sigma$, то есть выполнено последнее неравенство в (2.2).

3. Покажем, что утверждение теоремы справедливо при $x_0 > a/b$. Пусть $k_1 = k_1(x_0)$ — наименьшее из натуральных чисел, таких, что $x_k \leqslant a/b$ при $u_1 = \ldots = u_k = 1$; покажем, что данное число существует с вероятностью единица. Отметим сначала, что такое число существует, если $\omega_{k_1} = 1$ при некотором $k_1 \in \mathbb{N}$; тогда $x_k = 0$ при всех $k \geqslant k_1$.

Пусть теперь $\omega_k \neq 1$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Из равенства (1.2) следует, что если $x_k > a/b$ при некотором $k = 0, 1, \ldots$, то $X_{k+1} < x_k$. Далее, если $u_k = 1$, то $\ell(\omega_k, 1) = \omega_k$; поэтому если $x_0 > a/b$ и $u_1 = 1$, то $x_1 = X_1(1 - \omega_1) < x_0(1 - \omega_1)$; если $x_1 > a/b$ и $u_1 = u_2 = 1$, то

$$x_2 = X_2(1 - \omega_2) < x_1(1 - \omega_2) < x_0(1 - \omega_1)(1 - \omega_2).$$

Аналогично получаем, что если $x_k > a/b$ и $u_1 = \ldots = u_{k+1} = 1$, то

$$x_{k+1} < x_0(1 - \omega_1)(1 - \omega_2) \cdot \ldots \cdot (1 - \omega_{k+1}).$$

Рассмотрим последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $\{C_k(\sigma)\}_{k=1}^{\infty}$, где $C_k(\sigma) = C_k(\omega_k) = 1 - \omega_k$. Введем также последовательность $\{S_k(\sigma)\}_{k=1}^{\infty}$, где

$$S_k(\sigma) = \ln(1 - \omega_1) + \ldots + \ln(1 - \omega_k),$$

которая является случайным блужданием на прямой. Покажем, что если $F(0) < 1$, то

$$M\ln(1-\omega_k) < 0. \tag{2.4}$$

Действительно, так как $\omega_k \in [0,1)$, то $\ln(1-\omega_k) \leqslant 0$, поэтому для математического ожидания либо выполнено неравенство (2.4), либо $M\ln(1-\omega_k) = 0$. В последнем случае $\omega_k = 0$ с вероятностью единица [13, гл. 2, § 6], что противоречит условию $F(0) = \widetilde{\mu}(\omega_k = 0) < 1$. Из (2.4) следует, что с вероятностью единица $S_k(\sigma)$ уходит в минус бесконечность (см. [14, гл. 12, § 2]). Это означает, что существует множество $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ такое, что $\mu(\Sigma_0) = 1$ и $\lim\limits_{k\to\infty} S_k(\sigma) = -\infty$ для всех $\sigma \in \Sigma_0$. Следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty} C_1(\omega_1)\cdot\ldots\cdot C_k(\omega_k) = 0$ для всех $\sigma \in \Sigma_0$, поэтому с вероятностью единица найдется $k_1 = k_1(x_0)$ такое, что $x_{k_1} \in [0, a/b]$.

Если $x_{k_1} \in [x(u), a/b]$, выберем управление $u_k = 1$ для всех $k = 1,\ldots,k_1$, $u_k = u$ для всех $k > k_1$. Если $x_{k_1} \in [0, x(u))$, то определим $u_k = 1$ для всех $k = 1,\ldots,k_1-1$, $u_{k_1} = 1-\dfrac{x(u)}{X_{k_1}}$, $u_k = u$ для всех $k > k_1$; тогда $x_k = x(u)$ для всех $k \geqslant k_1$. Также, как в двух первых пунктах, здесь можно показать, что при данных управлениях неравенства (2.2) выполнены с вероятностью единица. □

При доказательстве теоремы 1 построено одно из управлений $\bar{u} \in U$, для которого неравенства (2.2) выполнены при почти всех $\sigma \in \Sigma$. Обозначим через U_0 множество всех управлений $\bar{u} \in U$, удовлетворяющих (2.2) при некотором $u \in (0, 1-e^{-T})$, и выберем из U_0 управление $\bar{u}^*$, при котором среднюю временную выгоду $H_*\big(L(\sigma,\bar{u}), x_0\big)$ можно оценить снизу по возможности наибольшим числом. Одно из таких управлений $\bar{u}^* \in U_0$ приведено в следствии 1, оно строится по тому же принципу, что и управление $\bar{u}$ в теореме 1.

Следствие 1. *Пусть $X(u)M\ell(\omega,u)$ достигает максимального значения при $u = u^*$. Управление $\bar{u}^* = (u_1^*, u_2^*, \ldots) \in U_0$, при котором для почти всех $\sigma \in \Sigma$ выполнены неравенства*

$$X(u^*)M\ell(\omega,u^*) \leqslant H_*\big(L(\sigma,\bar{u}^*), x_0\big) \leqslant \frac{a}{b}M\ell(\omega,u^*),$$

можно определить следующим образом:

1) *если $x_0 \in [x(u^*), a/b]$, то $u_k^* = u^*$ для всех $k \in \mathbb{N}$;*

2) *если $x_0 \in (0, x(u^*))$, то $u_k^* = 0$ для всех $k = 1,\ldots,k_0$, где $k_0 = k_0(x_0)$ — первое из натуральных чисел, таких, что $x_k \geqslant x(u^*)$, $u_k^* = u^*$ для всех $k > k_0$;*

3) *пусть $x_0 > a/b$ и $k_1 = k_1(x_0)$ — первое из натуральных чисел, таких, что $x_k \leqslant a/b$ при $u_1 = \ldots = u_k = 1$, тогда:*

а) *если $x_{k_1} \in [x(u^*), a/b]$, то $u_k^* = 1$ для всех $k = 1,\ldots,k_1$, $u_k^* = u^*$ для всех $k > k_1$;*

б) *если $x_{k_1} \in [0, x(u^*))$, то $u_k^* = 1$ для всех $k = 1,\ldots,k_1-1$, $u_{k_1}^* = 1 - \dfrac{x(u^*)}{X_{k_1}}$, $u_k^* = u^*$ для всех $k > k_1$.*

Предложение 1. *Пусть $X(u)$ задано равенством (2.1), F — функция абсолютно непрерывного распределения с плотностью f. Тогда произведение $X(u)M\ell(\omega,u)$ достигает максимального значения при $u = u^*$, где $u^* \in \big(0, 1-e^{-T}\big)$ является единственным решением уравнения*

$$\big(1-F(u)\big)\big(e^T(1-u)^2-1\big) = \int_0^u tf(t)dt. \tag{2.5}$$

Доказательство. Если функция F абсолютно непрерывная и $F(u) \neq 1$, то случайная величина $\ell(\omega,u)$ имеет смешанное распределение. Найдем ее математическое ожидание:

$$M\ell(\omega,u) = \int_0^u tf(t)dt + u\cdot\widetilde{\mu}\big(\omega : \omega \geqslant u\big) = \int_0^u tf(t)dt + u\big(1-F(u)\big). \tag{2.6}$$

Если $F(u) = 1$, то случайная величина $\ell(\omega, u)$ абсолютно непрерывная и ее математическое ожидание также находится из (2.6). Несложно показать, что производная функции

$$G(u) \doteq X(u)M\ell(\omega, u) = \frac{ae^T(1-u) - a}{b(e^T-1)(1-u)}\Big(\int_0^u tf(t)dt + u\big(1 - F(u)\big)\Big)$$

обращается в нуль, если u^* удовлетворяет (2.5). Кроме того, $G'(u) > 0$ при $u < u^*$ и $G'(u) < 0$ при $u > u^*$. Уравнение (2.5) имеет единственное решение $u^* \in \big(0, 1 - e^{-T}\big)$, так как функция

$$D(u) \doteq \big(1 - F(u)\big)\big(e^T(1-u)^2 - 1\big) - \int_0^u tf(t)dt$$

убывает на интервале $(0, 1 - e^{-T})$ и на концах интервала удовлетворяет неравенствам $D(0) > 0$, $D(1 - e^{-T}) < 0$. □

§ 3. Сравнение характеристик оптимальной эксплуатации популяции для вероятностной и детерминированной моделей

Рассмотрим следующую задачу. Предположим, что доля ресурса ω_k, добываемого из популяции в моменты времени $\tau_k = kd$, $k = 1, 2, \ldots$, имеет распределение F, и задано значение $u \in (0, 1)$, которым мы ограничиваем величины ω_k, чтобы получить наибольшую среднюю временную выгоду. Требуется найти минимальное время $d_{\min}(u, F)$ между соседними изъятиями, при котором можно производить добычу до тех пор, пока доля полученного ресурса не достигнет значения u и средняя временная выгода $H_*\big(L(\sigma, \bar{u}^*), x_0\big)$ с вероятностью единица будет не менее чем $X(u)M\ell(\omega, u)$. Обозначим через $d_{\min}(u)$ наименьшее время между соседними изъятиями, необходимое для восстановления ресурса в детерминированной модели (1.1), при котором можно добывать долю ресурса, равную значению $u \in (0, 1)$. Из результатов первого раздела следует, что $u = 1 - e^{-ad_{\min}(u)/2}$, поэтому $d_{\min}(u) = -\dfrac{2}{a}\ln(1-u)$.

Предложение 2. *Пусть F является функцией абсолютно непрерывного распределения с плотностью f, тогда:*

1) *для любых $(u, x_0) \in (0, 1) \times (0, \infty)$ существует управление $\bar{u}^* \in U_0$, при котором с вероятностью единица выполнено неравенство* (2.2) *и минимальное время между соседними изъятиями равно*

$$d_{\min}(u, F) = \frac{1}{a}\ln\Big(\int_0^u tf(t)dt + 1 - F(u)\Big) - \frac{1}{a}\ln\big((1 - F(u))(1-u)^2\big)\,; \tag{3.1}$$

2) *для любого $u \in (0, 1)$ выполнено неравенство $d_{\min}(u, F) \geqslant d_{\min}(u)$;*

3) *если $\displaystyle\int_0^u tf(t)dt = 0$, то $d_{\min}(u, F) = d_{\min}(u)$.*

Доказательство первого утверждения получаем из равенства (2.5) с учетом того, что $T = ad_{\min}(u, F)$. Управление $\bar{u}^* \in U_0$ приведено в следствии 1. Второе и третье утверждения следуют из (3.1) (после несложных вычислений). □

Пусть $x_{\min}(u)$ — минимальный уровень ресурса, который должен остаться после каждого извлечения при оптимальной эксплуатации детерминированной популяции (1.1) при условии, что доля ресурса, добываемого в любой момент времени $kd_{\min}(u)$, равна $u \in (0, 1)$. Обозначим через $x_{\min}(u, F)$ такую же характеристику для вероятностной модели (0.1), где доли добываемого ресурса ω_k имеют распределение F и промежуток времени между соседними извлечениями равен $d_{\min}(u, F)$. Найдем $x_{\min}(u) = \dfrac{a}{b(e^{T/2}+1)}$, где $T = ad_{\min}(u)$, тогда $x_{\min}(u) = \dfrac{a(1-u)}{b(2-u)}$. Далее, из (2.1) следует, что

$$x_{\min}(u, F) = \frac{a(e^T(1-u) - 1)}{b(e^T - 1)}, \quad \text{где} \quad T = ad_{\min}(u, F).$$

Отсюда, учитывая (3.1), получаем следующее утверждение.

Предложение 3. *Пусть F является функцией абсолютно непрерывного распределения с плотностью f, тогда:*

1) *для любого $u \in (0,1)$ выполнено неравенство $x_{\min}(u,F) \geqslant x_{\min}(u)$;*
2) *если $\int_0^u tf(t)dt = 0$, то $x_{\min}(u,F) = x_{\min}(u)$.*

Пример 1. Предположим, что в каждый момент времени $\tau_k = kd$ (где k больше некоторого значения $k_0 = k_0(x_0)$) можно производить добычу до тех пор, пока доля извлеченного ресурса не достигнет значения $u = 0,8$. Найдем минимальное время, необходимое на восстановление ресурса, минимальный остаточный уровень и оценим среднюю временную выгоду, полученную при оптимальном способе добычи $\bar{u}^* \in U_0$. Рассмотрим детерминированный случай и случай, когда доля добываемого ресурса имеет равномерное распределение на отрезке $[0,1]$.

В детерминированном случае управление $\bar{u}^* \in U$ строится таким образом, чтобы $u_k^* = 0,8$ для всех $k > k_0$, поэтому $d_{\min}(0,8) = \dfrac{1}{a}\ln 25$, $T = \ln 25$. Из (1.6) следует, что

$$H(\bar{u}^*, x_0) = \frac{a(e^{T/2}-1)}{b\,(e^{T/2}+1)} = \frac{2a}{3b},$$

остаточный уровень ресурса равен $x_{\min}(0,8) = \dfrac{a}{6b}$.

Пусть F является функцией равномерного распределения на отрезке $[0,1]$. Из (3.1) получаем, что $d_{\min}(0,8,F) = \dfrac{1}{a}\ln 65$. Найдем $X(0,8) = 0,9375\dfrac{a}{b}$, $M\ell(\omega;0,8) = 0,48$, поэтому в силу теоремы 1 с вероятностью единица справедливы следующие оценки:

$$\frac{0,45\,a}{b} \leqslant H_*\big(L(\sigma,\bar{u}^*), x_0\big) \leqslant \frac{0,48\,a}{b}.$$

Управление $\bar{u}^* \in U$, при котором для почти всех $\sigma \in \Sigma$ выполнено последнее неравенство, можно построить как в следствии 1, полагая $u^* = 0,8$. Отметим также, что при данных условиях остаточный уровень ресурса равен $x_{\min}(0,8,F) = 0,1875\dfrac{a}{b}$.

§ 4. Условия, при которых средняя временная выгода равна нулю (условия вырождения популяции)

В этом параграфе показано, что если не ограничивать долю добываемого ресурса (или недостаточно ограничивать), то с течением времени популяция может исчезнуть и, следовательно, средняя временная выгода от эксплуатации будет равна нулю. Полученный результат справедлив для всех уравнений вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= g(x), \quad t \neq kd, \\ \Delta x\big|_{t=kd} &= -\ell(\omega_k, u_k)x, \quad k = 1,2,\ldots, \end{aligned} \tag{4.1}$$

где функция $g(x)$ определена и непрерывно дифференцируема для всех $x \in [0,+\infty)$. Обозначим через $\varphi(t,x_0)$ решение уравнения $\dot{x} = g(x)$, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0,x_0) = x_0$. Введем в рассмотрение функцию

$$R(\omega,u,x) \doteq \varphi(d,x)(1-\ell(\omega,u)).$$

Отметим, что если для любого $x \in [0,+\infty)$ решение $\varphi(t,x)$ продолжаемо на полуось $[0,+\infty)$, то для каждого $(\omega,u) \in \Omega \times [0,1]$ функция $x \mapsto R(\omega,u,x)$ определена и непрерывна вместе со своей производной $R'_x(\omega,u,x)$ для всех $x \in [0,+\infty)$; это следует из непрерывной дифференцируемости функции $x \mapsto \ell(\omega,u)x$ и теоремы о дифференцируемости решений уравнения $\dot{x} = g(x)$ по начальным условиям.

Уравнению (4.1) поставим в соответствие разностное уравнение

$$X_{k+1} = R(\omega_k, u_k, X_k), \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{4.2}$$

где $(\omega_k, u_k, X_k) \in \Omega \times [0,1] \times [0,+\infty)$. Напомним, что *положением равновесия* (неподвижной точкой) уравнения (4.2) называется точка $x_* \in [0,+\infty)$ такая, что $R(\omega, u, x_*) = x_*$ для всех $(\omega, u) \in \Omega \times [0,1]$. Следующее утверждение является следствием теорем 1 и 2 работы [6], здесь получены условия, при которых средняя временная выгода $H\bigl(L(\sigma,\bar{u}), x_0\bigr)$ для уравнения (4.1) равна нулю для всех $\sigma \in \Sigma$ или с вероятностью единица.

Теорема 2. *Пусть точка $x_* = 0$ является положением равновесия уравнения* (4.2), $\bar{u} = (u_1, \ldots, u_k, \ldots)$, *где $u_k \geqslant u$ для всех $k = 1, 2, \ldots$.*

1. *Если $\overline{\lim\limits_{x\to 0}} \sup\limits_{\omega\in\Omega} |R'_x(\omega,u,x)| < 1$, то $H\bigl(L(\sigma,\bar{u}), x_0\bigr) = 0$ для всех $\sigma \in \Sigma$, $x_0 \in [0,+\infty)$.*

2. *Если найдется $\delta > 0$ такое, что $M\Bigl(\ln \sup\limits_{x\in[0,\delta)} |R'_x(\omega,u,x)|\Bigr) < 0$, то $H\bigl(L(\sigma,\bar{u}), x_0\bigr) = 0$ для любого $x_0 \in [0,+\infty)$ с вероятностью единица.*

Следствие 2. *Пусть $H\bigl(L(\sigma,\bar{u}), x_0\bigr)$ — средняя временная выгода для уравнения* (0.1), $\bar{u} = (u_1, \ldots, u_k, \ldots)$, *где $u_k \geqslant u$ для всех $k = 1, 2, \ldots$. Тогда:*

1) *если $\Omega = [\alpha, \beta] \subset (0,1]$, $e^{ad}(1-\alpha) < 1$, $u \geqslant \alpha$, то $H\bigl(L(\sigma,\bar{u}), x_0\bigr) = 0$ для всех $\sigma \in \Sigma$ и $x_0 \in [0,+\infty)$;*

2) *если $M\ln(1-\ell(\omega,u)) + ad < 0$, то $H\bigl(L(\sigma,\bar{u}), x_0\bigr) = 0$ для любого $x_0 \in [0,+\infty)$ с вероятностью единица.*

Доказательство. Выпишем функцию $R(\omega,u,x)$ для уравнения (0.1):

$$R(\omega,u,x) = \frac{ae^T x(1-\ell(\omega,u))}{bx(1-\ell(\omega,u))(e^T-1)+a},$$

тогда $\overline{\lim\limits_{x\to 0}} \sup\limits_{\omega\in\Omega} |R'_x(\omega,u,x)| = e^{ad}(1-\alpha)$, поэтому если $e^{ad}(1-\alpha) < 1$ и $u \geqslant \alpha$, то $H\bigl(L(\sigma,\bar{u}), x_0\bigr) = 0$ для всех $\sigma \in \Sigma$ и $x_0 \in [0,+\infty)$ в силу теоремы 2. Далее, так как

$$M\Bigl(\ln \sup_{x\geqslant 0} \bigl|R'_x(\omega,u,x)\bigr|\Bigr) = M\ln\bigl(e^{ad}(1-\ell(\omega,u))\bigr) = ad + M\ln(1-\ell(\omega,u)),$$

то второе утверждение также следует из теоремы 2. □

Замечание 1. Утверждения теоремы 2 и ее следствия останутся верными, если неравенство $u_k \geqslant u$ выполнено для всех $k > k_0(x_0)$, а $u_1, \ldots, u_{k_0}$ выбраны произвольным образом, число $k_0(x_0)$ также можно выбрать произвольно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bainov D.D. Population dynamics control in regard to minimizing the time necessary for the regeneration of a biomass taken away from the population // Applied Mathematics and Computation. 1990. Vol. 39. Issue 1. P. 37–48. DOI: 10.1016/0096-3003(90)90120-r
2. Дыхта В.А., Самсонюк О.Н. Оптимальное импульсное управление с приложениями. М.: Физматлит, 2000. 256 с.
3. Belyakov A.O., Davydov A.A., Veliov V.M. Optimal cyclic exploitation of renewable resources // Journal of Dynamical and Control Systems. 2015. Vol. 21. Issue 3. P. 475–494. DOI: 10.1007/s10883-015-9271-x
4. Беляков А.О., Давыдов А.А. Оптимизация эффективности циклического использования возобновляемого ресурса // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22. № 2. С. 38–46. DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-38-46
5. Родина Л.И. Об инвариантных множествах управляемых систем со случайными коэффициентами // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2014. Вып. 4. С. 109–121. DOI: 10.20537/vm140409

6. Родина Л.И., Тютеев И.И. Об асимптотических свойствах решений разностных уравнений со случайными параметрами // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Вып. 1. С. 79–86. DOI: 10.20537/vm160107
7. Родина Л.И. Об отталкивающих циклах и хаотических решениях разностных уравнений со случайными параметрами // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22. № 2. С. 227–235. DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-227-235
8. Reed W.J. Optimal escapement levels in stochastic and deterministic harvesting models // Journal of Environmental Economics and Management. 1979. Vol. 6. P. 350–363. DOI: 10.1016/0095-0696(79)90014-7
9. Kapaun U., Quaas M.F. Does the optimal size of a fish stock increase with environmental uncertainties? // Environmental and Resource Economics. 2013. Vol. 54. Issue 2. P. 293–310. DOI: 10.1007/s10640-012-9606-y
10. Clark C., Kirkwood G. On uncertain renewable resourse stocks: Optimal harvest policies and the value of stock surveys // Journal of Environmental Economics and Management. 1986. Vol. 13. Issue 3. P. 235–244. DOI: 10.1016/0095-0696(86)90024-0
11. Reed W.J., Clarke H.R. Harvest decisions and assert valuation for biological resources exhibiting size-dependent stochastic growth // International Economic Review. 1990. Vol. 31. P. 147–169. DOI: 10.2307/2526634
12. Weitzman M.L. Landing fees vs harvest quotas with uncertain fish stocks // Journal of Environmental Economics and Management. 2002. Vol. 43. P. 325–338. DOI: 10.1006/jeem.2000.1181
13. Ширяев А.Н. Вероятность. М.: Наука, 1989. 580 с.
14. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984. 738 с.

Поступила в редакцию 10.01.2018

Родина Людмила Ивановна, д. ф.-м. н., профессор, Владимирский государственный университет им. А. Г. и Н. Г. Столетовых, 600000, Россия, г. Владимир, ул. Горького, 87.
E-mail: LRodina67@mail.ru

L. I. Rodina

Optimization of average time profit for a probability model of the population subject to a craft

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2018, vol. 28, issue 1, pp. 48–58 (in Russian).

Keywords: model of the population subject to a craft, average time profit, optimal exploitation.

MSC2010: 34A60, 37N35, 49J15, 93B03

DOI: 10.20537/vm180105

We consider the model of population subject to a craft, in which sizes of the trade preparations are random variables. In the absence of operation the population development is described by the logistic equation $\dot{x} = (a - bx)x$, where coefficients a and b are indicators of growth of population and intraspecific competition respectively, and in time moments $\tau_k = kd$ some random share of a resource ω_k, $k = 1, 2, \ldots$, is taken from population. We assume that there is a possibility to exert influence on the process of resource gathering so that to stop preparation in the case when its share becomes big enough (more than some value $u_k \in (0, 1)$ in the moment τ_k) in order to keep the biggest possible rest of a resource and to increase the size of next gathering. We investigate the problem of an optimum way to control population $\bar{u} = (u_1, \ldots, u_k, \ldots)$ at which the extracted resource is constantly renewed and the value of average time profit can be lower estimated by the greatest number whenever possible. It is shown that at insufficient restriction of a share of the extracted resource the value of average time profit can be equaled to zero for all or almost all values of random parameters. We also consider the following problem: let a value $u \in (0, 1)$ be given, by which we limit a random share of a resource ω_k, extracted from population in time moments τ_k, $k = 1, 2, \ldots$. It is required to find minimum time between neighboring withdrawals, necessary for resource renewal, in order to make it possible to do extractions until the share of the taken resource does not reach the value u.

REFERENCES

1. Bainov D.D. Population dynamics control in regard to minimizing the time necessary for the regeneration of a biomass taken away from the population, *Applied Mathematics and Computation*, 1990, vol. 39, issue 1, pp. 37–48. DOI: 10.1016/0096-3003(90)90120-r
2. Dykhta V.A., Samsonyuk O.N. *Optimal'noe impul'snoe upravlenie s prilozheniyami* (Optimal impulse control with applications), Moscow: Fizmatlit, 2000, 256 p.
3. Belyakov A.O., Davydov A.A., Veliov V.M. Optimal cyclic exploitation of renewable resources, *Journal of Dynamical and Control Systems*, 2015, vol. 21, issue 3, pp. 475–494. DOI: 10.1007/s10883-015-9271-x
4. Belyakov A.O., Davydov A.A. Efficiency optimization for the cyclic use of a renewable resourse, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2016, vol. 22, no. 2, pp. 38–46 (in Russian). DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-38-46
5. Rodina L.I. On the invariant sets of control systems with random coefficients, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2014, issue 4, pp. 109–121 (in Russian). DOI: 10.20537/vm140409
6. Rodina L.I., Tyuteev I.I. About asymptotical properties of solutions of difference equations with random parameters, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2016, vol. 26, issue 1, pp. 79–86 (in Russian). DOI: 10.20537/vm160107
7. Rodina L.I. On repelling cycles and chaotic solutions of difference equations with random parameters, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2016, vol. 22, no. 2, pp. 227–235 (in Russian). DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-227-235
8. Reed W.J. Optimal escapement levels in stochastic and deterministic harvesting models, *Journal of Environmental Economics and Management*, 1979, vol. 6, pp. 350–363. DOI: 10.1016/0095-0696(79)90014-7
9. Kapaun U., Quaas M.F. Does the optimal size of a fish stock increase with environmental uncertainties? *Environmental and Resource Economics*, 2013, vol. 54, issue 2, pp. 293–310. DOI: 10.1007/s10640-012-9606-y
10. Clark C., Kirkwood G. On uncertain renewable resourse stocks: Optimal harvest policies and the value of stock surveys, *Journal of Environmental Economics and Management*, 1986, vol. 13, issue 3, pp. 235–244. DOI: 10.1016/0095-0696(86)90024-0
11. Reed W.J., Clarke H.R. Harvest decisions and assert valuation for biological resources exhibiting size-dependent stochastic growth, *International Economic Review*, 1990, vol. 31, pp. 147–169. DOI: 10.2307/2526634
12. Weitzman M.L. Landing fees vs harvest quotas with uncertain fish stocks, *Journal of Environmental Economics and Management*, 2002, vol. 43, pp. 325–338. DOI: 10.1006/jeem.2000.1181
13. Shiryaev A.N. *Veroyatnost'* (Probability), Moscow: Nauka, 1989, 580 p.
14. Feller W. *An introduction to probability theory and its applications, Vol. 1*, Wiley, 1971. Translated under the title *Vvedenie v teoriyu veroyatnostei i ee prilozheniya,* vol. 1, Moscow: Mir, 1984, 528 p.

Received 10.01.2018

Rodina Lyudmila Ivanovna, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Vladimir State University, ul. Gor'kogo, 87, Vladimir, 600000, Russia.
E-mail: LRodina67@mail.ru