УДК 517.554

© *И. С. Полянский, В. М. Радыгин, С. Ю. Мисюрин*

РАЗЛОЖЕНИЕ РЕГУЛЯРНОЙ КВАТЕРНИОН-ФУНКЦИИ

В статье рассмотрены задачи, связанные с разложением регулярной кватернион-функции в обобщенные ряды Тейлора и Лорана. Обобщенный ряд Тейлора для регулярной кватернион-функции получен путем разложения ядра Коши в 4-мерном гипершаре в алгебре кватернионов и в системе гиперсферических координат. Обобщенный ряд Лорана для регулярной кватернион-функции получен путем разложения ядра Коши во внешности 4-мерного гипершара в алгебре кватернионов и в системе гиперсферических координат. На основе полученных решений при рассмотрении разложения регулярной кватернион-функции в бесконечно малом шаре, который ограничен 3-сферой, задано правило определения вычета регулярной кватернион-функции в алгебре кватернионов и в системе гиперсферических координат относительно изолированной особой точки. Также найдено разложение мероморфной кватернион-функции в степенной ряд.

Ключевые слова: регулярная кватернион-функция, ряд Тейлора, ряд Лорана, вычет, мероморфная кватернион-функция.

DOI: 10.20537/vm180104

Теория кватернионов, базирующаяся на обобщении [1] условий Коши–Римана [2] для голоморфной (регулярной) кватернион-функции [3], позволяет использовать алгебру удобную для описания изометрий в $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$ [4] при решении задач конформного отображения [5]. Однако, несмотря на длительный период ее формирования [1, 6, 7], проблема разложения регулярной кватернион-функции в обобщенные степенные ряды является недостаточно проработанной. Последнее связано с тем, что ряд известных результатов [1, 8, 9] получен не на основе применения некоммутативной алгебры кватернионов или ее геометрической интерпретации (гиперсферическая система координат [10]), а с использованием алгебры действительных чисел с компонентным разложением кватернионных переменных и функций. Также в ряде работ [11, 12] для решения задач по разложению регулярной кватернион-функции в обобщенные степенные ряды предлагается использовать теорию среза регулярных функций над кватернионами [13]. При этом определение регулярной кватернион-функции отличается от классического [7].

Следствием вышеизложенного, по нашему мнению, являются ошибочное истолкование получаемых решений и затруднения при прикладном применении результатов. Целью статьи является получение разложений регулярной кватернион-функции в обобщенные степенные ряды [9, 10] с установлением взаимосвязи между представлениями этого разложения в алгебре кватернионов и гиперсферической системе координат.

§ 1. Основные обозначения и определения

Под $\mathbb{H}$ будем понимать алгебру кватернионов Гамильтона [6], объектом которой является кватернион $q \in \mathbb{H}$, заданный линейной комбинацией $q = q_0 + j_1 q_1 + j_2 q_2 + j_3 q_3$ $\big(q_0, q_1, q_2, q_3 \in \in \mathbb{R};\ j_1, j_2, j_3$ – мнимые единицы$\big)$, со скалярными характеристиками и кватернионными операциями [1].

Под кватернион-функцией $F(q)$ в $\mathbb{H}$-алгебре будем понимать отображение $F : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, функциональная зависимость которого может быть представлена в виде линейной комбинации четырех действительных функций от $q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R} : F(q) = F_0(q_0, \ldots, q_3) + j_1 F_1(q_0, \ldots, q_3) + + j_2 F_2(q_0, \ldots, q_3) + j_3 F_3(q_0, \ldots, q_3)$ [1].

Определение регулярной кватернион-функции $F(q)$, согласно [1], будем рассматривать через кватернионно-праводифференцируемую $F'_r(q) = dF(q)\,(dq)^{-1}$ и кватернионно-леводифференцируемую $F'_l(q) = (dq)^{-1}\,dF(q)$ функции, не совпадающие в силу некоммутативности $\mathbb{H}$-алгебры. С учетом того, что теории кватернионнно-дифференцируемых слева и справа функций эквивалентны [1], под кватернионно-дифференцируемой функцией будем понимать праводифференцируемую функцию, для которой предел $dF(q)(dq)^{-1} = \lim\limits_{h\to 0}\left[\left(\frac{F(q+h\cdot dq)-F(q)}{h}\right)(dq)^{-1}\right]$ существует (производная Гато [14]), где $q, dq \in \mathbb{H}$; $h \in \mathbb{R}$. Соответственно под регулярной кватернион-функцией будем понимать определение из [1] для праворегулярной кватернион-функции, для которой существует кватернион $F'_r(q)$ такой, что $d(F\,dq\wedge dq) = -2F'_r(q)\,Dq$, где $Dq = dq_1\wedge dq_2\wedge dq_3 - j_1 dq_0\wedge dq_2\wedge dq_3 - j_2 dq_0\wedge dq_3\wedge dq_1 - j_3 dq_0\wedge dq_1\wedge dq_2$ — внешняя 3-форма; $d(F\,dq\wedge dq) = dF(q)\wedge dq\wedge dq$.

Получение разложений регулярной кватернион-функции в обобщенные ряды Тейлора и Лорана позволяет определить аналитическое продолжение $F(q)$.

Теорема 1. *Пусть границы областей G_1, $G_2 \in \mathbb{H}$ содержат общую сферическую поверхность γ, а функции F_1 и F_2 являются регулярными соответственно в G_1 и G_2. Тогда функция F_1 допускает аналитическое продолжение F_2 через γ в G_2, если существует регулярная функция F в области $G = G_1\cup G_2 \subset \mathbb{H}$ такая, что*

$$F(q) = \begin{cases} F_1(q)\ \forall q\in G_1,\\ F_2(q)\ \forall q\in G_2,\end{cases} \quad \text{\textit{при} } F_1(q) = F_2(q)\ \forall q\in\gamma.$$

Доказательство. Обозначим через ∂G границу области G. Пусть внутри области G содержится гладкая замкнутая поверхность $\partial G'$, расположенная относительно ∂G на сколь угодно близком расстоянии. Тогда пересечение $\partial G'$ с γ образует гладкий замкнутый контур $\partial\gamma$. Согласно обобщенной интегральной формуле Коши в алгебре кватернионов [1] и с учетом введенных представлений имеем

$$F\left(q^0\right) = \frac{1}{2\pi^2}\oint_{\partial G'} F(q)DqM(q-q^0), \quad q^0\in G, \tag{1.1}$$

где $M(q-q^0) = (q-q^0)^{-1}/\left\|q-q^0\right\|$ — ядро Коши (Коши–Фьютера). Обозначим через $\partial G'_1$ замкнутую поверхность, образованную частью $\partial\tilde{G}'_1$ контура $\partial G'$, содержащейся в G_1, и сферической поверхностью $\gamma_1\subset\gamma$, ограниченной гладким замкнутым контуром $\partial\gamma$. Аналогично через $\partial G'_2$ обозначим замкнутую поверхность, образованную частью $\partial\tilde{G}'_2$ контура $\partial G'$, содержащейся в G_2, и $\gamma_1\subset\gamma$. В силу (1.1) и обобщения теоремы Коши в алгебре кватернионов [8] $\forall q^0\in G$ получим соотношения

$$\begin{gathered} F\left(q^0\right) = F_1\left(q^0\right) + F_2\left(q^0\right),\\ F_1\left(q^0\right) = \frac{1}{2\pi^2}\oint_{\partial G'_1} F(q)\,DqM\left(q-q^0\right) = \frac{1}{2\pi^2}\left(\int_{\partial\tilde{G}'_1} + \int_{\gamma_1}\right),\\ F_2\left(q^0\right) = \frac{1}{2\pi^2}\oint_{\partial G'_2} F(q)\,DqM\left(q-q^0\right) = \frac{1}{2\pi^2}\left(\int_{\partial\tilde{G}'_2} - \int_{\gamma_1}\right) = 0, \end{gathered} \tag{1.2}$$

задающие тождество $F(q) = F_1(q)\ \forall q\in G_1$.

Аналогично (1.2) определяется тождество $F(q) = F_2(q)\ \forall q\in G_2$. Теорема доказана. □

§ 2. Разложение кватернион-функции в обобщенный ряд Тейлора

Теорема 2. *Всякая кватернион-функция $F(q)$, регулярная в некотором 4-мерном гипершаре $\left|q-q^0\right| < R$ с центром в точке q^0, может быть представлена в этом гипершаре степенным рядом*

$$F(q) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\left(q-q^0\right)^n \ \text{\textit{при} } c_n = F^{(n)}\left(q^0\right)\big/ n!, \tag{2.1}$$

где

$$\begin{gathered}F^{(n)}\left(q^0\right)=d^nF\left(q^0\right)(dq)^{-n}=\frac{(-1)^{n-1}}{2\pi^2}\oint_{S_0}F\left(q'\right)Dq'd^nM\left(q'-q^0\right)(dq)^{-n};\\ d^nM\left(q'-q^0\right)=(-1)^{n-1}n!\left(q'-q^0\right)^{-1}\Big/\left\|q'-q^0\right\|\left\{\left[dq\left(q'-q^0\right)^{-1}\right]^n+\right.\\ \left.+\sum_{m=1}^{n}\left(\left[dq\left(q'-q^0\right)^{-1}\right]^{n-m}\sum_{k=0}^{\lfloor m/2\rfloor}\left[\frac{2^{m-2k}(m-k)!\left(\operatorname{Re}\left(\left(q'-q^0\right)\overline{dq}\right)\right)^{m-2k}}{k!(m-2k)!\left\|q'-q^0\right\|^{m-k}(-\|dq\|)^{-k}}\right]\right)\right\}.\end{gathered}\tag{2.2}$$

В (2.2) $dq=q-q^0$, S_0 — 3-сфера с центром в точке q^0 и радиусом R, $\lfloor m/2\rfloor$ определяет целую часть от деления $m/2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Принимая во внимание, что $\|q'-q^0\|=R$, $\|q-q^0\|=r$, $r<R$, и используя разложение $(1-q)^{-1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}q^n$ [10] для $|q|<1$, $\|q'-q\|^{-1}=\left\|(q'-q)^{-1}\right\|$, получим

$$\begin{gathered}\left(q'-q\right)^{-1}=\left(q'-q^0-\left(q-q^0\right)\right)^{-1}=\left(q'-q^0\right)^{-1}\left[1-\left(q-q^0\right)\left(q'-q^0\right)^{-1}\right]^{-1}=\\ =\left(q'-q^0\right)^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(q-q^0\right)\left(q'-q^0\right)^{-1}\right]^n;\\ \left\|q'-q\right\|^{-1}=\left\|q'-q^0\right\|^{-1}\left\|\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(q-q^0\right)\left(q'-q^0\right)^{-1}\right]^n\right\|=\left\|q'-q^0\right\|^{-1}\times\\ \times\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(q-q^0\right)\left(q'-q^0\right)^{-1}\right]^n\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\bar q'-\bar q^0\right)^{-1}\left(\bar q-\bar q^0\right)\right]^n.\end{gathered}\tag{2.3}$$

Найденные разложения (2.3) удовлетворяют условиям абсолютной и равномерной сходимости. С учетом (2.3) и свойств степенных рядов определим ядро Коши $M\left(q'-q\right)$ в виде

$$\begin{gathered}M\left(q'-q\right)=\frac{\left(q'-q^0\right)^{-1}}{\left\|q'-q^0\right\|}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left[\left(q-q^0\right)\left(q'-q^0\right)^{-1}\right]^n\sum_{k=0}^{\infty}\left[\left(\bar q'-\bar q^0\right)^{-1}\times\right.\\ \left.\times\left(\bar q-\bar q^0\right)\right]^n=\left(q'-q^0\right)^{-1}\Big/\left\|q'-q^0\right\|\sum_{n_2=0}^{\infty}\sum_{n_1=0}^{\infty}\left((n_1+1)\left[\left(q-q^0\right)\left(q'-q^0\right)^{-1}\right]^{n_1}\times\right.\\ \left.\times\left[\left(\bar q'-\bar q^0\right)^{-1}\left(\bar q-\bar q^0\right)\right]^{n_2}\right).\end{gathered}\tag{2.4}$$

Используя свойства кратных рядов, приведем (2.4) к виду

$$\begin{gathered}M\left(q'-q\right)=\frac{\left(q'-q^0\right)^{-1}}{\left\|q'-q^0\right\|}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left((n+1-m)\left[\left(q-q^0\right)\left(q'-q^0\right)^{-1}\right]^{n-m}\times\right.\right.\\ \left.\left.\times\left[\left(\bar q'-\bar q^0\right)^{-1}\left(\bar q-\bar q^0\right)\right]^m\right)\right\}=\frac{\left(q'-q^0\right)^{-1}}{\left\|q'-q^0\right\|}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\left(q-q^0\right)\left(q'-q^0\right)^{-1}\right)^n+\right.\right.\\ +\sum_{m=1}^{n}\left(\left[\left(q-q^0\right)\left(q'-q^0\right)^{-1}\right]^{n-m}\sum_{k=0}^{\lfloor m/2\rfloor}\left[2^{m-2k}\left(-\left\|q-q^0\right\|\right)^k\left\|q'-q^0\right\|^{k-m}\times\right.\right.\\ \left.\left.\left.\left.\times(m-k)!\left(\operatorname{Re}\left(\left(q'-q^0\right)\left(\bar q-\bar q^0\right)\right)\right)^{m-2k}\Big/\left(k!(m-2k)!\right)\right]\right)\right]\right\}.\end{gathered}\tag{2.5}$$

С учетом определения $dq = q - q^0$ в (2.2) приведем (2.5) к виду

$$M\left(q'-q\right) = \frac{\left(q'-q^0\right)^{-1}}{\|q'-q^0\|}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(dq\left(q'-q^0\right)^{-1}\right)^n + \sum_{m=1}^{n}\left(\left[dq\left(q'-q^0\right)^{-1}\right]^{n-m}\times\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\times\sum_{k=0}^{\lfloor m/2\rfloor}\left[\frac{2^{m-2k}\,(m-k)!}{k!\,(m-2k)!}\left(-\|dq\|\right)^k\left(\mathrm{Re}\left(\left(q'-q^0\right)\overline{dq}\right)\right)^{m-2k}\|q'-q^0\|^{k-m}\right]\right)\right]\right\}. \tag{2.6}$$

Подставляя разложение (2.6) ядра Коши в интегральную формулу Коши

$$F\left(q\right) = \frac{1}{2\pi^2}\oint_{S_0} F\left(q'\right) Dq' M\left(q'-q\right),$$

с учетом (2.2) при вынесении суммы по n за знак интеграла и домножении (2.6) справа на $(dq)^{-n}$ получим соотношение (2.1). Теорема доказана. □

Зададим кватернионные переменные q', q в гиперсферических координатах:

$$q' = R\left(\cos\psi' + \left[\left(j_1\cos\varphi' + j_2\sin\varphi'\right)\sin\theta' + j_3\cos\theta'\right]\sin\psi'\right),$$
$$q = r\left(\cos\psi + \left[\left(j_1\cos\varphi + j_2\sin\varphi\right)\sin\theta + j_3\cos\theta\right]\sin\psi\right)$$

при $q^0 = 0$ и введем в рассмотрение гармонические многочлены [15]:

$$Y^a_{n,m,k}\left(\varphi,\theta,\psi\right) = Z_{n,m,k}\left(\theta,\psi\right)\cos\left(k\varphi\right); \qquad Y^b_{n,m,k}\left(\varphi,\theta,\psi\right) = Z_{n,m,k}\left(\theta,\psi\right)\sin\left(k\varphi\right), \tag{2.7}$$

образующие ортогональный базис на единичной 3-сфере. В выражении (2.7) $n, m, k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ — индексы, задаваемые при условии $n \geqslant m \geqslant k$; $Z_{n,m,k}\left(\theta,\psi\right)$ — вспомогательные функции, определяемые соотношением [15]

$$Z_{n,m,k}\left(\theta,\psi\right) = C^{m+1}_{n-m}\left(\cos\psi\right)C^{k+0{,}5}_{m-k}\left(\cos\theta\right)\sin^m\psi\sin^k\theta, \tag{2.8}$$

где $C^\alpha_n\left(z\right)$ — многочлен Гегенбауэра [16].

Множитель, нормирующий функции (2.7) до ортонормированной системы $Y'^{a,b}_{n,m,k}\left(\varphi,\theta,\psi\right)$, при $\delta_k = \begin{cases} 1/\sqrt{\pi}, k = 0, \\ \sqrt{2/\pi}, k \neq 0, \end{cases}$ обозначим через

$$A_{n,m,k} = \delta_k 2^{m+k+0{,}5} m!\Gamma\left(k+0{,}5\right)\sqrt{\frac{(n+1)\,(m+0{,}5)\,(n-m)!\,(m-k)!}{(n+m+1)!\,(n+k)!}}.$$

С учетом введенных соотношений сформулируем следующее утверждение, определяющее иное представление n-х элементов $M^{(n)}\left(q'-q\right) = (-1)^{n-1}\,d^n M\left(q'\right)/n!$ разложения ядра Коши (2.5) в ортонормированной системе гиперсферических функций.

Лемма 1. *Пусть* $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ *и* $|q|/|q'| < 1$, *тогда*

$$M^{(n)}\left(q'-q\right) = \sum_{m=0}^{n+1}\sum_{k=0}^{m}\left[Y'^a_{n+1,m,k}\left(\varphi',\theta',\psi'\right)\lambda^a_{n+1,m,k} + Y'^b_{n+1,m,k}\left(\varphi',\theta',\psi'\right)\lambda^b_{n+1,m,k}\right], \tag{2.9}$$

где

$$\lambda^{a,b}_{n,m,k} = \frac{A_{n,m,k}}{2(n+1)R^3}\left(\frac{r}{R}\right)^{n-1}\left[\frac{Y^{a,b}_{n-1,m,k}}{(n+m+1)^{-1}} + \frac{j_1}{m+0{,}5}\left(\frac{Y^{a,b}_{n-1,m+1,k+1}}{(m+1)^{-1}(k+0{,}5)^{-1}} + \frac{Y^{a,b}_{n-1,m-1,k+1}(n+m+1)}{4m(k+0{,}5)^{-1}(n+m)^{-1}} - \right.\right.$$
$$-\frac{Y^{a,b}_{n-1,m+1,k-1}(m+1)(k-0{,}5)^{-1}}{4(m-k+1)^{-1}(m-k+2)^{-1}} - \left.\frac{Y^{a,b}_{n-1,m-1,k-1}(m+k-1)(m+k)}{16m(k-0{,}5)(n+m)^{-1}(n+m+1)^{-1}}\right) \pm \frac{j_2}{m+0{,}5}\left(\frac{Y^{b,a}_{n-1,m+1,k+1}}{(m+1)^{-1}(k+0{,}5)^{-1}} + \right.$$
$$+\left.\frac{Y^{b,a}_{n-1,m-1,k+1}(k+0{,}5)}{4m(n+m)^{-1}(n+m+1)^{-1}} + \frac{Y^{b,a}_{n-1,m+1,k-1}(m+1)(k-0{,}5)^{-1}}{4(m-k+1)^{-1}(m-k+2)^{-1}} + \frac{Y^{b,a}_{n-1,m-1,k-1}(m+k-1)(m+k)}{16m(k-0{,}5)(n+m)^{-1}(n+m+1)^{-1}}\right) +$$
$$\left.+\frac{j_3}{m+0{,}5}\left(\frac{Y^{a,b}_{n-1,m+1,k}(m+1)}{(m-k+1)^{-1}} - \frac{Y^{a,b}_{n-1,m-1,k}(n+m+1)}{4m(n+m)^{-1}(m+k)^{-1}}\right)\right]. \tag{2.10}$$

В выражении (2.10) для сокращения записи принято обозначение $Y^{a,b}_{n,m,k} = Y^{a,b}_{n,m,k}(\varphi, \theta, \psi)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зададим разложение ядра Коши $M(q'-q)$ в системе гармонических многочленов:

$$M\left(q'-q\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}\Big[Y'^{a}_{n,m,k}\left(\varphi', \theta', \psi'\right)\lambda^{a}_{n,m,k} + Y'^{b}_{n,m,k}\left(\varphi', \theta', \psi'\right)\lambda^{b}_{n,m,k}\Big], \tag{2.11}$$

где $\lambda^{a,b}_{n,m,k}$ с учетом ортонормированности системы гиперсферических функций (2.7) определяется кратным интегралом по поверхности 3-сферы при задании $M(q'-q)$ в гиперсферической системе координат:

$$\lambda^{a,b}_{n,m,k} = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\left(R\bar{\eta}' - r\bar{\eta}\right)Y'^{a,b}_{n,m,k}\left(\varphi', \theta', \psi'\right)}{\Big[R^2 + r^2 - 2rR\mathrm{Re}\left(\eta'\bar{\eta}\right)\Big]^2}\varepsilon\left(\psi', \theta'\right)d\psi' d\theta' d\varphi', \tag{2.12}$$

где $\eta = \dfrac{q}{r}$, $\eta' = \dfrac{q'}{R}$ — единичные векторы в $\mathbb{R}^4$, $\varepsilon\left(\psi', \theta'\right) = \sin^2\psi' \sin\theta'$.

Записав интеграл (2.12) в виде суммы двух интегралов, числители которых зависят от переменных η' и η соответственно, с учетом интеграла Пуассона для внутренней части 3-сферы, теоремы Функа–Гекке [17] для $R > r$ получим представление второго слагаемого интеграла (2.12) в виде

$$\frac{-1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\frac{r\bar{\eta}Y'^{a,b}_{n,m,k}\left(\varphi', \theta', \psi'\right)\varepsilon\left(\psi,' \theta'\right)}{\Big[R^2 + r^2 - 2rR\,\mathrm{Re}\left(\eta'\bar{\eta}\right)\Big]^2}d\psi' d\theta' d\varphi' = -\left(\frac{r}{R}\right)^{n-1}\frac{r^2\bar{\eta}Y'^{a,b}_{n,m,k}\left(\varphi, \theta, \psi\right)}{R^3\left(R^2 - r^2\right)}. \tag{2.13}$$

С учетом выражений (2.7), (2.8), представления многочлена Гегенбауэра [15] и выражения вектора η' в гиперсферической системе координат преобразуем произведение $\bar{\eta}'Y^{a,b}_{n,m,k}\left(\varphi', \theta', \psi'\right)$ к виду

$$\begin{aligned}
\bar{\eta}'Y^{a,b}_{n,m,k} = {} & E_1Y^{a,b}_{n+1,m,k} + E_2Y^{a,b}_{n-1,m,k} + j_1\Big(I^1_1Y^{a,b}_{n+1,m+1,k+1} + I^2_1Y^{a,b}_{n+1,m-1,k+1} + \\
& + I^3_1Y^{a,b}_{n+1,m+1,k-1} + I^4_1Y^{a,b}_{n+1,m-1,k-1} + I^1_2Y^{a,b}_{n-1,m+1,k+1} + I^2_2Y^{a,b}_{n-1,m-1,k+1} + I^3_2 \times \\
& \times Y^{a,b}_{n-1,m+1,k-1} + I^4_2Y^{a,b}_{n-1,m-1,k-1}\Big) + j_2\Big(J^1_1Y^{b,a}_{n+1,m+1,k+1} + J^2_1Y^{b,a}_{n+1,m-1,k+1} + \\
& + J^3_1Y^{b,a}_{n+1,m+1,k-1} + J^4_1Y^{b,a}_{n+1,m-1,k-1} + J^1_2Y^{b,a}_{n-1,m+1,k+1} + J^2_2Y^{b,a}_{n-1,m-1,k+1} + J^3_2 \times \\
& \times Y^{b,a}_{n-1,m+1,k-1} + J^4_2Y^{b,a}_{n-1,m-1,k-1}\Big) + j_3\Big(K^1_1Y^{a,b}_{n+1,m+1,k} + K^2_1Y^{a,b}_{n+1,m-1,k} + \\
& + K^1_2Y^{a,b}_{n-1,m+1,k} + K^2_2Y^{a,b}_{n-1,m-1,k}\Big),
\end{aligned} \tag{2.14}$$

где коэффициенты задаются соотношениями

$$E_1 = \frac{n-m+1}{2(n+1)}, \quad E_2 = \frac{n+m+1}{2(n+1)}, \quad I^1_1 = -I^1_2 = J^1_1 = -J^1_2 = \frac{-(m+1)(k+0,5)}{2(n+1)(m+0,5)},$$

$$I^2_1 = J^2_1 = \frac{-(n-m+1)(n-m+2)(k+0,5)}{8m(n+1)(m+0,5)}, \quad I^2_2 = J^2_2 = \frac{(n+m)(n+m+1)(k+0,5)}{8m(n+1)(m+0,5)},$$

$$I^3_1 = -I^3_2 = -J^3_1 = J^3_2 = \frac{(m+1)(m-k+1)(m-k+2)}{8(n+1)(m+0,5)(k-0,5)},$$

$$I^4_1 = -J^4_1 = \frac{(n-m+2)(n-m+1)(m+k-1)}{32m(n+1)(m+0,5)(k-0,5)(m+k)^{-1}},$$

$$I^4_2 = -J^4_2 = \frac{-(n+m)(n+m+1)(m+k-1)(m+k)}{32m(n+1)(m+0,5)(k-0,5)}, \quad K^1_1 = -K^1_2 = \frac{-(m-k+1)(m+1)}{2(n+1)(m+0,5)},$$

$$K^2_1 = \frac{-(n+m)(n+m+1)(m+k)}{8m(n+1)(m+0,5)}, \quad K^2_2 = \frac{(n-m+2)(n-m+1)(m+k)}{8m(n+1)(m+0,5)}.$$

В выражении (2.14) для сокращения записи принято обозначение $Y_{n,m,k}^{a,b}=Y_{n,m,k}^{a,b}\left(\varphi',\theta',\psi'\right)$.

С учетом выражения (2.14) и теоремы Функа–Гекке [17] для $R>r$ преобразуем первое слагаемое интеграла (2.12) к виду

$$\frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\frac{R\bar{\eta}'Y_{n,m,k}^{\prime a,b}\left(\varphi',\theta',\psi'\right)\varepsilon\left(\psi,'\theta'\right)}{\left[R^2+r^2-2rR\operatorname{Re}\left(\eta'\bar{\eta}\right)\right]^2}d\psi'd\theta'd\varphi'=\left(\frac{r}{R}\right)^{n-1}\frac{A_{n,m,k}W_{n,m,k}^{a,b}\left(\varphi,\theta,\psi\right)}{R^3\left(R^2-r^2\right)},\quad(2.15)$$

где

$$\begin{gathered}W_{n,m,k}^{a,b}\left(\varphi,\theta,\psi\right)=r^2E_1Y_{n+1,m,k}^{a,b}+R^2E_2Y_{n-1,m,k}^{a,b}+j_1\Big[r^2\Big(I_1^1Y_{n+1,m+1,k+1}^{a,b}+\\+I_1^2Y_{n+1,m-1,k+1}^{a,b}+I_1^3Y_{n+1,m+1,k-1}^{a,b}+I_1^4Y_{n+1,m-1,k-1}^{a,b}\Big)+R^2\Big(I_2^1Y_{n-1,m+1,k+1}^{a,b}+\\+I_2^2Y_{n-1,m-1,k+1}^{a,b}+I_2^3Y_{n-1,m+1,k-1}^{a,b}+I_2^4Y_{n-1,m-1,k-1}^{a,b}\Big)\Big]+j_2\Big[r^2\Big(J_1^1Y_{n+1,m+1,k+1}^{b,a}+\\+J_1^2Y_{n+1,m-1,k+1}^{b,a}+J_1^3Y_{n+1,m+1,k-1}^{b,a}+J_1^4Y_{n+1,m-1,k-1}^{b,a}\Big)+R^2\Big(J_2^1Y_{n-1,m+1,k+1}^{b,a}+\\+J_2^2Y_{n-1,m-1,k+1}^{b,a}+J_2^3Y_{n-1,m+1,k-1}^{b,a}+J_2^4Y_{n-1,m-1,k-1}^{b,a}\Big)\Big]+j_3\Big[r^2\Big(K_1^1Y_{n+1,m+1,k}^{a,b}+\\+K_1^2Y_{n+1,m-1,k}^{a,b}\Big)+R^2\Big(K_2^1Y_{n-1,m+1,k}^{a,b}+K_2^2Y_{n-1,m-1,k}^{a,b}\Big)\Big].\end{gathered}\quad(2.16)$$

В выражении (2.16) для сокращения записи принято обозначение $Y_{n,m,k}^{a,b}=Y_{n,m,k}^{a,b}\left(\varphi,\theta,\psi\right)$.

Объединяя теперь слагаемые (2.13), (2.15) и преобразуя произведение $\bar{\eta}Y_{n,m,k}^{\prime a,b}\left(\varphi,\theta,\psi\right)$ с учетом (2.14), находим $\lambda_{n,m,k}^{a,b}$ в виде (2.10).

Полученные результаты позволяют определить разложение ядра Коши в ортонормированной системе гармонических многочленов (2.7).

С другой стороны, определив n-е элементы разложения ядра Коши (2.5) в гиперсферической системе координат в виде

$$M^{(n)}\left(q'-q\right)=\frac{\bar{\eta}'}{R^3}\left(\frac{r}{R}\right)^n\left\{\left(\eta\bar{\eta}'\right)^n+\sum_{m=1}^{n}\left[\left(\eta\bar{\eta}'\right)^{n-m}\sum_{k=0}^{\lfloor m/2\rfloor}\frac{(-1)^k2^{m-2k}(m-k)!}{k!\,(m-2k)!\operatorname{Re}\left(\eta\bar{\eta}'\right)^{2k-m}}\right]\right\},\quad(2.17)$$

для $n=0$ с учетом (2.10) получим тождество

$$\begin{gathered}M^{(0)}\left(q'-q\right)=\frac{\bar{\eta}'}{R^3}=\frac{1}{R^3}\Big(\cos\psi'-\big[\left(j_1\cos\varphi'+j_2\sin\varphi'\right)\sin\theta'+j_3\cos\theta'\big]\sin\psi'\Big)=\\=\lambda_{1,0,0}^{a}Y_{1,0,0}^{\prime a}+\lambda_{1,0,0}^{b}Y_{1,0,0}^{\prime b}+\lambda_{1,1,0}^{a}Y_{1,1,0}^{\prime a}+\lambda_{1,1,0}^{b}Y_{1,1,0}^{\prime b}+\lambda_{1,1,1}^{a}Y_{1,1,1}^{\prime a}+\lambda_{1,1,1}^{b}Y_{1,1,1}^{\prime b}.\end{gathered}\quad(2.18)$$

В выражении (2.18) для сокращения записи принято обозначение $Y_{n,m,k}^{\prime a,b}=Y_{n,m,k}^{\prime a,b}\left(\varphi',\theta',\psi'\right)$.

Аналогично (2.18), продолжая определение (2.17) для $n>0$ при выполнении условия $\lambda_{0,0,0}^{a}Y_{0,0,0}^{\prime a}\left(\varphi',\theta',\psi'\right)+\lambda_{0,0,0}^{b}Y_{0,0,0}^{\prime b}\left(\varphi',\theta',\psi'\right)=0$, получим (2.9). Лемма доказана. □

§ 3. Разложение кватернион-функции в обобщенный ряд Лорана

Из доказательства леммы 1 следует разложение ядра Коши для $r>R$ в гиперсферической системе функций.

Лемма 2. *Пусть* $|q|/|q'|>1$, *тогда*

$$M\left(q'-q\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}\left[Y_{n,m,k}^{\prime a}\left(\varphi',\theta',\psi'\right)\tilde{\lambda}_{n,m,k}^{a}+Y_{n,m,k}^{\prime b}\left(\varphi',\theta',\psi'\right)\tilde{\lambda}_{n,m,k}^{b}\right],\quad(3.1)$$

где

$$\begin{gathered}\tilde{\lambda}^{a,b}_{n,m,k}=\frac{A_{n,m,k}}{2\left(n+1\right)r^3}\left(\frac{R}{r}\right)^n\left[\frac{Y^{a,b}_{n+1,m,k}}{-\left(n-m+1\right)^{-1}}+\frac{j_1}{m+0,5}\left(\frac{Y^{a,b}_{n+1,m+1,k+1}}{\left(m+1\right)^{-1}\left(k+0,5\right)^{-1}}+\right.\right.\\
+\frac{Y^{a,b}_{n+1,m-1,k+1}\left(k+0,5\right)}{4m\left(n-m+1\right)^{-1}\left(n-m+2\right)^{-1}}-\frac{Y^{a,b}_{n+1,m+1,k-1}\left(m+1\right)\left(k-0,5\right)^{-1}}{4\left(m-k+1\right)^{-1}\left(m-k+2\right)^{-1}}-\\
\left.-\frac{Y^{a,b}_{n+1,m-1,k-1}\left(m+k-1\right)\left(m+k\right)}{16m\left(k-0,5\right)\left(n-m+1\right)^{-1}\left(n-m+2\right)^{-1}}\right)\pm\\
\pm\frac{j_2}{m+0,5}\left(\frac{Y^{b,a}_{n+1,m+1,k+1}}{\left(m+1\right)^{-1}\left(k+0,5\right)^{-1}}+\frac{Y^{b,a}_{n+1,m-1,k+1}\left(k+0,5\right)}{4m\left(n-m+1\right)^{-1}\left(n-m+2\right)^{-1}}+\right.\\
\left.+\frac{Y^{b,a}_{n+1,m+1,k-1}\left(m+1\right)\left(k-0,5\right)^{-1}}{4\left(m-k+1\right)^{-1}\left(m-k+2\right)^{-1}}+\frac{Y^{b,a}_{n+1,m-1,k-1}\left(m+k-1\right)\left(n-m+2\right)}{16m\left(k-0,5\right)\left(n-m+1\right)^{-1}\left(m+k\right)^{-1}}\right)+\\
\left.+\frac{j_3}{m+0,5}\left(\frac{Y^{a,b}_{n+1,m+1,k}\left(m+1\right)}{\left(m-k+1\right)^{-1}}-\frac{Y^{a,b}_{n+1,m-1,k}\left(n-m+2\right)}{4m\left(n-m+1\right)^{-1}\left(m+k\right)^{-1}}\right)\right].\end{gathered}\tag{3.2}$$

В выражении (3.2) для сокращения записи принято обозначение $Y^{a,b}_{n,m,k}=Y^{a,b}_{n,m,k}\left(\varphi,\theta,\psi\right)$.

Доказательство. Справедливость тождества (3.1) следует из разложения ядра Коши $M\left(q'-q\right)$ в системе гармонических многочленов аналогично (2.11) с определением значений $\tilde{\lambda}^{a,b}_{n,m,k}$ в виде интеграла (2.12). При этом слагаемые интеграла (2.12) при условии $r>R$ представляются в следующем виде:

$$\frac{-1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\frac{r\bar{\eta}Y'^{a,b}_{n,m,k}\left(\varphi',\theta',\psi'\right)\varepsilon\left(\psi,'\theta'\right)}{\left[R^2+r^2-2rR\mathrm{Re}\left(\eta'\bar{\eta}\right)\right]^2}d\psi'd\theta'd\varphi'=\left(\frac{R}{r}\right)^n\frac{r^2\bar{\eta}Y'^{a,b}_{n,m,k}\left(\varphi,\theta,\psi\right)}{r^3\left(R^2-r^2\right)},\tag{3.3}$$

$$\frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\frac{R\bar{\eta}'Y'^{a,b}_{n,m,k}\left(\varphi',\theta',\psi'\right)\varepsilon\left(\psi,'\theta'\right)}{\left[R^2+r^2-2rR\mathrm{Re}\left(\eta'\bar{\eta}\right)\right]^2}d\psi'd\theta'd\varphi'=-\left(\frac{R}{r}\right)^n\frac{A_{n,m,k}\tilde{W}^{a,b}_{n,m,k}\left(\varphi,\theta,\psi\right)}{r^3\left(R^2-r^2\right)},\tag{3.4}$$

где гармоническая функция $\tilde{W}^{a,b}_{n,m,k}\left(\varphi,\theta,\psi\right)$ определяется аналогичным (2.16) выражением при замене местами соответствующих множителей r^2 и R^2.

Объединив слагаемые (3.3), (3.4) и преобразуя произведение $\bar{\eta}Y'^{a,b}_{n,m,k}\left(\varphi,\theta,\psi\right)$ в выражении (3.3) с учетом соотношения (2.14), получим $\tilde{\lambda}^{a,b}_{n,m,k}$ в виде (3.2). Для заданных $\tilde{\lambda}^{a,b}_{n,m,k}$ при $|q|/|q'|>1$ и условии ортонормированности гиперсферической системы функций (2.7) справедливо разложение ядра Коши $M\left(q'-q\right)$ в системе гармонических многочленов в виде (3.1). Лемма доказана. □

Таким образом, полученные в лемме 1 и лемме 2 соответствующие разложения ядра Коши в ортонормированной системе гармонических многочленов для случаев $|q|/|q'|<1$ и $|q|/|q'|>1$ позволяют определить кватернион-функцию $F\left(q\right)$ внутри шарового слоя.

Теорема 3. *Всякая кватернион-функция $F\left(q\right)$, регулярная внутри шарового слоя D, ограниченного 3-сферой S_0 радиусом $R=\left|\zeta-q^0\right|$ и 3-сферой S_1 радиусом $r=\left|\sigma-q^0\right|$ с общим центром в точке q^0, может быть представлена в каждой точке $q\in D$ при $r<\left|q-q^0\right|<R$ рядом*

$$F\left(q\right)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\left(q-q^0\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}c'_n\left(q-q^0\right)^{-n},\tag{3.5}$$

где c_n — коэффициенты ряда (2.1), а c'_n определяются соотношением

$$c'_n=\frac{1}{2\pi\left(n-1\right)!}\oint_{S_1}\left[F\left(\sigma\right)D\sigma d^{n-1}M\left(q-q^0\right)\right]\left(q-q^0\right)^n.\tag{3.6}$$

В выражении (3.6) n-й дифференциал ядра Коши определяется аналогично выражению (2.2) при равенстве $dq = \sigma - q^0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть задана кватернион-функция $F(q)$, регулярная внутри шарового слоя D, который ограничен 3-сферами S_0 и S_1 с радиусами R и r соответственно ($0 < r < R$) и общим центром в точке q^0. Зададим дополнительно две 3-сферы S_0' и S_1' с центром в точке q^0 и соответствующими радиусами R' и r', удовлетворяющими неравенству $0 < r < r' < R' < R$. Поскольку кватернион-функция $F(q)$ регулярна в D, то по формуле (1.1) для двусвязной области, ограниченной S_0' и S_1', имеем

$$F(q) = \frac{1}{2\pi^2}\oint_{S_0'} F(\zeta)\, D\zeta M(\zeta - q) - \frac{1}{2\pi^2}\oint_{S_1'} F(\sigma)\, D\sigma M(\sigma - q), \tag{3.7}$$

где q — точка, находящаяся между сферами S_0' и S_1'. Для первого интеграла (3.7) при $\left|\zeta - q^0\right| \to R$ и $\left|q - q^0\right| < R$ с учетом (2.5) справедливо тождество

$$\frac{1}{2\pi^2}\oint_{S_0'} F(\zeta)\, D\zeta M(\zeta - q) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(q - q^0\right)^n. \tag{3.8}$$

Во втором интеграле (3.7) при $\left|\sigma - q^0\right| \to r$ и $\left|q - q^0\right| > r$, с использованием разложения $(1-q)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ [10] для $|q| < 1$, $\|\sigma - q\|^{-1} = \left\|(\sigma - q)^{-1}\right\|$, выражения $(\sigma - q)^{-1}$ и $\|\sigma - q\|$ аналогично (2.3) приводятся к виду

$$\begin{gathered}(\sigma - q)^{-1} = -\left(q - q^0\right)^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\sigma - q^0\right)\left(q - q^0\right)^{-1}\right]^n,\\ \|\sigma - q\|^{-1} = \|q - q^0\|^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\sigma - q^0\right)\left(q - q^0\right)^{-1}\right]^n \sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\bar q - \bar q^0\right)^{-1}\left(\bar\sigma - \bar q^0\right)\right]^n.\end{gathered} \tag{3.9}$$

С учетом (3.9) зададим разложение ядра Коши $M(\sigma - q)$ из (3.7) в следующем виде:

$$\begin{aligned}&(\sigma - q)^{-1}\big/\,\|\sigma - q\| = -\sum_{n=0}^{\infty} M^{(n)}(\sigma - q) = -\sum_{n=0}^{\infty} d^n M\left(q - q^0\right)/\,n! =\\ &= \frac{-\left(q - q^0\right)^{-1}}{\|q - q^0\|}\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(dq\left(q - q^0\right)^{-1}\right)^n + \sum_{m=1}^{n}\left(\left[dq\left(q - q^0\right)^{-1}\right]^n \times\right.\right.\right.\\ &\left.\left.\left.\times\sum_{k=0}^{\lfloor m/2\rfloor}\left[\left(\mathrm{Re}\left(\left(q - q^0\right)\overline{dq}\right)\right)^{m-2k}\|q - q^0\|^{k-m}\,\frac{2^{m-2k}(m-k)!\,(-\|dq\|)^k}{k!\,(m-2k)!}\right]\right)\right]\right\},\end{aligned} \tag{3.10}$$

при $dq = \sigma - q^0$.

Теперь, представив ядро Коши (3.10) в гиперсферической системе координат при $q^0 = 0$, будем иметь

$$\begin{aligned}&\frac{(\sigma - q)^{-1}}{\|\sigma - q\|} = -\sum_{n=0}^{\infty} M^{(n)}(\sigma - q) =\\ &= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\bar\eta}{r^3}\left(\frac{R}{r}\right)^n\left[(\eta'\bar\eta)^n + \sum_{m=1}^{n}\left((\eta'\bar\eta)^{n-m}\sum_{k=0}^{\lfloor m/2\rfloor}\left[\frac{(-1)^k\, 2^{m-2k}(m-k)!}{k!\,(m-2k)!\mathrm{Re}\,(\eta'\bar\eta)^{2k-m}}\right]\right)\right].\end{aligned} \tag{3.11}$$

С учетом леммы 2 для $n = 0$ получим

$$\begin{aligned}&M^{(0)}(\sigma - q) = \frac{\bar\eta}{r^3} = \frac{1}{r^3}\big(\cos\psi - \left[(j_1\cos\varphi + j_2\sin\varphi)\sin\theta + j_3\cos\theta\right]\sin\psi\big) =\\ &= \tilde\lambda^a_{0,0,0} Y'^a_{0,0,0}\left(\varphi', \theta', \psi'\right) + \tilde\lambda^b_{0,0,0} Y'^b_{0,0,0}\left(\varphi', \theta', \psi'\right).\end{aligned} \tag{3.12}$$

Аналогично (3.12), продолжая определение (3.11), для $n > 0$ получим тождество между разложением ядра Коши $M(\sigma - q)$ (3.10) и его разложением при $r > R$ в гиперсферической системе функций (3.1). Далее, умножив элементы $d^n M\left(q - q^0\right) / n!$ в (3.10) слева на $\left(q - q^0\right)^{n+1}$, приходим к равенству

$$\frac{1}{2\pi^2} \oint_{S_1'} F(\sigma)\, D\sigma M(\sigma - q) = -\sum_{n=1}^{\infty} c_n' \left(q - q^0\right)^{-n}. \tag{3.13}$$

Из равенств (3.8), (3.13) следует справедливость разложения (3.5). Теорема доказана. □

В разложении (3.5) по аналогии [2] первое слагаемое ряда будем называть правильной частью, второе — главной частью.

§ 4. Разложение мероморфной кватернион-функции

Рассмотрим разложение (3.5) для случая, когда центр области D является единственной особой точкой q^0 регулярной кватернион-функции $F(q)$ в бесконечно малом шаре, ограниченном 3-сферой S_1 при $r \to 0$. Используя (3.10) и (3.6), определим вычет $\operatorname*{Res}\limits_{q=q^0} F(q)$ регулярной кватернион-функции $F(q)$ относительно изолированной особой точки q^0 в виде

$$\operatorname*{Res}_{q=q^0} F(q) = \lim_{|q-q^0|=r\to 0} \left\{ \frac{1}{2\pi^2} \oint\limits_{S_1} F(q)\, Dq \right\}. \tag{4.1}$$

Из заданных соотношений (3.1), (3.5), (3.6), (3.10) и представления 3-формы $Dq = \left(q - q^0\right) \varepsilon(\psi, \theta)\, d\psi\, d\theta\, d\varphi$ в гиперсферической системе координат следует, что вычет (4.1) будет определяться соотношением

$$\operatorname*{Res}_{q=q^0} F(q) = c_1' = \lim_{r\to 0} \left\{ \frac{r}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} F\left(r\eta + q^0\right) \eta \varepsilon(\psi, \theta)\, d\psi\, d\theta\, d\varphi \right\}. \tag{4.2}$$

Для получения аналога теоремы Миттаг-Леффлера [18] с учетом выражений (3.5), (3.6) и (4.2) введем обозначения: a_v — полюсы мероморфной кватернион-функции $F(q)$, нумерация $(v = 1, 2, \ldots)$ которых выполнена в порядке неубывающих модулей $\left(|a_v| \leqslant |a_{v+1}|\right)$; $g_v(q) = \sum\limits_{n=1}^{p_v} c_n' (q - a_v)^{-n}$ — главная часть разложения (3.5) $F(q)$; $P_v(q) = \sum\limits_{n=0}^{m_n} g_v^{(n)}(0)\, q^n \big/ n!$ — некоторый полином, определяемый отрезком ряда (2.1) в точке 0 при разложении $g_v(q)$.

Теорема 4. *Любую мероморфную кватернион-функцию $F\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ можно представить в виде равномерно сходящегося ряда*

$$F(q) = F_0(q) + \sum_{v=1}^{\infty} \left(q_v(q) - P_v(q)\right), \tag{4.3}$$

в котором $F_0(q)$ — целая кватернион-функция.

Доказательство теоремы 4 аналогично доказательству теоремы Миттаг-Леффлера [18] и следует из равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{v=1}^{\infty} \left(g_v(q) - P_v(q)\right)$. При этом под равномерно сходящимся рядом из мероморфных кватернион-функций на некотором компакте K понимается ряд, у которого конечное число членов имеет полюсы на K, и после их удаления ряд равномерно сходится на K. Приближение $P_v(q)$ функции $g_v(q)$, регулярной в 4-мерном гипершаре $(|q| < |a_v|)$ с центром в 0, формируется на компакте $K_v = \{q : |q| < t\,|a_v|\}$ для $0 < t < 1$ отрезком ряда (2.1). Порядок m_n полинома $P_v(q)$ выбирается из условия [18]

$$|g_v(q) - P_v(q)| < 1/2^v.$$

Коэффициенты c'_n при определении $g_v(q)$ задаются соотношением

$$c'_n = \lim_{r\to 0}\left\{\frac{r^n}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} F\left(r\eta + q^0\right)\eta\varepsilon\left(\psi,\theta\right)\eta^{n-1}\left[1+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\operatorname{sgn}\left(\left|q^0\right|\right)\sum_{m=1}^{n-1}\left(\frac{r^{2m}}{\|r\eta+q^0\|^m}\sum_{k=0}^{\lfloor m/2\rfloor}\left[(-1)^k\,\frac{2^{m-2k}\,(m-k)!}{k!}\right]\right)\right]d\psi\, d\theta\, d\varphi\right\}. \tag{4.4}$$

Заключение

Полученные в статье результаты позволяют задать некоторый теоретический базис, используемый при разложении регулярных кватернион-функций $F(q)$ в обобщенные степенные ряды, к примеру, необходимый при решении задач типа [4]. Основные частные результаты заключаются в получении:

1) обобщения ряда Тейлора (2.1) для алгебры кватернионов с представлением разложения ядра Коши в гипершаре (2.5) и в системе гиперсферических координат (2.9);

2) обобщения ряда Лорана (3.5) для алгебры кватернионов с представлением разложения ядра Коши во внешности гипершара (3.10) и в системе гиперсферических координат (3.1);

3) вычета кватернион-функции (4.1) и коэффициентов главной части ряда Лорана в гиперсферической системе координат (4.4);

4) разложение мероморфной кватернион-функции в степенной ряд (4.3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sudbery A. Quaternionic analyses // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1979. Vol. 85. Issue 2. P. 199–225. DOI: 10.1017/S0305004100055638
2. Бицадзе А.В. Основы теории функции комплексного переменного. М.: Наука, 1969. 240 с.
3. Parfenov M. On properties of holomorphic functions in quaternionic analysis // American Journal of Mathematical Analysis. 2017. Vol. 5. No. 1. P. 17–24. DOI: 10.12691/ajma-5-1-4
4. Радыгин В.М., Полянский И.С. Методы конформных отображений многогранников в $\mathbb{R}^3$ // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27. Вып. 1. С. 60–68. DOI: 10.20537/vm170106
5. Perotti A. Regular quaternionic functions and conformal mappings // CUBO A Mathematical Journal. 2009. Vol. 11. No. 1. P. 123–143.
6. Гамильтон У.Р. Избранные труды. Оптика. Динамика. Кватернионы. М.: Наука, 1994. 560 с.
7. Fueter R. Über die analytische darstellung der regulären funktionen einer quaternionenvariablen // Commentarii Mathematici Helvetici. 1935. Vol. 8. Issue 1. P. 371–378. DOI: 10.1007/BF01199562
8. Gentili G., Mariconda C., Tarallo M. Quaternionic regular maps and $\overline{\partial}$-type operators // A Quaterly Jornal of Pure and Applied Mathematics. 1993. Vol. 67. No. 3–4. P. 333–359.
9. Fokas A.S., Pinotsis D.A. Quaternions, evaluation of integrals and boundary value problems // Computational Methods and Function Theory. 2007. Vol. 7. No. 2. P. 443–476. DOI: 10.1007/BF03321657
10. van Lancker P. Taylor and Laurent series on the sphere // Complex Variables, Theory and Application: An International Journal. 1999. Vol. 38. No. 4. P. 321–365. DOI: 10.1080/17476939908815173
11. Gentili G., Stoppato C. Power series and analyticity over the quaternions // Mathematische Annalen. 2012. Vol. 352. Issue 1. P. 113–131. DOI: 10.1007/S00208-010-0631-2
12. Gentili G., Sarfatti G. The Mittag-Leffler theorem for regular functions of a quaternionic variable // New York Journal of Mathematics. 2017. Vol. 23. P. 583–592.
13. Gentili G., Stoppato C., Struppa D.C. Regular functions of a quaternionic variable. Berlin–Heidelberg: Springer, 2013. DOI: 10.1007/978-3-642-33871-7
14. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функции и функционального анализа. М.: Физматлит, 2004. 572 с.
15. Виленкин Н.Я. Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1991. 576 с.
16. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматлит, 1963. 1100 с.

17. Штепина Т.В. Обобщение теоремы Функа–Гекке на случай гиперболического пространства // Известия РАН. Сер. матем. 2004. Т. 68. Вып. 5. С. 213–224. DOI: 10.4213/im508
18. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1976. 720 с.

Поступила в редакцию 12.10.2017

Полянский Иван Сергеевич, к. т. н., докторант, Академия Федеральной службы охраны Российской Федерации, 302024, Россия, г. Орел, ул. Приборостроительная, 35.
E-mail: van341@mail.ru

Радыгин Владимир Михайлович, д. т. н., профессор, сотрудник, Академия Федеральной службы охраны Российской Федерации, 302024, Россия, г. Орел, ул. Приборостроительная, 35.
E-mail: stepbystep000@yandex.ru

Мисюрин Сергей Юрьевич, д. ф.-м. н., доцент, директор, Институт интеллектуальных кибернетических систем, Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», 115409, Россия, г. Москва, Каширское шоссе, 31.
E-mail: ssmmrr@mail.ru

I. S. Polyanskii, V. M. Radygin, S. Yu. Misyurin

Decomposition of a regular quaternion function

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2018, vol. 28, issue 1, pp. 36–47 (in Russian).

Keywords: regular quaternion function, Taylor series, Laurent series, residue, quaternion meromorphic function.

MSC2010: 30B10

DOI: 10.20537/vm180104

This article deals with the tasks associated with the decomposition of a regular quaternion function into generalized Taylor and Laurent series. The generalized Taylor series for a regular quaternion function were obtained by the decomposition of the Cauchy kernel in a 4-dimensional hyperball in the algebra of quaternions and the hyperspherical coordinate system. The generalized Laurent series for a regular quaternion function were obtained by the decomposition of the Cauchy kernel in the exterior of a 4-dimensional hyperball in the algebra of quaternions and the hyperspherical coordinate system. On the basis of the obtained solutions by considering the decomposition of a regular quaternion function in an infinitely small ball that is restricted by the 3-sphere, we set the rule to determine the deduction of a regular quaternion function in the algebra of quaternions and the hyperspherical coordinate system regarding the isolated singular point. In addition, the decomposition of a meromorphic quaternion function into the power series was found.

REFERENCES

1. Sudbery A. Quaternionic analyses, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 1979, vol. 85, issue 2, pp. 199–225. DOI: 10.1017/S0305004100055638
2. Bitsadze A.V. *Osnovy teorii funktsii kompleksnogo peremennogo* (Fundamentals of the theory of functions of a complex variable), Moscow: Nauka, 1969, 240 p.
3. Parfenov M. On properties of holomorphic functions in quaternionic analysis, *American Journal of Mathematical Analysis*, 2017, vol. 5, no. 1, pp. 17–24. DOI: 10.12691/ajma-5-1-4
4. Radygin V.M., Polyanskii I.S. Methods of conformal mappings of polyhedra in $\mathbb{R}^3$, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2017, vol. 27, issue 1, pp. 60–68 (in Russian). DOI: 10.20537/vm170106
5. Perotti A. Regular quaternionic functions and conformal mappings, *CUBO A Mathematical Journal*, 2009, vol. 11, no. 1, pp. 123–143.
6. Hamilton W.R. *Izbrannye trudy. Optika. Dinamika. Kvaterniony* (Selected works. Optics. Dynamics. Quaternions), Moscow: Nauka, 1994, 560 p.

7. Fueter R. Über die analytische darstellung der regulären funktionen einer quaternionenvariablen, *Commentarii Mathematici Helvetici*, 1935, vol. 8, issue 1, pp. 371–378. DOI: 10.1007/BF01199562
8. Gentili G., Mariconda C., Tarallo M. Quaternionic regular maps and $\overline{\partial}$-type operators, *A Quaterly Jornal of Pure and Applied Mathematics*, 1993, vol. 67, no. 3–4, pp. 333–359.
9. Fokas A.S., Pinotsis D.A. Quaternions, evaluation of integrals and boundary value problems, *Computational Methods and Function Theory*, 2007, vol. 7, no. 2, pp. 443–476. DOI: 10.1007/BF03321657
10. van Lancker P. Taylor and Laurent series on the sphere, *Complex Variables, Theory and Application: an International Journal*, 1999, vol. 38, no. 4, pp. 321–365. DOI: 10.1080/17476939908815173
11. Gentili G., Stoppato C. Power series and analyticity over the quaternions, *Mathematische Annalen*, 2012, vol. 352, issue 1, pp. 113–131. DOI: 10.1007/S00208-010-0631-2
12. Gentili G., Sarfatti G. The Mittag-Leffler theorem for regular functions of a quaternionic variable, *New York Journal of Mathematics*, 2017, vol. 23, pp. 583–592.
13. Gentili G., Stoppato C., Struppa D.C. *Regular functions of a quaternionic variable*, Berlin–Heidelberg: Springer, 2013. DOI: 10.1007/978-3-642-33871-7
14. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza* (Elements of the theory of functions and functional analysis), Moscow: Fizmatlit, 2004, 572 p.
15. Vilenkin N.Ya. *Spetsial'nye funktsii i teoriya predstavleniya grupp* (Special functions and the theory of group representations), Moscow: Nauka, 1991, 576 p.
16. Gradshtein I.S., Ryzhik I.M. *Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedenii* (Table of integrals, sums, series and products), Moscow: Fizmatlit, 1963, 1100 p.
17. Shtepina T.V. A generalization of the Funk–Hecke theorem to the case of hyperbolic spaces, *Izvestiya: Mathematics*, 2004, vol. 68, no. 5, pp. 1051–1061. DOI: 10.1070/IM2004v068n05ABEH000508
18. Shabat B.V. *Vvedenie v kompleksnyi analiz* (Introduction to complex analysis), Moscow: Nauka, 1976, 720 p.

Received 12.10.2017

Polyanskii Ivan Sergeevich, Candidate of Engineering, Doctoral Student, The Academy of Federal Security Guard Service of the Russian Federation, ul. Priborostroitel'naya, 35, Orel, 302034, Russia.
E-mail: van341@mail.ru

Radygin Vladimir Mikhailovich, Doctor of Engineering, Professor, The Academy of Federal Security Guard Service of the Russian Federation, ul. Priborostroitel'naya, 35, Orel, 302034, Russia.
E-mail: stepbystep000@yandex.ru

Misyurin Sergei Yurievich, Doctor of Physics and Mathematics, Associate Professor, Director, National Engineering Physics Institute "MEPhI", Kashirskoe sh., 31, Moscow, 115409, Russia.
E-mail: ssmmrr@mail.ru