УДК 514.756.2

© *Л. Н. Кривоносов, В. А. Лукьянов*

КОНФОРМНАЯ СВЯЗНОСТЬ СО СКАЛЯРНОЙ КРИВИЗНОЙ

Определена конформная связность со скалярной кривизной как обобщение псевдориманова пространства постоянной кривизны. Вычислена матрица кривизны такой связности. Доказано, что на многообразии конформной связности со скалярной кривизной имеется конформная связность с нулевой матрицей кривизны. Дано определение перенормируемого скаляра и доказано существование перенормируемых скаляров на любом многообразии конформной связности, где существует разбиение единицы. Доказано: 1) существование на многообразии конформной связности с нулевой матрицей кривизны конформной связности с положительной, отрицательной и знакопеременной скалярной кривизной; 2) существование на многообразии конформной связности глобальной калибровочно-инвариантной метрики; 3) на гиперповерхности конформного пространства индуцированная конформная связность не может быть с ненулевой скалярной кривизной.

Ключевые слова: многообразие конформной связности, матрица связности, матрица кривизны связности, калибровочные преобразования, перенормируемый скаляр, конформная связность со скалярной кривизной, разбиение единицы, калибровочно-инвариантная метрика.

DOI: 10.20537/vm180103

Введение

Пространства конформной связности с положительно-определенной угловой метрикой были введены Картаном [1]. В статье [2] дается аналогичное определение n-мерного многообразия M_n конформной связности с угловой метрикой произвольной сигнатуры s. На каждой карте U_α некоторого атласа этого многообразия должна быть задана матрица связности

$$\Omega_\alpha = \begin{pmatrix} \omega_0^0 & \omega_j^0 & 0 \\ \omega^i & \omega_j^i & -\eta^{ik}\omega_k^0 \\ 0 & -\eta_{jk}\omega^k & -\omega_0^0 \end{pmatrix}, \qquad \eta_{ik}\omega_j^k + \eta_{jk}\omega_i^k = 0, \qquad i, j, k = 1, 2, \ldots, n, \tag{0.1}$$

размерности $(n+2)\times(n+2)$, состоящая из гладких 1-форм; η_{ij} — тензор угловой метрики $\eta_{ij}\omega^i\omega^j$,

$$\eta_{ii} = \pm 1, \qquad \eta_{ij} = 0 \text{ при } i \neq j, \tag{0.2}$$

а разность между числом положительных и отрицательных элементов η_{ii} равна s. Формы ω^i линейно независимы (мы для удобства опускаем индекс 0 в формах ω_0^i). На пересечении карт $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ матрицы связности должны удовлетворять уравнению

$$\Omega_\beta = (h_{\alpha\beta})^{-1}\, dh_{\alpha\beta} + (h_{\alpha\beta})^{-1}\, \Omega_\alpha h_{\alpha\beta}, \tag{0.3}$$

где $h_{\alpha\beta}$ — матрица, принадлежащая калибровочной группе $H_{n,s}$, являющейся подгруппой стационарности конформной группы $C_{n,s}$. Калибровочная группа порождается тремя своими подгруппами:

1) коммутативной группой *преобразований перенормировки* от одного параметра λ, состоящей из матриц вида

$$p = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \delta_j^i & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}, \qquad (\delta_j^i) \text{ — единичная матрица;} \tag{0.4}$$

2) коммутативной группой *преобразований нормализации* от n параметров λ_i, состоящей из матриц вида
$$q=\begin{pmatrix}1 & \lambda_j & -\frac{1}{2}\eta^{kl}\lambda_k\lambda_l\\ 0 & \delta^i_j & -\eta^{ik}\lambda_k\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}; \tag{0.5}$$

3) группой *η-ортогональных преобразований* от $\frac{n(n-1)}{2}$ параметров λ^i_j, состоящей из матриц вида
$$l=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda^i_j & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \qquad \eta_{ij}\lambda^i_m\lambda^j_k=\eta_{mk}. \tag{0.6}$$

Справедливы формулы
$$pl=lp, \qquad pq=\widetilde{q}p, \qquad lq=q'l,$$
где $\widetilde{q}$ — матрица преобразования нормализации с параметрами $\lambda\lambda_i$, а q' — матрица преобразования нормализации с параметрами $\left(\lambda^{-1}\right)^k_j\lambda_k$, где $\left(\lambda^{-1}\right)^k_j$ — компоненты матрицы, обратной к $\left(\lambda^k_j\right)$. Из этого следует, что матрица $h\in H_{n,s}$ произвольного калибровочного преобразования однозначно записывается в виде $h=plq$. Отсюда
$$h=\begin{pmatrix}\lambda & \lambda\lambda_j & -\frac{1}{2}\lambda\eta^{kl}\lambda_k\lambda_l\\ 0 & \lambda^i_j & -\lambda^i_p\eta^{pk}\lambda_k\\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda}\end{pmatrix}, \qquad h^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\lambda} & -\lambda_k\left(\lambda^{-1}\right)^k_j & -\frac{1}{2}\lambda\eta^{kl}\lambda_k\lambda_l\\ 0 & \left(\lambda^{-1}\right)^i_j & \lambda\eta^{ik}\lambda_k\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}. \tag{0.7}$$

Параметр $\lambda=\lambda(h)$ преобразования перенормировки p является элементом матрицы h, стоящим в левом верхнем углу. Для любых $h_1,h_2\in H_{n,s}$ справедлива формула $\lambda(h_1h_2)=\lambda(h_1)\,\lambda(h_2)$.

На каждой карте U_α матрица связности Ω_α определена лишь с точностью до калибровочного преобразования $h\in H_{n,s}$. Калибровочное преобразование h изменяет ее по закону, аналогичному (0.3): $\widetilde{\Omega}_\alpha=h^{-1}dh+h^{-1}\Omega_\alpha h$. Например, преобразование перенормировки (0.4) превращает Ω_α из (0.1) в
$$\widetilde{\Omega}_\alpha=\begin{pmatrix}\omega^0_0+\frac{d\lambda}{\lambda} & \frac{1}{\lambda}\omega^0_j & 0\\ \lambda\omega^i & \omega^i_j & -\frac{1}{\lambda}\eta^{ik}\omega^0_k\\ 0 & -\lambda\eta_{jk}\omega^k & -\omega^0_0-\frac{d\lambda}{\lambda}\end{pmatrix}. \tag{0.8}$$

Если оставить матрицы связности Ω_β неизменными на всех остальных картах $U_\beta\cap U_\alpha\neq\varnothing$, то для выполнения условий (0.3) необходимо взять $\widetilde{h}_{\alpha\beta}=h_{\alpha\beta}h^{-1}$.

Матрица *кривизны связности* на карте U_α состоит из внешних 2-форм и имеет вид
$$\Phi_\alpha\equiv d\Omega_\alpha+\Omega_\alpha\wedge\Omega_\alpha=\begin{pmatrix}\Phi^0_0 & \Phi^0_j & 0\\ \Phi^i & \Phi^i_j & -\eta^{ik}\Phi^0_k\\ 0 & -\eta_{jk}\Phi^k & -\Phi^0_0\end{pmatrix}, \qquad \eta_{ik}\Phi^k_j+\eta_{jk}\Phi^k_i=0. \tag{0.9}$$

Если на каждой карте выполняется $\Phi^i=0$, получается пространство *без кручения*. В таком пространстве мы обозначаем
$$\Phi^i_j\equiv\frac{1}{2}\Phi^i_{jkl}\omega^k\wedge\omega^l, \qquad \Phi^i_{jkl}=-\Phi^i_{jlk}, \qquad \eta_{ip}\Phi^p_{jkl}\equiv\Phi_{ijkl}, \qquad \Phi^0_0\equiv\frac{1}{2}\Phi^0_{0kl}\omega^k\wedge\omega^l. \tag{0.10}$$

Матрица Φ_α под действием калибровочного преобразования $h \in H_{n,s}$ изменяется по закону $\widetilde{\Phi}_\alpha = h^{-1}\Phi_\alpha h$. В частности, преобразование (0.4) превращает Φ_α в

$$\widetilde{\Phi}_\alpha = \begin{pmatrix} \Phi^0_0 & \frac{1}{\lambda}\Phi^0_j & 0 \\ \lambda\Phi^i & \Phi^i_j & -\frac{1}{\lambda}\eta^{ik}\Phi^0_k \\ 0 & -\lambda\eta_{jk}\Phi^k & -\Phi^0_0 \end{pmatrix}. \tag{0.11}$$

В [3, с. 401] получено разложение *основного тензора* Φ_{ijkl} на инвариантные относительно преобразования нормализации слагаемые в 4-пространстве без кручения. В [2] эта формула была обобщена на случай произвольной размерности n:

$$\Phi_{ijkl} = C_{ijkl} - \frac{1}{n-2}\eta_{ij} \circ E_{kl} - \frac{1}{2}\eta_{ij} \circ \Phi^0_{0kl} - \frac{F}{2n\,(n-1)}\eta_{ij} \circ \eta_{kl}. \tag{0.12}$$

Здесь кружком $\circ$ обозначено произведение Кулкарни–Номидзу двух произвольных дважды ковариантных тензоров

$$a_{ij} \circ b_{kp} \equiv a_{ik}b_{jp} - a_{ip}b_{jk} + a_{jp}b_{ik} - a_{jk}b_{ip}, \tag{0.13}$$

C_{ijkl} — тензор Вейля квадратичной формы угловой метрики $\eta_{ij}\omega^i\omega^j$; остальные величины выражаются через основной тензор Φ_{ijkl}:

$$F \equiv \eta^{il}\eta^{jk}\Phi_{ijkl}, \quad \Phi_{jk} \equiv \eta^{il}\Phi_{ijkl}, \quad E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\Phi_{ij} + \Phi_{ji}\right) - \frac{1}{n}F\eta_{ij}, \quad \Phi^0_{0ij} = \frac{\Phi_{ij} - \Phi_{ji}}{n-2}. \tag{0.14}$$

Функция F при замене координат изменяется по закону скаляра. Как видно из (0.11) и (0.8), при перенормировке (0.4) 2-формы Φ^i_j не меняются, а $\widetilde{\omega}^i = \lambda\omega^i$, поэтому тензор Φ^i_{jkl} из (0.10), так же, как и Φ_{ijkl}, при перенормировке умножается на $\frac{1}{\lambda^2}$. Следовательно, и функция F, определяемая через Φ_{ijkl}, изменяется по закону $\widetilde{F} = \frac{1}{\lambda^2}F$. Нетрудно убедиться, что при преобразованиях (0.5) и (0.6) F не изменяется (все формулы преобразований компонент Ω_α и Φ_α приведены в [4, с. 182–183]. Кроме того, на пересечении $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ двух карт атласа, с помощью которого задана конформная связность без кручения, функции F_α и F_β на этих картах связаны формулой

$$F_\beta\left(u^1_\beta\left(u^i_\alpha\right), \ldots, u^n_\beta\left(u^i_\alpha\right)\right) = \frac{1}{\lambda^2\left(h_{\alpha\beta}\right)}F_\alpha\left(u^1_\alpha, \ldots, u^n_\alpha\right),$$

где $h_{\alpha\beta}$ — матрица калибровочного преобразования, указанного в (0.3), $\lambda\left(h_{\alpha\beta}\right)$ — левый верхний элемент матрицы $h_{\alpha\beta}$, а u^i_α и u^i_β — координаты на U_α и U_β.

Если на каждой карте U_α задана гладкая функция K_α с такими же свойствами, как и у функций F_α из семейства $\{F_\alpha\}$:

$$\widetilde{K}_\alpha = \frac{1}{\lambda^2}K_\alpha, \qquad K_\beta\left(u^1_\beta\left(u^i_\alpha\right), \ldots, u^n_\beta\left(u^i_\alpha\right)\right) = \frac{1}{\lambda^2\left(h_{\alpha\beta}\right)}K_\alpha\left(u^1_\alpha, \ldots, u^n_\alpha\right), \tag{0.15}$$

мы будем говорить, что семейство $\{K_\alpha\}$ есть *перенормируемый скаляр*. В частности, семейство $\{F_\alpha\}$ будем называть *главным перенормируемым скаляром*. Если $r \in \mathbb{R}$, то вместе с $\{K_\alpha\}$ семейство $\{rK_\alpha\}$ тоже будет перенормируемым скаляром. Если функция K_α знакопостоянна на карте U_α для каждого α, то на связном многообразии M_n в силу (0.15) этот знак будет один и тот же для всех карт. В этом случае будем говорить, что перенормируемый скаляр $\{K_\alpha\}$ *знакопостоянный* (положительный, отрицательный или нулевой).

Обращение в нуль любых слагаемых разложения (0.12) приводит к специальным классам пространств конформной связности без кручения ($\Phi^i = 0$). Простейший случай получается при

$$C_{ijkl} = 0, \qquad E_{kl} = 0, \qquad \Phi^0_{0kl} = 0, \qquad \Phi_{ijkl} = -\frac{F}{2n\,(n-1)}\eta_{ij} \circ \eta_{kl}, \tag{0.16}$$

что в силу (0.10) и (0.13) равносильно $\Phi^i_j = K\eta_{jk}\omega^k \wedge \omega^i$ и $K \equiv \frac{F}{n(n-1)}$. Будем говорить, что пространство конформной связности (и сама связность) имеет *скалярную кривизну*, если на каждой карте U_α

$$\Phi^i = 0, \qquad \Phi^i_j = K_\alpha \eta_{jk}\omega^i \wedge \omega^k, \tag{0.17}$$

где $\{K_\alpha\}$ — перенормируемый скаляр. Такое определение является естественным обобщением понятия риманова многообразия постоянной кривизны Риччи [5, с. 10] или псевдориманова многообразия постоянной кривизны [6, с. 74].

§ 1. Вычисление матрицы кривизны конформной связности со скалярной кривизной

Оказывается, при условиях (0.17) могут быть вычислены все остальные компоненты матрицы конформной кривизны (0.9).

Теорема 1. *Если $n \geqslant 4$, то на каждой карте U_α при выполнении* (0.17) *имеют место равенства*

$$\Phi^0_0 = 0, \qquad \Phi^0_j = \eta_{jk}\omega^k \wedge \left(\frac{1}{2} dK_\alpha + K_\alpha \omega^0_0\right). \tag{1.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из равносильности (0.17) и (0.16) следует $\Phi^0_{0kl} = 0$, что, с учетом обозначений (0.10), приводит к $\Phi^0_0 = 0$ при любом n.

Для доказательства второго равенства (1.1) запишем тождества Бианки $d\Phi + \Omega \wedge \Phi - \Phi \wedge \Omega = 0$ для 2-форм Φ^i_j:

$$d\Phi^i_j + \omega^i \wedge \Phi^0_j + \omega^i_k \wedge \Phi^k_j - \Phi^i_k \wedge \omega^k_j - \eta^{ip}\eta_{jq}\Phi^0_p \wedge \omega^q = 0. \tag{1.2}$$

Из $\Phi^i = 0$ и (0.9) следует, что $d\omega^i = \omega^k \wedge \omega^i_k + \omega^0_0 \wedge \omega^i$. Дифференцируем внешне $(0.17)_2$

$$d\Phi^i_j = dK_\alpha \wedge \eta_{jk}\omega^k \wedge \omega^i + K_\alpha \eta_{jk}\omega^p \wedge \omega^k_p \wedge \omega^i - K_\alpha \eta_{jk}\omega^k \wedge \omega^p \wedge \omega^i_p + 2K_\alpha \eta_{jk}\omega^0_0 \wedge \omega^k \wedge \omega^i.$$

Подставляем это в (1.2) и, используя $(0.17)_2$, получаем

$$\left(dK_\alpha + 2K_\alpha \omega^0_0\right) \wedge \eta_{jk}\omega^k \wedge \omega^i + \omega^i \wedge \Phi^0_j - \eta^{ip}\eta_{jq}\Phi^0_p \wedge \omega^q = 0. \tag{1.3}$$

Умножим уравнение (1.3) внешне на ω^i, используя (0.2), и придем к $\Phi^0_i \wedge \omega^i \wedge \omega^j = 0$ (нет суммирования по i). Отсюда следует, что внешняя 3-форма $\Phi^0_i \wedge \omega^i$ (нет суммирования по i), в силу произвольности j, содержит множителем каждую из внешних форм $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^n$. При $n \geqslant 4$ это равносильно $\Phi^0_i \wedge \omega^i = 0$, снова нет суммирования по i. Это означает, что внешняя 2-форма Φ^0_i содержит множителем ω^i, то есть существуют такие 1-формы θ^i, что

$$\Phi^0_i = \sum_k \eta_{ik}\theta^k \wedge \omega^k. \tag{1.4}$$

Подставим это выражение в (1.3):

$$\left(dK_\alpha + 2K_\alpha \omega^0_0\right) \eta_{jk}\omega^k \wedge \omega^i + \omega^i \wedge \sum_k \eta_{jk}\theta^k \wedge \omega^k - \eta_{jk}\theta^i \wedge \omega^i \wedge \omega^k = 0$$

и свернем с η^{lj}:

$$\left(dK_\alpha + 2K_\alpha \omega^0_0 + \theta^l + \theta^i\right) \wedge \omega^l \wedge \omega^i = 0.$$

Отсюда следует, что 1-форма $dK_\alpha + 2K_\alpha \omega^0_0 + \theta^l + \theta^i$ выражается только через ω^l и ω^i, то есть

$$dK_\alpha + 2K_\alpha \omega^0_0 + \theta^l + \theta^i = \alpha_1 \omega^l + \beta_1 \omega^i, \qquad \alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}.$$

Это равенство справедливо при каждом l и любом $i \neq l$. Возьмем какой-нибудь произвольный индекс k, отличный от l и i, и запишем

$$dK_\alpha + 2K_\alpha\omega_0^0 + \theta^l + \theta^k = \alpha_2\omega^l + \beta_2\omega^k, \qquad \alpha_2, \beta_2 \in \mathbb{R}.$$
$$dK_\alpha + 2K_\alpha\omega_0^0 + \theta^k + \theta^i = \alpha_3\omega^k + \beta_3\omega^i, \qquad \alpha_3, \beta_3 \in \mathbb{R}.$$

Из последних трех уравнений сложим первые два, а третье вычтем:

$$dK_\alpha + 2K_\alpha\omega_0^0 + 2\theta^l = (\alpha_1 + \alpha_2)\,\omega^l + (\beta_1 + \beta_3)\,\omega^i + (\beta_2 + \alpha_3)\,\omega^k.$$

В силу произвольности i и k получаем $\beta_1 + \beta_3 = \beta_2 + \alpha_3 = 0$, то есть

$$\theta^l = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)\,\omega^l - \frac{1}{2}dK_\alpha - K_\alpha\omega_0^0.$$

Подставим это в (1.4) и получим $(1.1)_2$. □

Следствие 1 (теорема Картана). *Если $\Phi^i = 0$ и $\Phi^i_j = 0$, то в размерности $n \geqslant 4$ матрица (0.9) кривизны конформной связности — нулевая.*

Это утверждение было доказано Картаном [1, с. 167], но только для случая положительно-определенной угловой метрики.

§ 2. Конформная связность, порожденная перенормируемым скаляром

Пусть $\{K_\alpha\}$ — перенормируемый скаляр и $\{\Omega_\alpha\}$ — семейство матриц конформной связности (не обязательно без кручения) многообразия M_n. Пусть на каждой карте U_α матрица $\widetilde{\Omega}_\alpha$ отличается от матрицы Ω_α только заменой 1-форм $\underset{\alpha}{\omega}{}^0_j$ 1-формами

$$\underset{\alpha}{\widetilde{\omega}}{}^0_j = \underset{\alpha}{\omega}{}^0_j + \frac{1}{2}K_\alpha\eta_{jk}\underset{\alpha}{\omega}{}^k. \tag{2.1}$$

Мы помечаем индексом α внизу элементы матриц Ω_α и $\widetilde{\Omega}_\alpha$.

Теорема 2. *Семейство матриц $\left\{\widetilde{\Omega}_\alpha\right\}$ задает на M_n новую конформную связность с теми же переходными калибровочными матрицами $h_{\alpha\beta}$, что и в формуле (0.3). При этом на каждой карте U_α будет*

$$\widetilde{\Phi}^i = \Phi^i, \qquad \widetilde{\Phi}^0_0 = \Phi^0_0, \qquad \widetilde{\Phi}^i_j = \Phi^i_j + K\eta_{jk}\omega^i \wedge \omega^k \tag{2.2}$$

(мы убрали для краткости индекс α).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим разность

$$\widetilde{\Omega}_\alpha - \Omega_\alpha \equiv \theta_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}K_\alpha\eta_{jk}\underset{\alpha}{\omega}{}^k & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}K_\alpha\underset{\alpha}{\omega}{}^i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Переходная калибровочная матрица $h_{\alpha\beta}$ имеет вид (0.7). Подставим $\widetilde{\Omega}_\alpha = \Omega_\alpha + \theta_\alpha$ в правую часть (0.3):

$$(h_{\alpha\beta})^{-1}\,dh_{\alpha\beta} + (h_{\alpha\beta})^{-1}\,\widetilde{\Omega}_\alpha h_{\alpha\beta} = \Omega_\beta + (h_{\alpha\beta})^{-1}\,\theta_\alpha h_{\alpha\beta} =$$
$$= \Omega_\beta + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2\lambda}K_\alpha\eta_{pk}\underset{\alpha}{\omega}{}^k\lambda^p_j & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2\lambda}K_\alpha\left(\lambda^{-1}\right)^i_k\underset{\alpha}{\omega}{}^k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \Omega_\beta + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}K_\beta\eta_{jk}\underset{\beta}{\omega}{}^k & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}K_\beta\underset{\beta}{\omega}{}^i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \Omega_\beta + \theta_\beta = \widetilde{\Omega}_\beta.$$

Здесь мы использовали то, что $K_\beta = \frac{1}{\lambda^2} K_\alpha$, и формулу

$$\underset{\beta}{\omega}^i = \left(\lambda^{-1}\right)^i_k \lambda \underset{\alpha}{\omega}^k, \tag{2.3}$$

справедливость которой следует из [4, с. 182–183] и которая показывает, как изменяются формы ω^k при действии всех трех калибровочных преобразований (0.4)–(0.6). Формула (0.3) для связи $\widetilde{\Omega}_\alpha$ и $\widetilde{\Omega}_\beta$ доказана, значит, семейство $\left\{\widetilde{\Omega}_\alpha\right\}$ задает на M_n новую конформную связность. Осталось доказать (2.2).

Из (0.9) следует, что на карте U_α формы $\Phi^i = d\omega^i + \omega^i_k \wedge \omega^k$ не содержат ω^0_j, поэтому не меняются при изменениях (2.1). Далее,

$$\widetilde{\Phi}^0_0 = d\widetilde{\omega}^0_0 + \widetilde{\omega}^0_k \wedge \widetilde{\omega}^k = d\omega^0_0 + \left(\omega^0_k + \frac{1}{2} K_\alpha \eta_{jk} \omega^j\right) \wedge \omega^k = d\omega^0_0 + \omega^0_k \wedge \omega^k = \Phi^0_0,$$

так как $\eta_{jk}\omega^j \wedge \omega^k = 0$ в силу симметричности η_{jk}. Наконец,

$$\widetilde{\Phi}^i_j = d\widetilde{\omega}^i_j + \widetilde{\omega}^i_k \wedge \widetilde{\omega}^k_j + \widetilde{\omega}^i \wedge \widetilde{\omega}^0_j + \eta^{ik} \widetilde{\omega}^0_k \wedge \eta_{jl} \widetilde{\omega}^l =$$
$$= d\omega^i_j + \omega^i_k \wedge \omega^k_j + \omega^i \wedge \left(\omega^0_j + \frac{K}{2}\eta_{jk}\omega^k\right) + \eta^{ik}\left(\omega^0_k + \frac{K}{2}\eta_{pk}\omega^p\right) \wedge \eta_{jl}\omega^l = \Phi^i_j + K\eta_{jk}\omega^i \wedge \omega^k,$$

что и требовалось доказать. □

Следствие 2. *На всяком многообразии конформной связности без кручения имеется конформная связность, у которой главный перенормируемый скаляр $\{F_\alpha\}$ равен нулю.*

Доказательство. Если многообразие без кручения, то на каждой карте справедливо разложение (0.12). На каждой карте изменим матрицы связности по правилу (2.1) $\widetilde{\omega}^0_j = \omega^0_j - \frac{1}{4n} F \eta_{jk} \omega^k$ и по теореме 2 получим новую конформную связность, у которой $\widetilde{\Phi}^i_j = \Phi^i_j - \frac{1}{2n} F \eta_{jk} \omega^i \wedge \omega^k$ или, согласно (0.10),

$$\frac{1}{2}\widetilde{\Phi}^i_{jpk}\omega^p \wedge \omega^k = \frac{1}{2}\Phi^i_{jpk}\omega^p \wedge \omega^k - \frac{1}{2n} F \eta_{jk} \delta^i_p \omega^p \wedge \omega^k.$$

Отсюда $\widetilde{\Phi}^i_{jpk} = \Phi^i_{jpk} - \frac{1}{n} F \eta_{jk} \delta^i_p$. Свернем по индексам i и k, используя обозначение $(0.14)_2$

$$\widetilde{\Phi}_{jp} = \Phi_{jp} - \frac{1}{n} F \eta_{jp}.$$

Свертка с η^{jp} дает $\widetilde{F} = F - F = 0$, что и доказывает следствие 2. □

Следствие 3. *При $n \geqslant 4$ на всяком многообразии конформной связности M_n со скалярной кривизной имеется конформная связность с нулевой матрицей кривизны.*

Доказательство. Если многообразие имеет скалярную кривизну, то, согласно (0.17), на каждой карте U_α будет $\Phi^i = 0$, $\Phi^i_j = K_\alpha \eta_{jk} \omega^i \wedge \omega^k$. Изменив компоненты матрицы связности по формуле, аналогичной (2.1), $\widetilde{\omega}^0_j = \omega^0_j - \frac{1}{2} K_\alpha \eta_{jk} \omega^k$, получим новую конформную связность с $\widetilde{\Phi}^i = 0$, $\widetilde{\Phi}^i_j = 0$. По следствию 1, все остальные компоненты матрицы кривизны также будут равны нулю. □

Ответ на обратный вопрос (существует ли на многообразии с нулевой матрицей конформной кривизны конформная связность с ненулевой скалярной кривизной?) зависит от существования ненулевых перенормируемых скаляров. На этот вопрос мы ответим в следующем параграфе.

§ 3. Существование перенормируемых скаляров

Пусть нам задано произвольное многообразие M_n с конформной связностью, покрытое координатными окрестностями $\{U_\alpha\}$ с заданными на них матрицами (0.1) и переходными калибровочными матрицами $h_{\alpha\beta}$ из (0.3). На любом пересечении $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ задана функция $\lambda_{\alpha\beta} = \lambda(h_{\alpha\beta})$ — параметр преобразования перенормировки, однозначно определяемый матрицей $h_{\alpha\beta}$ (ее левый верхний элемент). Доопределим функцию $\lambda_{\alpha\beta}$ на всем множестве U_α, положив ее равной 1 на $U_\alpha \setminus U_\beta$. Аналогичные действия выполним на всех остальных картах многообразия M_n. Определим теперь на карте U_α функцию

$$T_\alpha \equiv \sum_\beta (\lambda_{\alpha\beta})^2 \varphi_\beta, \tag{3.1}$$

где $\{\varphi_\alpha\}$ — разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{U_\alpha\}$. Очевидно, $T_\alpha > 0$. Можно считать, что суммирование ведется по всем β, полагая, что $\lambda_{\alpha\beta} = 0$, если $U_\alpha \cap U_\beta = \varnothing$. При $\beta = \alpha$ берем $\lambda_{\alpha\alpha} = 1$ — параметр преобразования перенормировки в тождественном преобразовании $h_{\alpha\alpha}$ матрицы Ω_α на карте U_α, так как единичная матрица $h_{\alpha\alpha}$ удовлетворяет (0.3):

$$\Omega_\alpha = (h_{\alpha\alpha})^{-1} dh_{\alpha\alpha} + (h_{\alpha\alpha})^{-1} \Omega_\alpha h_{\alpha\alpha}.$$

Утверждение 1. *Функция T_α является гладкой на карте U_α.*

Доказательство. Рассмотрим одно слагаемое из формулы (3.1) $(\lambda_{\alpha\beta})^2 \varphi_\beta$ и докажем, что оно гладкое на U_α. Выберем произвольную точку $X \in U_\alpha$ и рассмотрим два случая. Первый случай. Точка X принадлежит носителю функции φ_β, то есть $X \in \mathrm{Supp}(\varphi_\beta)$. Тогда $X \in U_\alpha \cap U_\beta$. Поскольку множество $U_\alpha \cap U_\beta$ открыто и обе функции, $\lambda_{\alpha\beta}$ и φ_β, являются гладкими на $U_\alpha \cap U_\beta$, то и слагаемое $(\lambda_{\alpha\beta})^2 \varphi_\beta$ является гладким в точке X. Второй случай: $X \notin \mathrm{Supp}(\varphi_\beta)$. Так как $\mathrm{Supp}(\varphi_\beta)$ — замкнутое множество, разность $U_\alpha \setminus \mathrm{Supp}(\varphi_\beta)$ является открытой окрестностью точки X. В этой окрестности функция $(\lambda_{\alpha\beta})^2 \varphi_\beta \equiv 0$, так как $\varphi_\beta \equiv 0$, следовательно, функция $(\lambda_{\alpha\beta})^2 \varphi_\beta$ снова является гладкой в точке X. Наконец, частный случай $\beta = \alpha$ дает слагаемое $(\lambda_{\alpha\alpha})^2 \varphi_\alpha = \varphi_\alpha$, которое также является гладким на U_α. □

На всех остальных картах U_β построим функции T_β по формуле, аналогичной (3.1). При этом на $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ в силу (0.7) будет $\lambda_{\alpha\beta} = \frac{1}{\lambda_{\beta\alpha}}$.

Утверждение 2. *Функции T_α и T_β на пересечении $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ связаны формулой*

$$T_\beta = \frac{1}{(\lambda_{\alpha\beta})^2} T_\alpha = (\lambda_{\beta\alpha})^2 T_\alpha. \tag{3.2}$$

Доказательство. Из (3.1) имеем

$$T_\alpha = \varphi_\alpha + (\lambda_{\alpha\beta})^2 \varphi_\beta + (\lambda_{\alpha\gamma})^2 \varphi_\gamma + \ldots,$$

$$T_\beta = \varphi_\beta + (\lambda_{\beta\alpha})^2 \varphi_\alpha + (\lambda_{\beta\gamma})^2 \varphi_\gamma + \ldots = (\lambda_{\beta\alpha})^2 \left(\varphi_\alpha + \frac{1}{(\lambda_{\beta\alpha})^2} \varphi_\beta + \frac{(\lambda_{\beta\gamma})^2}{(\lambda_{\beta\alpha})^2} \varphi_\gamma + \ldots \right).$$

Покажем, что

$$\frac{(\lambda_{\beta\gamma})^2}{(\lambda_{\beta\alpha})^2} \varphi_\gamma = (\lambda_{\alpha\gamma})^2 \varphi_\gamma. \tag{3.3}$$

Первый случай: пусть точка $X \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$. Тогда, в силу условия коцикла [7, с. 153], $h_{\beta\gamma} h_{\alpha\beta} = h_{\alpha\gamma}$. Отсюда следует $\lambda_{\beta\gamma}\lambda_{\alpha\beta} = \lambda_{\alpha\gamma}$. Имеем $\frac{\lambda_{\beta\gamma}}{\lambda_{\beta\alpha}} = \frac{\lambda_{\alpha\gamma}}{\lambda_{\beta\alpha}\lambda_{\alpha\beta}} = \lambda_{\alpha\gamma}$, следовательно, равенство (3.3) в точке X выполняется. Второй случай: $X \notin U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$. Так как $X \in U_\alpha \cap U_\beta$, то $X \notin U_\gamma$. Поскольку $\operatorname{Supp}(\varphi_\gamma) \subset U_\gamma$, то $X \notin \operatorname{Supp}(\varphi_\gamma)$, и $\varphi_\gamma(X) = 0$. Равенство (3.3) снова выполняется. Итак,

$$T_\beta = (\lambda_{\beta\alpha})^2 \left(\varphi_\alpha + (\lambda_{\alpha\beta})^2 \varphi_\beta + (\lambda_{\alpha\gamma})^2 \varphi_\gamma + \dots\right) = (\lambda_{\beta\alpha})^2 T_\alpha = \frac{1}{(\lambda_{\alpha\beta})^2} T_\alpha.$$

Формула (3.2) доказана. □

Утверждение 3. *Функция T_α, заданная формулой (3.1), не меняется при преобразованиях нормализации и η-ортогональных преобразованиях, а при преобразованиях перенормировки с параметром λ меняется по закону*

$$\widetilde{T}_\alpha = \frac{1}{\lambda^2} T_\alpha.$$

Доказательство. Если матрицу конформной связности Ω_α подвергнуть калибровочному преобразованию h, то, как отмечалось во введении, для сохранения равенства (0.3) переходную калибровочную матрицу $h_{\alpha\beta}$ следует заменить на $\widetilde{h}_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} h^{-1}$. Тогда получится переходная калибровочная матрица для пары матриц конформной связности $\widetilde{\Omega}_\alpha$ и Ω_β. Согласно формуле (0.7) левые верхние элементы матриц $h_{\alpha\beta}$ и h^{-1} будут соответственно $\lambda_{\alpha\beta}$ и $\frac{1}{\lambda}$. Тогда левый верхний элемент матрицы $\widetilde{h}_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} h^{-1}$ будет $\widetilde{\lambda}_{\alpha\beta} = \frac{\lambda_{\alpha\beta}}{\lambda}$. При $\beta = \alpha$ имеем $\widetilde{h}_{\alpha\alpha} = h_{\alpha\alpha} h^{-1} = h^{-1}$, поэтому все равно $\widetilde{\lambda}_{\alpha\alpha} = \frac{1}{\lambda} = \frac{\lambda_{\alpha\alpha}}{\lambda}$. Таким образом, все слагаемые в правой части (3.1) при перенормировке умножатся на $\frac{1}{\lambda^2}$, что и доказывает утверждение 3. □

Утверждения 1, 2 и 3 означают, что семейство функций $\{T_\alpha\}$, построенных по формуле (3.1), есть положительный перенормируемый скаляр. Семейство $\{-T_\alpha\}$ будет отрицательным перенормируемым скаляром.

Если перенормируемый скаляр $\{T_\alpha\}$ знакопостоянен (положителен или отрицателен) и не равен нулю, то на любой карте U_α с помощью преобразования перенормировки (0.4) с параметром $\lambda = \sqrt{|T_\alpha|}$ функцию T_α можно свести к 1 или к -1. При этом матрица связности Ω_α изменится. Как отмечалось в доказательстве утверждения 3, для сохранения условий (0.3) при неизменных матрицах Ω_β необходимо все переходные матрицы $h_{\alpha\beta}$ умножить на матрицу преобразования перенормировки с параметром $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{|T_\alpha|}}$. Поскольку матрицы Ω_β остались неизменными, на картах U_β никаких преобразований не производилось, все функции T_β остались прежними, но стало $T_\alpha \equiv \pm 1$. На любой другой карте U_β аналогичным образом можно добиться, чтобы $T_\beta = \pm 1$, а все остальные функции из семейства $\{T_\alpha\}$ остались бы неизменными. Таким образом, на любом многообразии конформной связности всегда можно сделать так, чтобы на всех картах U_α одновременно было $T_\alpha \equiv \pm 1$. В этом случае ненулевой знакопостоянный перенормируемый скаляр $\{T_\alpha\}$ превратится в постоянную функцию $T = 1$ или $T = -1$, определенную на всем многообразии M_n. Тогда, как следует из (0.15), все переходные матрицы $h_{\alpha\beta}$ (0.7) будут иметь вид

$$h_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_j & -\frac{1}{2}\eta^{kl}\lambda_k\lambda_l \\ 0 & \lambda^i_j & -\lambda^i_p \eta^{pk}\lambda_k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_{\alpha\beta} = 1.$$

Поскольку любой другой знакопостоянный не равный нулю перенормируемый скаляр $\{H_\alpha\}$ преобразованиями перенормировки также можно на всех картах одновременно свести к ± 1, то, очевидно, с помощью преобразований перенормировки один знакопостоянный скаляр $\{T_\alpha\}$ может быть преобразован в другой $\{H_\alpha\}$, лишь бы они были одного знака. Это рассуждение доказывает единственность знакопостоянных перенормируемых скаляров $\{T_\alpha\}$ с точностью до преобразований перенормировки на каждой карте, поэтому доказана

Теорема 3. *На любом многообразии конформной связности, где можно построить разбиение единицы, существуют ровно три знакопостоянных перенормируемых скаляра: положительный, отрицательный и нулевой.*

Рассмотрим произвольную знакопеременную функцию $f(X)$, гладко зависящую от точки $X \in M_n$, определенную на всем многообразии M_n. Например, ее можно построить так:

$$f(X) = \varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3 - \varphi_4 + \ldots,$$

где $\{\varphi_\alpha\}$ — разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{U_\alpha\}$ многообразия M_n. Пусть $\{T_\alpha\}$ — положительный перенормируемый скаляр. Тогда семейство $\{K_\alpha\} \equiv \{f(X)\,T_\alpha\}$ является знакопеременным перенормируемым скаляром, потому что условия (0.15) выполнены в силу того, что $\{T_\alpha\}$ — перенормируемый скаляр, а гладкость и знакопеременность функций $f(X)\,T_\alpha$ очевидна. Поэтому справедлива

Теорема 4. *На любом многообразии конформной связности, где можно построить разбиение единицы, существуют знакопеременные перенормируемые скаляры.*

Из теорем 2, 3 и 4 вытекает справедливость утверждения, обратного следствию 3.

Теорема 5. *На всяком многообразии M_n конформной связности с нулевой матрицей кривизны существует конформная связность со скалярной кривизной любого вида: положительной, отрицательной и знакопеременной.*

Доказательство. Заменим на каждой карте U_α многообразия M_n в матрицах связности Ω_α формы $\underset{\alpha\,j}{\omega^0}$ по формуле (2.1): $\underset{\alpha\,j}{\widetilde{\omega}^0} = \underset{\alpha\,j}{\omega^0} + \frac{1}{2} K_\alpha \eta_{jk} \underset{\alpha}{\omega^k}$, где $\{K_\alpha\}$ — перенормируемый скаляр (положительный, отрицательный или знакопеременный), существование которого устанавливается теоремами 3 и 4. Тогда, согласно теореме 2, будет

$$\widetilde{\Phi}^i = \Phi^i = 0, \qquad \widetilde{\Phi}^i_j = \Phi^i_j + K_\alpha \eta_{jk} \omega^i \wedge \omega^k = K_\alpha \eta_{jk} \omega^i \wedge \omega^k,$$

что и доказывает теорему 5. □

На каждой карте U_α многообразия M_n имеется локальная угловая метрика $\psi_\alpha = \eta_{ij} \underset{\alpha}{\omega^i} \underset{\alpha}{\omega^j}$, которая была построена еще Картаном [1, с. 162] в пространстве конформной связности с положительной сигнатурой $s = n$. Формулы (2.3) и (0.6) показывают, что она инвариантна относительно преобразований нормализации и η-ортогональных преобразований и меняется лишь при перенормировке по закону $\widetilde{\psi}_\alpha = \lambda^2 \psi_\alpha$. Положительный перенормируемый скаляр $\{T_\alpha\}$ позволяет склеить из этих метрик глобальную конформно-инвариантную метрику.

Теорема 6. *На любом многообразии M_n конформной связности сигнатуры s, где можно построить разбиение единицы, существует глобальная калибровочно-инвариантная метрика сигнатуры s.*

Доказательство. Пусть $X \in M_n$ — произвольная точка. Если $X \in U_\alpha$, положим

$$\psi(X) \equiv T_\alpha \psi_\alpha = T_\alpha \eta_{ij} \underset{\alpha}{\omega^i} \underset{\alpha}{\omega^j}, \tag{3.4}$$

где $\{T_\alpha\}$ — положительный перенормируемый скаляр, существование которого следует из теоремы 3. Пусть еще $X \in U_\beta$, $h_{\alpha\beta}$ — переходная калибровочная матрица для $U_\alpha \cap U_\beta$ из (0.3), а $\lambda_{\alpha\beta}$ — левый верхний элемент матрицы $h_{\alpha\beta}$ (параметр перенормировки). Тогда, в силу (3.2), (2.3) и (0.6), в точке X

$$T_\beta = \frac{1}{(\lambda_{\alpha\beta})^2} T_\alpha, \qquad \psi_\beta = \eta_{ij} \underset{\beta}{\omega^i} \underset{\beta}{\omega^j} = (\lambda_{\alpha\beta})^2 \eta_{ij} \underset{\alpha}{\omega^i} \underset{\alpha}{\omega^j} = (\lambda_{\alpha\beta})^2 \psi_\alpha.$$

Отсюда $T_\beta \psi_\beta = T_\alpha \psi_\alpha$. Таким образом, квадратичная форма (3.4) определена корректно и, очевидно, является калибровочно-инвариантной. □

§ 4. Индуцированная конформная связность со скалярной кривизной на гиперповерхности конформного пространства

Конформное пространство сигнатуры s — это гиперквадрика проективного пространства P_{n+1}, заданная в проективных координатах уравнением

$$\eta_{ij}x^i x^j + 2x^0 x^{n+1} = 0, \qquad i,j = 1,2,\ldots,n, \tag{4.1}$$

$\eta_{ij} = 0$ при $i \neq j$, $\eta_{ii} = \pm 1$, разность между числом положительных и отрицательных η_{ii} равна s. С помощью билинейной формы, полярной форме (4.1), в P_{n+1} определяется скалярное произведение точек $X = (x^v)$ и $Y = (y^w)$, $v, w = 0, 1, \ldots, n+1$:

$$(X, Y) = \eta_{ij}x^i y^j + x^0 y^{n+1} + x^{n+1}y^0.$$

Зададим на квадрике (4.1) подвижной ортонормированный относительно этого скалярного произведения репер $\{X_v\}$ так, чтобы X_0 и X_{n+1} принадлежали бы квадрике (4.1), а X_i принадлежали бы пересечению касательных проективных плоскостей к квадрике в точках X_0 и X_{n+1}. Уравнения инфинитезимальных перемещений этого репера таковы:

$$dX_w = X_v\omega^v_w,$$

где матрица (ω^v_w) имеет вид (0.1). Как известно, пфаффовы формы не могут быть произвольными. Они должны удовлетворять уравнениям структуры конформного пространства:

$$d\omega^v_w + \omega^v_z \wedge \omega^z_w = 0, \qquad z = 0, 1, \ldots, n+1. \tag{4.2}$$

Зададим на квадрике (4.1) гиперповерхность Γ с помощью вполне интегрируемого дифференциального уравнения

$$\omega^n = 0, \tag{4.3}$$

причем будем считать, что $\eta_{nn} = 1$ (случай $\eta_{nn} = -1$ аналогичен). Внешнее дифференцирование (4.3) в силу (4.2) приводит к $\omega^n_i \wedge \omega^i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1$, что равносильно

$$\omega^n_i = \alpha_{ij}\omega^j, \qquad \alpha_{ij} = \alpha_{ji}. \tag{4.4}$$

Здесь и далее индексы i, j, k, l, m, p, q будут пробегать значения $1, 2, \ldots, n-1$. Дифференциальное продолжение равенства (4.4) имеет вид

$$d\alpha_{ij} - \alpha_{ik}\omega^k_j - \alpha_{jk}\omega^k_i = -\alpha_{ij}\omega^0_0 - \eta_{ij}\omega^0_0 + \beta_{ijk}\omega^k, \tag{4.5}$$

где β_{ijk} симметричны по всем индексам. Свертка этого равенства с η^{ij} дает

$$da = -a\omega^0_0 - (n-1)\,\omega^0_n + \beta_k\omega^k, \qquad a \equiv \eta^{ij}\alpha_{ij}, \qquad \beta_k \equiv \eta^{ij}\beta_{ijk}. \tag{4.6}$$

Из формул (4.5) и (4.6) вытекает, что величины

$$a_{ij} \equiv \alpha_{ij} - \frac{a}{n-1}\eta_{ij} \tag{4.7}$$

удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$da_{ij} - a_{ik}\omega^k_j - a_{jk}\omega^k_i = -a_{ij}\omega^0_0 + \overline{\beta}_{ijk}\omega^k, \qquad \overline{\beta}_{ijk} \overset{def}{=} \beta_{ijk} - \frac{1}{n-1}\eta_{ij}\beta_k$$

и потому образуют относительный тензор. Удалим из матрицы (ω^w_v) строку и столбец с номерами n. Получится матрица порядка $n+1$ снова вида (0.1):

$$\Omega = \begin{pmatrix} \omega^0_0 & \omega^0_j & 0 \\ \omega^i & \omega^i_j & -\eta^{ik}\omega^0_k \\ 0 & -\eta_{jk}\omega^k & -\omega^0_0 \end{pmatrix}, \qquad \eta_{ik}\omega^k_j + \eta_{jk}\omega^k_i = 0, \qquad i,j,k = 1,2,\ldots,n-1. \tag{4.8}$$

Она удовлетворяет всем алгебраическим условиям, необходимым для матрицы конформной связности. Поэтому на гиперповерхности Γ конформного пространства сигнатуры s индуцируется структура пространства конформной связности сигнатуры $s-1$, если $\eta_{nn}=1$ (и сигнатуры $s+1$, если $\eta_{nn}=-1$). Компоненты матрицы конформной кривизны, в силу (4.2) и (0.9), имеют вид

$$\Phi_0^0 = d\omega_0^0 + \omega_i^0 \wedge \omega^i = 0,$$
$$\Phi^i = d\omega^i + \omega^i \wedge \omega_0^0 + \omega_k^i \wedge \omega^k = 0,$$
$$\Phi_j^i = d\omega_j^i + \omega_k^i \wedge \omega_j^k + \omega^i \wedge \omega_j^0 + \eta^{ik}\eta_{jl}\omega_k^0 \wedge \omega^l = -\omega_n^i \wedge \omega_j^n = \eta^{ik}\omega_k^n \wedge \omega_j^n,$$
$$\Phi_j^0 = d\omega_j^0 + \omega_0^0 \wedge \omega_j^0 + \omega_k^0 \wedge \omega_j^k = -\omega_n^0 \wedge \omega_j^n.$$

Здесь n — индивидуальный индекс, размерность исходного конформного пространства, по нему нет суммирования. Первые два равенства означают, что индуцированная конформная связность на гиперповерхности Γ квадрики (4.1) всегда *эквиконформная* (термин введен А. В. Столяровым [8]). Третье равенство, в силу (4.4), показывает, что основной тензор конформной связности выражается через величины α_{ij} и η_{ij}:

$$\Phi_{jkm}^i = \eta^{ip}\left(\alpha_{pk}\alpha_{mj} - \alpha_{pm}\alpha_{kj}\right) = \eta^{ip}\alpha_{p[k}\alpha_{m]j}. \tag{4.9}$$

Точка X_n подвижного репера ортогональна всем точкам касательной проективной плоскости в точке X_0 гиперповерхности. Но этим же свойством обладает и любая точка проективной прямой

$$\lambda X_0 + X_n. \tag{4.10}$$

Если осуществить конформное преобразование репера

$$\widetilde{X}_0 = X_0, \quad \widetilde{X}_i = X_i, \quad \widetilde{X}_n = \lambda X_0 + X_n, \quad \widetilde{X}_{n+1} = X_{n+1} - \lambda X_n - \frac{1}{2}\lambda^2 X_0,$$

то в матрице конформной связности (4.8) изменятся только компоненты ω_j^0:

$$\widetilde{\omega}_j^0 = \omega_j^0 + \frac{1}{2}\lambda^2\eta_{jk}\omega^k - \lambda\omega_j^n,$$

а в матрице (ω_v^w) еще и следующие компоненты:

$$\widetilde{\omega}_j^n = \omega_j^n - \lambda\eta_{jk}\omega^k, \qquad \widetilde{\omega}_n^0 = \omega_n^0 + d\lambda + \lambda\omega_0^0. \tag{4.11}$$

Итак, индуцированная на гиперповерхности Γ конформного пространства конформная связность зависит от выбора функции λ. Среди точек вида (4.10) имеется так называемая *центральная точка* [9, с. 59]. Она получается при $\lambda = \frac{a}{n-1}$. Если за точку X_n подвижного репера выбрать центральную точку, то в силу (4.11) будет $\omega_j^n = a_{jk}\omega^k$, где a_{jk} определены формулой (4.7),

$$\eta^{ij}a_{ij} = 0. \tag{4.12}$$

При этом формула (4.9) примет вид

$$\Phi_{jkm}^i = \eta^{ip}a_{p[k}a_{m]j}. \tag{4.13}$$

Конформная связность, индуцированная на гиперповерхности Γ при $\lambda = \frac{a}{n-1}$, уже инвариантно определяется гиперповерхностью. Теперь к тензору (4.13) применим структурную формулу (0.12). Для этого найдем главный перенормируемый скаляр F, тензор Вейля C_{ijkl} и величину E_{ij} из (0.14) и (0.12). Свертка равенства (4.13) по индексам i и m с учетом (4.12) дает

$\Phi_{jk} = \eta^{lp} a_{jl} a_{pk}$. Отсюда

$$F = \eta^{jk}\eta^{lp} a_{lj} a_{pk}, \qquad E_{ik} = \eta^{lp} a_{il} a_{pk} - \frac{F}{n-1}\eta_{ik},$$
$$C_{ijkp} = a_{i[k} a_{p]j} + \frac{1}{n-3}\eta_{ij} \circ E_{kp} + \frac{F}{2\,(n-1)\,(n-2)}\eta_{ij} \circ \eta_{kp}.$$

Выясним, существуют ли такие тензоры a_{pk}, для которых

$$E_{ik} = 0, \qquad C_{ijkp} = 0, \qquad F \neq 0. \tag{4.14}$$

Теорема 7. *Индуцированная инвариантная конформная связность на гиперповерхности конформного пространства при $n \geqslant 4$ не может быть с ненулевой скалярной кривизной.*

Доказательство. Требуется доказать несовместность условий (4.14). Поднимем индекс k в равенстве

$$E_{ik} = \eta^{lp} a_{il} a_{pk} - \frac{F}{n-1}\eta_{ik} = 0$$

и получим

$$a_i^p a_p^l = \frac{F}{n-1}\delta_i^l, \qquad a_i^p \overset{def}{=} \eta^{jp} a_{ij}. \tag{4.15}$$

Равенство (4.15) показывает, что оператор a_i^p — простого типа, так как в противном случае в его жордановом представлении имелся бы блок вида

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}.$$

Квадрат этого блока равен

$$\begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda^2 \end{pmatrix}.$$

Он не имеет диагонального вида, в то время как оператор в правой части равенства (4.15) — диагональный. Итак, в жордановом представлении оператор a_i^p должен иметь диагональный вид. Квадрат диагональных элементов равен $\frac{F}{n-1}$, значит, $F > 0$, а диагональные элементы равны $\pm\sqrt{\frac{F}{n-1}}$. Так как след оператора a_i^p, в силу (4.12), равен нулю, то числа положительных и отрицательных диагональных элементов одинаковы. При четном n это дает несовместность условий (4.14).

В случае нечетного n для доказательства противоречивости условий (4.14) привлечем равенство $C_{ijkp} = 0$, которое при $E_{ik} = 0$ принимает вид

$$a_{i[k} a_{p]j} = -\frac{F}{2\,(n-1)\,(n-2)}\eta_{ij} \circ \eta_{kp}.$$

По формуле (0.13) легко проверить, что $\eta_{ij} \circ \eta_{kp} = 2\eta_{i[k}\eta_{p]j}$, поэтому предыдущее равенство запишется в виде

$$a_{i[k} a_{p]j} = -\frac{F}{(n-1)\,(n-2)}\eta_{i[k}\eta_{p]j}. \tag{4.16}$$

Опускание индекса в тензоре a_i^p с помощью η_{pk} сводится к умножению диагональной матрицы (a_i^p) на диагональную матрицу (η_{pk}), причем у второй матрицы по диагонали стоят числа ± 1. Поэтому матрица (a_{ik}) диагональная, а модули ее диагональных элементов равны $\sqrt{\frac{F}{n-1}}$. В частности, при $i = k = 1$, $p = j = 2$ будем иметь

$$a_{1[1}a_{2]2} = a_{11}a_{22} = \frac{\pm F}{n-1}; \qquad -\frac{F}{(n-1)\,(n-2)}\eta_{1[1}\eta_{2]2} = \frac{\pm F}{(n-1)\,(n-2)}.$$

Следовательно, при $n \geqslant 4$ равенство (4.16) невозможно. Теорема 7 доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Картан Э. Пространства аффинной, проективной и конформной связности. Казань: Изд-во Казанского университета, 1962. 210 с.
2. Кривоносов Л.Н., Лукьянов В.А. Структура основного тензора пространства конформной связности без кручения. Конформные связности на гиперповерхности проективного пространства // Сибирский журнал чистой и прикладной математики. 2017. Т. 17. № 2. С. 21–38.
3. Кривоносов Л.Н., Лукьянов В.А. Уравнения Эйнштейна на четырехмерном многообразии конформной связности без кручения // Журнал Сибирского федерального университета. Сер. Математика и физика. 2012. Т. 5. № 3. С. 393–408.
4. Кривоносов Л.Н., Лукьянов В.А. Калибровочно-инвариантные тензоры 4-многообразия конформной связности без кручения // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Физико-математические науки. 2014. Вып. 2 (35). С. 180–198. DOI: 10.14498/vsgtu1291
5. Бессе А. Многообразия Эйнштейна. М.: Мир, 1990. 703 с.
6. Вольф Д. Пространства постоянной кривизны. М.: Наука, 1982. 480 с.
7. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия: методы и приложения. Т. II. М.: Эдиториал УРСС, 1998. 278 с.
8. Столяров А.В. Пространство конформной связности // Изв. вузов. Матем. 2006. № 11. С. 42–54.
9. Акивис М.А. Инвариантное построение геометрии гиперповерхности конформного пространства // Матем. сб. 1952. Т. 31 (73). № 1. С. 43–75.

Поступила в редакцию 12.11.2017

Кривоносов Леонид Николаевич, к. ф.-м. н., доцент, кафедра прикладной математики, Нижегородский государственный технический университет, 603950, Россия, Нижний Новгород, ул. Минина, д. 24.
E-mail: l.n.krivonosov@gmail.com

Лукьянов Вячеслав Анатольевич, к. ф.-м. н., доцент, кафедра прикладной математики, Нижегородский государственный технический университет, 603950, Россия, Нижний Новгород, ул. Минина, д. 24.
E-mail: oxyzt@ya.ru

L. N. Krivonosov, V. A. Luk'yanov

Conformal connection with scalar curvature

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2018, vol. 28, issue 1, pp. 22–35 (in Russian).

Keywords: manifold with conformal connection, connection matrix, curvature matrix of connection, gauge transformations, rescalable scalar, conformal connection with scalar curvature, partition of unity, gauge-invariant metric.

MSC2010: 53A30

DOI: 10.20537/vm180103

A conformal connection with scalar curvature is defined as a generalization of a pseudo-Riemannian space of constant curvature. The curvature matrix of such connection is computed. It is proved that on a conformally

МАТЕМАТИКА 2018. Т. 28. Вып. 1

connected manifold with scalar curvature there is a conformal connection with zero curvature matrix. We give a definition of a rescalable scalar and prove the existence of rescalable scalars on any manifold with conformal connection where a partition of unity exists. It is proved: 1) on any manifold with conformal connection and zero curvature matrix there exists a conformal connection with positive, negative and alternating scalar curvature; 2) on any conformally connected manifold there exists a global gauge-invariant metric; 3) on a hypersurface of a conformal space the induced conformal connection can not be of nonzero scalar curvature.

REFERENCES

1. Cartan E. *Sur les espaces a connexion conforme*, Ann. Soc. Polon. Math., 1923, vol. 2, p. 171–221. Translated under the title *Prostranstva affinnoi, proektivnoi i konformnoi svyaznosti*, Kazan: Kazan State University, 1962, 210 p.
2. Krivonosov L.N., Luk'yanov V.A. The structure of the main tensor of conformally connected torsion-free space. Conformal connections on hypersurfaces of projective space, *Siberian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 2017, issue 2, pp. 21–38 (in Russian).
3. Krivonosov L.N., Luk'yanov V.A. Einstein's equations on a 4-manifold of conformal torsion-free connection, *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.*, 2012, vol. 5, issue 3, pp. 393–408 (in Russian).
4. Krivonosov L.N., Luk'yanov V.A. Gauge-invariant tensors of 4-manifold with conformal torsion-free connection and their applications for modeling of space-time, *Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2014, issue 2(35), pp. 180–198 (in Russian). DOI: 10.14498/vsgtu1291
5. Besse A. *Einstein manifolds*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1987, XII+510 p. DOI: 10.1007/978-3-540-74311-8
6. Wolf D. *Spaces of constant curvature*, Berkley, California: University of California, 1972. Translated under the title *Prostranstva postoyannoi krivizny*, Moscow: Nauka, 1982, 480 p.
7. Dubrovin B.A., Novikov S.P., Fomenko A.T. *Sovremennaya geometriya: metody i prilozheniya. Tom II* (Modern geometry: methods and applications. Volume II), Moscow: Editorial URSS, 1998, 278 p.
8. Stolyarov A.V. A space with conformal connection, *Russian Mathematics*, 2006, vol. 50, no. 11, pp. 40–51.
9. Akivis M.A. Invariant construction of the geometry of a hypersurface of a conformal space, *Mat. Sb. (N.S.)*, 1952, vol. 31(73), no. 1, pp. 43–75 (in Russian).

Received 12.11.2017

Krivonosov Leonid Nikolaevich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Applied Mathematics, Nizhni Novgorod State Technical University, ul. Minina, 24, Nizhni Novgorod, 603950, Russia.
E-mail: l.n.krivonosov@gmail.com

Luk'yanov Vyacheslav Anatol'evich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Applied Mathematics, Nizhni Novgorod State Technical University, ul. Minina, 24, Nizhni Novgorod, 603950, Russia.
E-mail: oxyzt@ya.ru