ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ

МАТЕМАТИКА 2018. Т. 28. Вып. 1

УДК 517.977.5

© *А. А. Березин*

ПОЗИЦИОННЫЕ СТРАТЕГИИ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ СРЕДНИМ ПОЛЕМ НА ПРОСТРАНСТВЕ КОНЕЧНОГО ЧИСЛА СОСТОЯНИЙ[1]

Рассматривается задача оптимального управления системой бесконечного числа однотипных агентов. Пространство допустимых для агентов состояний является конечным. В рассматриваемой постановке имеется общий для всех агентов оптимизируемый функционал и общий центр управления, выбирающий стратегию для агентов. Предполагается, что выбираемая стратегия является позиционной. В настоящей работе рассматривается случай, когда динамика состояний агентов задается некоторой марковской цепью с непрерывным временем. Предполагается, что матрица Колмогорова этой цепи в каждом состоянии зависит от текущего состояния, выбранного управления и распределения всех агентов. Для такой задачи в работе показано, что решение в классе позиционных стратегий может быть построено на основе решения детерминированной задачи оптимального управления в конечномерном фазовом пространстве.

Ключевые слова: марковская цепь, задача управления, среднее поле.

DOI: 10.20537/vm180102

Введение

В работе рассматривается задача оптимального управления системой бесконечного числа однотипных агентов с конечным числом состояний. Мы предполагаем, что все агенты действуют коалиционно и стремятся к максимизации суммарного результата. В этом случае можно считать, что есть некоторый общий центр, выбирающий стратегию, одинаковую для всех игроков. В работе мы предполагаем, что эта стратегия строится позиционно, т. е. она строится на основе информации о текущем положении конкретного агента и о текущем распределении всех агентов.

Задачу управления системой бесконечного числа агентов, действующих коалиционно, принято называть задачей управления средним полем [1]. Такие задачи тесно связаны с играми среднего поля [10]. Основное различие состоит в том, что в задачах управления средним полем агенты действуют коалиционно, в то время как в теории игр среднего поля предполагается, что каждый агент стремится к максимизации своего выигрыша.

Прежде всего в теории управления средним полем рассматривались постановки, когда динамика каждого агента задается дифференциальным или стохастическим дифференциальным уравнением [2, 4–6, 11]. В этом случае получены аналоги принципа максимума Понтрягина и принципа динамического программирования. Также отметим работы [3, 7, 9], в которых изучались задачи управления системой большого, но конечного числа агентов на основе решения детерминированной задачи управления. В этих работах рассматривался случай, когда стратегии не зависят от положения каждого конкретного агента, а изменяют сразу всю динамику.

В настоящей работе рассматривается случай, когда множество возможных состояний агентов конечно, и динамика этих состояний подчиняется некоторой марковской цепи с непрерывным временем. При этом предполагается, что переходные вероятности в каждом состоянии зависят от текущего состояния, выбранного управления и распределения всех агентов. Для этой задачи в работе показано, что решение в классе позиционных стратегий может быть построено на основе решения задачи оптимального управления в конечномерном фазовом пространстве.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17–11–01093).

§ 1. Основные обозначения и определения

Рассмотрим систему управления средним полем с конечным количеством состояний. Предполагается, что система состоит из бесконечного (континуального) числа агентов, каждый агент может находиться в одном из N состояний. При этом динамика каждого агента задается управляемой марковской цепью. Предположим, что матрица Колмогорова этой цепи включает текущее распределение агентов в качестве параметра. Пусть далее $m = (m_1, \ldots, m_N)$ обозначает распределение агентов по состояниям. Отметим, что распределение на N состояниях есть элемент N-мерного симплекса Σ^N:

$$\Sigma^N \triangleq \{m = (m_1, \ldots, m_N) \in \mathbb{R}^N : m_i \geqslant 0,\ m_1 + \ldots + m_N = 1\}.$$

Таким образом, $m \in \Sigma^N$.

Обозначим через $Q(t, m, u)$ матрицу Колмогорова, которая задает динамику каждого агента. Здесь u — управление каждого агента. Напомним, что для всех $t \in [0, T]$, $m \in \Sigma^N, u \in U$ матрица $Q(t, m, u)$ имеет размеры $N \times N$ и обладает свойствами:

- $Q_{ij}(t, m, u) \geqslant 0$, $i \neq j$;
- $\sum\limits_j Q_{ij}(t, m, u) = 0$.

Мы предполагаем, что агенты действуют коалиционно, т. е. существует некоторый общий центр, который выбирает управление для всех агентов. Будем рассматривать позиционные стратегии. А именно, будем предполагать, что в момент времени t, в случае если распределение игроков есть m, а агент находится в состоянии i, он использует стратегию $u_i(t, m)$. Стратегия $u(t, m)$ является вектором $(u_i(t, m))_{i=\overline{1,N}}$.

Определение 1. Пусть $t_0 \in [0, T]$ — начальный момент времени, $m_0 \in \Sigma^N$ — начальное распределение агентов. Будем говорить, что набор $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[t_0,T]}, P, X, m(\cdot))$ является движением, порожденным стратегией $u(t, m) = (u_i(t, m))_{i=\overline{1,N}}$, если

- $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[t_0,T]}, P)$ — вероятностное пространство с фильтрацией;
- X — случайный процесс, определенный на $[0, T]$ со значениями в $\{1, \ldots, N\}$, согласованный с фильтрацией $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[t_0,T]}$;
- $X(t)$ — состояние марковской цепи с матрицей переходов $\widehat{Q}_{ij}(t) \triangleq Q_{ij}(t, m(t), u_i(t, m(t)))$;
- $m(\cdot) : [t_0, T] \to \Sigma^N$;
- $m_i(t) = P(X(t) = i)$.

Предполагаем, что целью управления является максимизация функционала

$$E\left(\sigma(X(T), m(T)) + \int_{t_0}^{T} g(t, X(t), m(t), u_{X(t)}(t, m(t)))dt\right)$$

Обозначим $Q(t, m(t), u(t, m(t))$ матрицу, состоящую из элементов $Q_{ij}(t, m(t), u_i(t, m(t)))$, где $i, j = \overline{1, N}$.

§ 2. Основной результат

Предложение 1. *Пусть* $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[t_0,T]}, P, X, m(\cdot))$ *является движением, порожденным стратегией* $(u_i(t,m))_{i=\overline{1,N}}$. *Тогда*

$$\frac{d}{dt}m(t) = m(t)Q(t, m(t), u(t, m(t))), \tag{1}$$

$$E\left(\sigma(X(T), m(T)) + \int_{t_0}^{T} g(t, X(t), m(t), u_{X(t)}(t, m(t)))\,dt\right) = \\ = \sum_{i=1}^{N} \sigma(i, m(T))m_i(T) + \int_{t_0}^{T}\sum_{i=1}^{N} g(t, i, m(t), u_i(t, m(t)))m_i(t)\,dt = \\ = J(t_0, m(\cdot), u(\cdot,\cdot)). \tag{2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнение (1) — это уравнение Колмогорова для марковской цепи с непрерывным временем и матрицей Колмогорова $Q(t, m(t), u(t, m(t)))$.

Далее, поскольку $m_i(t) = P(X(t) = i)$,

$$E\left(\sigma(X(T), m(T)) + \int_{t_0}^{T} g(t, X(t), m(t), u_{X(t)}(t, m(t)))\,dt\right) = \\ = E\left(\sigma(X(T), m(T))\right) + E\left(\int_{t_0}^{T} g(t, X(t), m(t), u_{X(t)}(t, m(t)))\,dt\right) = \\ = \sum_{i=1}^{N} \sigma(i, m(T))P(X(T) = i) + \sum_{i=1}^{N}\left(\int_{t_0}^{T} g(t, i, m(t), u_i(t, m(t)))P(X(t) = i)\,dt\right) = \\ = \sum_{i=1}^{N} \sigma(i, m(T))m_i(T) + \int_{t_0}^{T}\sum_{i=1}^{N} g(t, i, m(t), u_i(t, m(t)))m_i(t)\,dt$$

□

Определение 2. Будем говорить, что стратегия $u^*(t, m)$ является оптимальной в (t_0, m_0), если существует порожденное этой стратегией и начальным положением движение $(\Omega^*, \mathcal{F}^*, \{\mathcal{F}^*_t\}_{t\in[t_0,T]}, P^*, X^*, m^*(\cdot))$ такое, что для любой другой стратегии $u(t, m)$ и порожденного ей движения $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[t_0,T]}, P, X, m(\cdot))$

$$J(t_0, m^*(\cdot), u^*(\cdot,\cdot)) \geqslant J(t_0, m(\cdot), u(\cdot,\cdot)).$$

Движение, порожденное оптимальной стратегией, назовем оптимальным движением.

Предложение 2. *Пусть стратегия* $u(t, m)$ *такова, что существует решение* $m(\cdot)$ *уравнения* (1). *Тогда существует движение* $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[t_0,T]}, P, X, m(\cdot))$, *порожденное стратегией* $u(t, m)$, *такое, что для него выполнено равенство* (2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Стратегию $u(t, m)$ можно подставить в матрицу переходов $Q(t, m(t), u(t, m(t)))$ и получить $\widehat{Q}_{ij}(t) = Q_{ij}(t, m(t), u_i(t, m(t)))$.

Покажем существование марковской цепи с матрицей Колмогорова $\widehat{Q}_{ij}(t)$, воспользовавшись методом, описанным в книге [8]. Рассмотрим систему в расширенном фазовом пространстве и введем дополнительную переменную τ. Добавим к системе уравнение $\frac{d}{dt}\tau = 1$. Положим $b = (0, 1)$. Сопоставим каждому состоянию марковской цепи $i \in \mathbb{R}$ пару $(i, 0)$. Введем меры

$$\nu(\tau, (x_1, x_2), M) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1, j\neq i}^{N} \widehat{Q}_{ij}(\tau)\delta_{j-i}(M), & \text{если } x_1 = i,\ x_2 = 0, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $M \subset \mathbb{R}$ — борелевское.

Определим генератор $\Lambda : C_b^1(\mathbb{R}^2) \to C_b(\mathbb{R}^2)$ по правилу

$$(\Lambda\phi)(\tau, x) = (b, \nabla\phi(x)) + \int_{\mathbb{R}^2} (\phi(x+y) - \phi(x))\nu(\tau, x, dy). \tag{3}$$

Символ оператора $(-\Lambda)$:

$$p(\tau, x, \xi) = -i(b(\tau, x), \xi) + \int_{\mathbb{R}^2} (1 - e^{i\xi y} + i1_{|y| \leqslant 1}(y)(\xi, y))\nu(\tau, x, dy)$$

непрерывен.

Покажем, что $\sup\limits_x \left(\dfrac{|b|}{1+|x|} + \displaystyle\int_{|y|>1} \nu(\tau, x, dy) \right) < \infty$.

Действительно, имеем

- $|x| \geqslant 0$, и $|b| = 1$, поэтому $\dfrac{|b|}{1+|x|} < \infty$.
- $\displaystyle\int_{|y|>1} \nu(\tau, x, dy) \leqslant \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \widehat{Q}_{ij}(\tau)\delta_{j-i}(M) < \infty$.

Наконец покажем, что $\sup\limits_x \displaystyle\int_{|y|>1} \ln^+(|y|)\nu(\tau, x, dy) < \infty$. В самом деле мера ν сосредоточена на конечном наборе точек, и интеграл равен конечной сумме значений логарифма.

Таким образом, выполнены условия [8, Теорема 5.4.2], а значит, существует набор $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[t_0,T]}, P, Y)$ — решение проблемы мартингалов для генератора Λ, т. е. существует вероятностное пространство с фильтрацией $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[t_0,T]}, P)$ и существует случайный процесс $Y : [0, T] \times \Omega \to \{1, \dots, N\}$, согласованный с фильтрацией $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[t_0,T]}$, такой, что $\forall\phi \in C(\mathbb{R}^2)$ $\phi(Y(t)) - \displaystyle\int_{t_0}^{t} \Lambda\phi(\tau)d\tau$ — мартингал.

Заметим, что для состояний случайного процесса $Y(t) = (X(t), Z(t))$ верно $Z(t) = t + C$, поскольку $\frac{d}{dt}\tau = 1$. Это позволяет установить связь с исходным фазовым пространством. Рассмотрим $\widehat{\phi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Пусть $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Обозначим проекцию меры по первой координате через $\widehat{\nu}$, таким образом, $\widehat{\nu}(t, x_1, M) = \nu(\tau, x, M)$, где $M \subset \mathbb{R}$ — борелевское.

Определим генератор $L_t : C(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$ по правилу

$$(L_t\widehat{\phi})(x) \triangleq \int_{\mathbb{R}} (\widehat{\phi}(x+y) - \widehat{\phi}(x))\widehat{\nu}(t, x, dy). \tag{4}$$

Покажем связь генераторов (3) и (4). Положим $\phi(x_1, x_2) = \widehat{\phi}(x_1)$. Для таких функций $L_t\widehat{\phi} = \Lambda\phi$. Поскольку $\widehat{\phi}(X(t)) = \phi(X(t), Z(t))$, то

$$\frac{d}{dt}E(\widehat{\phi}(X(t))) = \frac{d}{dt}E\phi(X(t), Z(t)).$$

С другой стороны

$$\frac{d}{dt}E\phi(X(t), Z(t)) = E(\Lambda\phi)(X(t), Z(t)).$$

При этом

$$E(\Lambda\phi)(X(t), Z(t)) = E(L_t\widehat{\phi})(X(t)).$$

Поэтому для процесса X справедливо равенство

МАТЕМАТИКА 2018. Т. 28. Вып. 1

$$\frac{d}{dt}E(\widehat{\phi}(X(t))) = E(L_t\widehat{\phi})(X(t)). \tag{5}$$

Напомним, что генератор — это эквивалентный способ описания марковской цепи. Покажем, что если справедливо равенство (5), то $X(t)$ описывает состояние марковской цепи с переходными вероятностями $\widehat{Q}_{ij}(t)$. Возьмем $\phi = \mathbb{I}_i$.

$$E\phi(X(t)) = \sum_{j=1}^{N} P(X(t) = j).$$

$$\frac{d}{dt}P(X(t) = i) = \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1;j\neq k}^{N} (\mathbb{I}_i(j) - \mathbb{I}_i(k))Q_{kj}(t)P(X(t) = k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1;j\neq k}^{N} \mathbb{I}_i(j)Q_{kj}P(X(t) = k) - \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1;j\neq k}^{N} \mathbb{I}_i(k)Q_{kj}P(X(t) = k) =$$

$$= \sum_{k=1;k\neq i}^{N} Q_{ki}P(X(t) = k) + \sum_{k=1}^{N} \delta_{ik}P(X(t) = i)Q_{kk} = \sum_{k=1}^{N} Q_{ki}P(X(t) = k) + Q_{ii}(t)P(X(t) = i)$$

Таким образом, получаем обратное уравнение Колмогорова

$$\frac{d}{dt}P(X(t) = i) = QP(X(t) = i).$$

Определим m формулой $m_i = P(X(t) = i)$. Равенство (2) выполнено по Предложению 1. □

Теорема 1. *Пусть W — решение уравнения Беллмана*

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} m_i(t) \sup_{v\in U}\left[g(t,i,m(t),v_i(t,m(t))) + \sum_{j=1}^{N} Q_{ij}(t,m(t),v_i(t,m(t)))\frac{\partial W}{\partial m_j}(t,m(t))\right] = 0.$$

Тогда существует универсальная оптимальная стратегия $u^*(t,m)$, непрерывная по m, т. е. для любого начального положения (t_0,m_0) можно подобрать оптимальное движение, порожденное стратегией $u^*(t,m)$ и начальным положением, причем для любого оптимального движения $(\Omega^*,\mathcal{F}^*,\{\mathcal{F}^*_t\}_{t\in[t_0,T]},P^*,X^*,m^*(\cdot))$ выполнено равенство

$$E\left(\sigma(X^*(T),m^*(T)) + \int_{t_0}^{T} g(t,X^*(t),m^*(t),u^*_{X^*(t)}(t,m^*(t)))dt\right) = W(t_0,m_0).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Соответствующая уравнению Беллмана оптимальная стратегия:

$$u_i^*(t,m) = \arg\max_{v\in U}\left[g(t,i,m(t),v_i(t,m(t))) + \sum_{j=1}^{N} Q_{ij}(t,m(t),v_i(t,m(t)))\frac{\partial W}{\partial m_j}(t,m(t))\right].$$

По Предложению 2 существует движение $(\Omega^*,\mathcal{F}^*,\{\mathcal{F}^*{}_t\}_{t\in[t_0,T]},P^*,X^*,m^*(\cdot))$, для которого выполнено равенство (2). Используя метод динамического программирования и Предложение 1, получаем, что

$$E(\sigma(X^*(T),m^*(T)) + \int_{t_0}^{T} g(t,X^*(t),m^*(t),u^*_{X^*(t)}(t,m^*(t)))dt) = W(t_0,m_0).$$

Предположим, что есть другое движение $(\hat{\Omega},\hat{\mathcal{F}},\{\hat{\mathcal{F}}_t\}_{t\in[t_0,T]},\hat{P},\hat{X},\hat{m}(\cdot))$, порожденное управлением $\hat{u}(t,m)$. Тогда по Предложению 1 оно удовлетворяет детерминированной системе (1), но оптимальное движение, которое определяется детерминированной системой, это движение, для которого управлением является $u^*(t,m)$. Значит, выбранное движение не оптимально. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ahmed N., Ding X. Controlled McKean–Vlasov equations // Commun. Appl. Anal. 2001. Vol. 5. P. 183–206.
2. Andersson D., Djehiche B. A maximum principle for SDEs of mean-field type // Appl. Math. Optim. 2011. Vol. 63. No. 3. P. 341–356. DOI: 10.1007/s00245-010-9123-8
3. Averboukh Y. Extremal shift rule for continuous-time zero-sum Markov games // Dynamic Games and Applications. 2017. Vol. 7. No. 1. P. 1–20. DOI: 10.1007/s13235-015-0173-z
4. Bayraktar E., Cosso A., Pham H. Randomized dynamic programming principle and Feynman–Kac representation for optimal control of McKean–Vlasov dynamics // Transactions of the American Mathematical Society. 2018. Vol. 370. No. 3. P. 2115–2160. DOI: 10.1090/tran/7118
5. Carmona R., Delarue F. Forward-backward stochastic differential equations and controlled McKean–Vlasov dynamics // The Annals of Probability. 2015. Vol. 43. No. 5. P. 2647–2700. DOI: 10.1214/14-AOP946
6. Cavagnari G., Marigonda A. Time-optimal control problem in the space of probability measures // Large-Scale Scientific Computing. Lecture Notes in Computer Science. 2015. Vol. 9374. P. 109–116. DOI: 10.1007/978-3-319-26520-9_11
7. Huang M., Malhamé R., Caines P. Nash equilibria for large population linear stochastic systems with weakly coupled agents // Analysis, Control and Optimization of Complex Dynamic Systems. 2005. P. 215–252. DOI: 10.1007/0-387-25477-3_9
8. Kolokoltsov V.N. Markov processes, semigroups and generators. Berlin, Boston: De Gruyter, 2011.
9. Kolokoltsov V. Nonlinear Markov games on a finite state space // International Journal of Statistics and Probability. 2012. Vol. 1. No. 1. P. 77–91. DOI: 10.5539/ijsp.v1n1p77
10. Lasry J.-M., Lions P.-L. Jeux à champ moyen. I – Le cas stationnaire // Comptes Rendus Mathematique. 2006. Vol. 343. No. 9. P. 619–625. DOI: 10.1016/j.crma.2006.09.019
11. Pogodaev N. Optimal control of continuity equations // Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA. 2016. Vol. 23. Issue 2. Article 21. DOI: 10.1007/s00030-016-0357-2

Поступила в редакцию 12.02.2018

Березин Антон Александрович, математик, Институт математики и механики УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
E-mail: berezinant@gmail.com

A. A. Berezin

Positional strategies in mean-field control problems on a finite state space

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2018, vol. 28, issue 1, pp. 15–21 (in Russian).

Keywords: markov chain, control problem, mean field.

MSC2010: 49J21, 60J28

DOI: 10.20537/vm180102

We consider an optimal control problem for an infinite amount of agents of the same type. We assume that agents have a finite state space. The given formulation of the problem involves an objective functional that is common for all agents and a common control center that chooses a strategy for agents. A chosen strategy is supposed to be positional. In this paper we consider a case when the dynamics of agents is given by a Markov chain with continuous time. It is assumed that the Kolmogorov matrix of this chain in each state depends on the current state, the chosen control and the distribution of all agents. For the original problem, it is shown that concerning positional strategies the solution can be obtained through the solution of the deterministic control problem in a finite-dimensional phase space.

МАТЕМАТИКА 2018. Т. 28. Вып. 1

REFERENCES

1. Ahmed N., Ding X. Controlled McKean–Vlasov equations, *Commun. Appl. Anal.*, 2001, vol. 5, pp. 183–206.
2. Andersson D., Djehiche B. A maximum principle for SDEs of mean-field type, *Appl. Math. Optim.*, 2011, vol. 63, no. 3, pp. 341–356. DOI: 10.1007/s00245-010-9123-8
3. Averboukh Y. Extremal shift rule for continuous-time zero-sum Markov games, *Dynamic Games and Applications*, 2017, vol. 7, no. 1, pp. 1–20. DOI: 10.1007/s13235-015-0173-z
4. Bayraktar E., Cosso A., Pham H. Randomized dynamic programming principle and Feynman–Kac representation for optimal control of McKean–Vlasov dynamics, *Transactions of the American Mathematical Society*, 2018, vol. 370, no. 3, pp. 2115–2160. DOI: 10.1090/tran/7118
5. Carmona R., Delarue F. Forward-backward stochastic differential equations and controlled McKean–Vlasov dynamics, *The Annals of Probability*, 2015, vol. 43, no. 5, pp. 2647–2700. DOI: 10.1214/14-AOP946
6. Cavagnari G., Marigonda A. Time-optimal control problem in the space of probability measures, *Large-Scale Scientific Computing. Lecture Notes in Computer Science*, 2015, vol. 9374, pp. 109–116. DOI: 10.1007/978-3-319-26520-9_11
7. Huang M., Malhamé R., Caines P. Nash equilibria for large population linear stochastic systems with weakly coupled agents, *Analysis, Control and Optimization of Complex Dynamic Systems*, 2005, pp. 215–252. DOI: 10.1007/0-387-25477-3_9
8. Kolokoltsov V.N. *Markov processes, semigroups and generators*, Berlin, Boston: De Gruyter, 2011.
9. Kolokoltsov V. Nonlinear Markov games on a finite state space, *International Journal of Statistics and Probability*, 2012, vol. 1, no. 1, pp. 77–91. DOI: 10.5539/ijsp.v1n1p77
10. Lasry J.-M., Lions P.-L. Jeux à champ moyen. I – Le cas stationnaire, *Comptes Rendus Mathematique*, 2006, vol. 343, no. 9, pp. 619–625. DOI: 10.1016/j.crma.2006.09.019
11. Pogodaev N. Optimal control of continuity equations, *Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA*, 2016, vol. 23, issue 2, article 21. DOI: 10.1007/s00030-016-0357-2

Received 12.02.2018

Berezin Anton Aleksandrovich, Mathematician, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia.
E-mail: berezinant@gmail.com