

УДК 531.36, 531.38

© *Е. А. Вишенкова, О. В. Холостова***О ВЛИЯНИИ ВЕРТИКАЛЬНЫХ ВИБРАЦИЙ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ПЕРМАНЕНТНЫХ ВРАЩЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ ОСЕЙ, ЛЕЖАЩИХ В ГЛАВНОЙ ПЛОСКОСТИ ИНЕРЦИИ¹**

Рассматривается движение твердого тела в однородном поле тяжести в случае высокочастотных вертикальных гармонических колебаний малой амплитуды одной из его точек (точки подвеса). Предполагается, что центр масс тела лежит на одной из главных осей инерции для точки подвеса. В рамках приближенной автономной системы дифференциальных уравнений, записанной в форме канонических уравнений Гамильтона, рассматриваются частные движения тела — перманентные вращения, происходящие вокруг вертикально расположенных осей из главных плоскостей инерции, примыкающих к указанной главной оси. Такие перманентные вращения существуют и для тела с неподвижной точкой подвеса. Исследуется влияние быстрых вибраций на устойчивость этих вращений. Для всех допустимых значений четырехмерного пространства параметров (двух инерционных параметров и параметров, характеризующих частоту вибраций и угловую скорость вращения) выписаны и проиллюстрированы необходимые и в ряде случаев достаточные условия устойчивости, рассматриваемые как условия устойчивости соответствующих положений равновесия приведенной (по Раусу) автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы. Проведен нелинейный анализ устойчивости для двух частных значений инерционного параметра, отвечающих динамически симметричному телу и телу с геометрией масс для случая Бобылева–Стеклова. Рассмотрены нерезонансный и резонансный случаи, а также случаи вырождения. Проведено сравнение полученных результатов устойчивости с соответствующими результатами для тела с неподвижной точкой.

Ключевые слова: перманентные вращения, высокочастотные вибрации, устойчивость, твердое тело.

DOI: [10.20537/vm170109](https://doi.org/10.20537/vm170109)**Введение**

Впервые воздействие высокочастотной вибрации на устойчивость механических систем исследовано в 1908 году А. Стефенсоном [1], обнаружившим, что увеличение частоты вибрации точки подвеса математического маятника приводит к стабилизации его «перевернутого» положения равновесия. Исследование проблемы повышения динамической устойчивости за счет высокочастотных вибраций является предметом большого числа работ, достаточно полная библиография содержится в монографиях [2–4] и обзоре [5]. Большая часть исследований посвящена маятниковым системам [6–14] и др. Различные аспекты движения волчка Лагранжа с вибрирующим подвесом изучаются в работах [15–19] (см. также [4]).

Начало исследованию динамики твердого тела, имеющего произвольную геометрию масс, в предположении, что одна из точек тела совершает произвольные периодические или условно периодические вибрации высокой частоты и малой амплитуды, положили работы [20, 21], где получена система приближенных автономных дифференциальных уравнений твердого тела типа уравнений Эйлера–Пуассона. В рамках этой приближенной системы изучены частные движения динамически симметричного тела для законов движения точки подвеса, допускающих две циклические координаты [19]; исследована устойчивость относительных равновесий тела, когда радиус-вектор центра масс занимает вертикальное [21] или наклонное [22] положение, а точка подвеса совершает вертикальные вибрации. Влияние вязкого трения на устойчивость относительных равновесий на вертикали тела в случае быстрых вертикальных гармонических вибраций изучено в статье [23].

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 17-01-00123).

Представляет интерес исследование (в рамках приближенной системы) еще одного типа частных движений тела — перманентных вращений, происходящих вокруг осей, неподвижных в теле и в системе координат, движущейся поступательно вместе с точкой подвеса. Перманентные вращения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой открыты в 1894 году [24, 25], их исследованию посвящена обширная литература. История вопроса, а также наиболее полный линейный и нелинейный анализ устойчивости перманентных вращений для общего и частных случаев геометрии масс тела с неподвижной точкой содержатся в монографии [26]. Оси перманентных вращений тяжелого твердого тела с неподвижной точкой всегда вертикальны, а множество допустимых осей перманентных вращений в общем случае геометрии масс тела располагаются на поверхности эллиптического конуса (конуса Штауде), в частных случаях геометрии масс — в фиксированных плоскостях. Наибольшее число исследований относится к случаю, когда центр масс тела лежит на главной оси инерции для неподвижной точки. При этом перманентные вращения могут происходить либо вокруг этой главной оси, либо вокруг осей из главных плоскостей инерции, примыкающих к данной главной оси; исследование устойчивости этих вращений проведено в работах [26–33] и др.

Отметим, что в случае вертикальных вибраций точки подвеса, как и в случае тела с неподвижной точкой, одна из координат тела (угол прецессии) циклическая, а ось перманентного вращения может быть только вертикальной. Поэтому для обоих случаев существуют общие типы перманентных вращений (хотя наличие вибраций может качественно изменить характер их устойчивости); в то же время в случае вибраций существуют перманентные вращения, невозможные для тела с неподвижной точкой. В работе [34] найдены и исследованы два новых типа стационарных вращений тела, обусловленных быстрыми вертикальными вибрациями точки подвеса и невозможными для тела с неподвижной точкой; первое представляет собой коническое движение вокруг вертикали несимметричного тела с центром масс на главной оси инерции, а второе — перманентное вращение вокруг главной оси инерции, в случае когда центр масс тела не лежит на этой оси. Линейный и нелинейный анализ устойчивости перманентных вращений тела вокруг главной оси инерции, содержащей его центр масс, в случае быстрых вертикальных гармонических вибраций его точки подвеса проведен в статье [35].

В данной работе, в предположении, что центр масс тела лежит на главной оси инерции, изучается влияние быстрых вертикальных гармонических вибраций на существование и устойчивость перманентных вращений тела вокруг осей из главных плоскостей инерции. Исследование проводится в рамках приближенной автономной системы дифференциальных уравнений, записанных в гамильтоновой форме. В четырехмерном пространстве параметров задачи (двух инерционных параметров и параметров, характеризующих частоту вибрации и угловую скорость перманентного вращения) проводится подробный линейный анализ устойчивости отвечающих указанным движениям положений равновесия приведенной (по Раусу) системы с двумя степенями свободы. Для двух фиксированных значений инерционного параметра, соответствующих динамически симметричному телу и телу с геометрией масс для случая Бобылева–Стеклова, рассмотрена нелинейная задача об устойчивости. Применены известные методы исследования устойчивости положений равновесия автономных гамильтоновых систем с двумя степенями свободы [36]. Полученные результаты сравниваются с соответствующими результатами устойчивости перманентных вращений в случае тела с неподвижной точкой.

§ 1. Постановка задачи

Рассмотрим движение тяжелого твердого тела массы m , одна из точек которого, скажем, O , называемая далее точкой подвеса, совершает гармонические колебания вдоль вертикали по закону $O^*O = \zeta(t) = a \cos \Omega t$ относительно некоторой неподвижной точки O^* .

Введем две системы координат с началом в точке O . Система координат $OXYZ$ движется поступательно, ее ось OZ направлена вертикально вверх; система $Oxyz$ жестко связана с телом, ее оси направлены вдоль главных осей инерции тела для точки O . Ориентацию системы координат $Oxyz$ относительно системы $OXYZ$ зададим при помощи углов Эйлера ψ, θ, φ .

Главные моменты инерции тела для точки O будем обозначать через A , B и C . Предполагаем, что центр масс G тела расположен на одной из главных осей инерции, например на оси Ox , и будем считать, что $x_G > 0$.

Кинетическая энергия и потенциальная энергия тела вычисляются по формулам

$$T = \frac{1}{2}mv_O^2 + m\mathbf{v}_O \cdot \mathbf{v}_{G_r} + \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2), \quad \Pi = mg(\zeta(t) + \mathbf{OG} \cdot \mathbf{n}). \quad (1.1)$$

Здесь $\mathbf{v}_O = \dot{\zeta}(t)\mathbf{n}$ — скорость точки подвеса, $\mathbf{v}_{G_r} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OG}$ — относительная (в системе координат $OXYZ$) скорость точки G ; $\boldsymbol{\omega}$ и \mathbf{n} — вектор абсолютной угловой скорости тела и орт оси OZ , их проекции на оси связанной системы координат обозначим через p , q , r и γ_1 , γ_2 , γ_3 соответственно, причем величины p , q , r вычисляются при помощи кинематических уравнений Эйлера, а $\gamma_1 = \sin \theta \sin \varphi$, $\gamma_2 = \sin \theta \cos \varphi$, $\gamma_3 = \cos \theta$.

Движение тела будем описывать каноническими уравнениями Гамильтона. Пусть p_ψ , p_θ , p_φ — обобщенные импульсы, сопряженные с углами ψ , θ , φ :

$$p_\psi = \partial T / \partial \dot{\psi}, \quad p_\theta = \partial T / \partial \dot{\theta}, \quad p_\varphi = \partial T / \partial \dot{\varphi}. \quad (1.2)$$

Используя выписанные соотношения, составим гамильтониан по формуле

$$H = P_\psi \dot{\psi} + P_\theta \dot{\theta} + P_\varphi \dot{\varphi} - T + \Pi.$$

При этом входящие в него величины $\dot{\psi}$, $\dot{\theta}$ и $\dot{\varphi}$ выражены через импульсы при помощи соотношений (1.2), (1.1).

Делая в полученном гамильтониане каноническую унивалентную замену переменных

$$\begin{aligned} \hat{\psi} &= \psi, & \hat{\theta} &= \theta, & \hat{\varphi} &= \varphi, \\ \hat{p}_\psi &= p_\psi, & \hat{p}_\theta &= p_\theta + mx_G a \Omega \sin \Omega t \cos \theta \sin \varphi, & \hat{p}_\varphi &= p_\varphi + mx_G a \Omega \sin \Omega t \sin \theta \cos \varphi, \end{aligned}$$

задаваемую производящей функцией

$$S = \psi \hat{p}_\psi + \theta \hat{p}_\theta + \varphi \hat{p}_\varphi - mx_G a \Omega \sin \Omega t \sin \theta \sin \varphi,$$

преобразуем гамильтониан системы к виду (слагаемые, являющиеся функциями времени или константами, отброшены)

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{(A \cos^2 \hat{\varphi} + B \sin^2 \hat{\varphi})(\hat{p}_\psi - \hat{p}_\varphi \cos \hat{\theta})^2}{2AB \sin^2 \hat{\theta}} + \frac{A \sin^2 \hat{\varphi} + B \cos^2 \hat{\varphi}}{2AB} \hat{p}_\theta^2 + \frac{\hat{p}_\varphi^2}{2C} + \\ &+ \frac{(B - A) \sin \hat{\varphi} \cos \hat{\varphi} (\hat{p}_\psi - \hat{p}_\varphi \cos \hat{\theta}) \hat{p}_\theta}{AB \sin \hat{\theta}} + m(g - a\Omega^2 \cos \Omega t)x_G \sin \hat{\varphi} \sin \hat{\theta}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Будем предполагать, что амплитуда a колебаний точки подвеса мала по сравнению с приведенной длиной $\ell = A/(mx_G)$, а частота Ω колебаний велика по сравнению с характерной частотой $\Omega_1 = \sqrt{g/\ell}$, при этом считаем, что $a\Omega \sim 1$. Введем малый параметр ε и безразмерную частоту ω_0 по формулам

$$\varepsilon = \frac{a}{\ell} \quad (0 < \varepsilon \ll 1), \quad \frac{\Omega_1}{\Omega} = \varepsilon \omega_0.$$

При помощи методов теории возмущений гамильтониан можно привести к виду, главная часть которого не содержит время в слагаемых до второго порядка включительно по ε . Отбрасывая слагаемые выше второго порядка по ε , получим приближенный гамильтониан, соответствующий автономной системе. Оставляя за переменными исходные обозначения, запишем этот гамильтониан в виде [4,35]

$$\begin{aligned} H &= \frac{(A \cos^2 \varphi + B \sin^2 \varphi)(p_\psi - p_\varphi \cos \theta)^2}{2AB \sin^2 \theta} + \frac{A \sin^2 \varphi + B \cos^2 \varphi}{2AB} p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{2C} + \\ &+ \frac{(B - A) \sin \varphi \cos \varphi (p_\psi - p_\varphi \cos \theta) p_\theta}{AB \sin \theta} + mgx_G \sin \varphi \sin \theta + \Pi^{(\nu)}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь $\Pi^{(\nu)}$ — вибрационный потенциал [5, 20], задаваемый формулой

$$\Pi^{(\nu)} = \frac{m^2 x_G^2 a^2 \Omega^2 (C \cos^2 \theta + B \sin^2 \theta \cos^2 \varphi)}{4BC}. \quad (1.5)$$

Заметим, что координата ψ как в исходной, так и в преобразованной приближенной системе циклическая, соответствующий ей импульс p_ψ постоянен.

Следуя работам [20, 21] и используя преобразования, описанные в статье [35], найдем, что решения полной неавтономной системы с гамильтонианом (1.3) на интервале времени t порядка $\varepsilon^{-1/2}$ связаны с решениями преобразованной приближенной автономной системы с гамильтонианом (1.4) при помощи соотношений вида

$$\begin{aligned} \hat{\theta} &= \theta + O(\varepsilon^{3/2}), & \hat{\varphi} &= \varphi + O(\varepsilon^{3/2}), \\ \hat{p}_\theta &= p_\theta - m\dot{\zeta}(t)x_G \sin \varphi \cos \theta + O(\varepsilon^{1/2}), & \hat{p}_\varphi &= p_\varphi - m\dot{\zeta}(t)x_G \cos \varphi \sin \theta + O(\varepsilon^{1/2}). \end{aligned}$$

Далее будем исследовать движения системы, оставаясь в рамках приближенной системы, описываемой гамильтонианом (1.4), (1.5).

Введем безразмерные инерционные параметры

$$\alpha = A/B, \quad \beta = A/C,$$

удовлетворяющие неравенствам

$$\alpha + \beta - \alpha\beta \geq 0, \quad \alpha - \beta + \alpha\beta \geq 0, \quad \beta - \alpha + \alpha\beta \geq 0, \quad (1.6)$$

следующим из неравенств треугольника для осевых моментов инерции. Введем также безразмерные импульсы p_1, p_2, p_3 и безразмерное «время» τ по формулам

$$p_\psi = A\Omega_1 p_1, \quad p_\theta = A\Omega_1 p_2, \quad p_\varphi = A\Omega_1 p_3, \quad \tau = \Omega_1 t \quad (p_1 = \eta = \text{const}).$$

В безразмерных переменных и параметрах гамильтониан системы запишется в виде

$$\begin{aligned} H &= \frac{\alpha \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}{2 \sin^2 \theta} (\eta - p_3 \cos \theta)^2 + \frac{1}{2} (\alpha \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) p_2^2 + \frac{(1 - \alpha) \sin \varphi \cos \varphi}{\sin \theta} (\eta - p_3 \cos \theta) p_2 + \\ &+ \frac{1}{2} \beta p_3^2 + \sin \theta \sin \varphi + \frac{\xi}{2} (\alpha \cos^2 \theta + \beta \sin^2 \theta \cos^2 \varphi), \quad \xi = \frac{m x_G a^2 \Omega^2}{2Ag}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Рассмотрим частные решения системы с гамильтонианом (1.7), соответствующие перманентным вращениям тела, под которыми понимаем равномерные вращения вокруг осей, фиксированных в теле и в системе координат $OXYZ$. Для рассматриваемого здесь случая вертикальных колебаний точки подвеса, как и для тела с неподвижной точкой, такие вращения могут происходить только вокруг вертикальных осей.

Для системы с гамильтонианом (1.7) существуют два типа вращений, имеющих место и в случае неподвижной точки: вращения вокруг главной оси инерции Ox , содержащей центр масс, и вращения вокруг осей, лежащих в одной из главных плоскостей инерции Oxy или Oxz , перпендикулярных к оси Ox .

Подробный линейный и нелинейный анализ устойчивости этих вращений в случае тела с неподвижной точкой подвеса приведен в монографии [26]. Устойчивость перманентных вращений тела вокруг главной оси инерции для системы с гамильтонианом (1.7) исследована в статье [35]. В работе [34] в рамках этой же системы найден и исследован еще один тип стационарных вращений, обусловленный вибрациями, — конические движения вокруг вертикали несимметричного тела.

В данной статье в рамках системы с гамильтонианом (1.7) изучаются вращения тела вокруг осей из главных плоскостей инерции; пусть это плоскость Oxz . Этим вращениям отвечают

положения равновесия отвечающей (1.7) приведенной системы с двумя степенями свободы, задаваемые соотношениями

$$\theta = \theta_0, \quad \varphi = \varphi_0, \quad p_{\theta_0} = 0, \quad p_{\varphi_0} = \frac{\eta}{\beta} \cos \theta_0, \quad p_{\psi} = \eta \left(\sin^2 \theta_0 + \frac{\cos^2 \theta_0}{\beta} \right), \quad (1.8)$$

где $\varphi_0 = \pi/2$ или $\varphi_0 = 3\pi/2$, а величина θ_0 определяется из уравнения

$$\left(\frac{\beta - 1}{\beta} \eta^2 + \xi \alpha \right) s \sin \theta_0 = 1, \quad s = \text{sign}(\sin \varphi_0). \quad (1.9)$$

Цель работы — исследование устойчивости указанных положений равновесия при фиксированном значении параметра η .

§ 2. Геометрическая интерпретация

Опишем множество допустимых осей перманентных вращений тела из плоскости Oxz . Им отвечают такие значения угла θ_0 в соотношении (1.9), которые обеспечивают неотрицательность величины η^2 . Построим в плоскости Oxz единичную окружность с центром в точке O . Каждая допустимая ось пересекает окружность в некоторой точке; совокупность таких точек образует на окружности некоторые дуги, называемые допустимыми.

Несложный анализ соотношения (1.9) показывает, что для значений ξ из интервала $0 \leq \xi < 1/\alpha$ (включающего случай отсутствия вибраций $\xi = 0$) при $\beta > 1$ ($A > C$) допустимые дуги определяются условием $s = 1$, означающим, что при вращении центр масс тела находится выше точки подвеса. Если же $\beta < 1$ ($A < C$), то имеем $s = -1$, и центр масс находится ниже точки подвеса. Допустимые дуги в плоскости Oxz составляют в этих двух случаях полуокружности, показанные тонкими сплошными линиями на рис. 1 *a, b* (дуги I) соответственно.

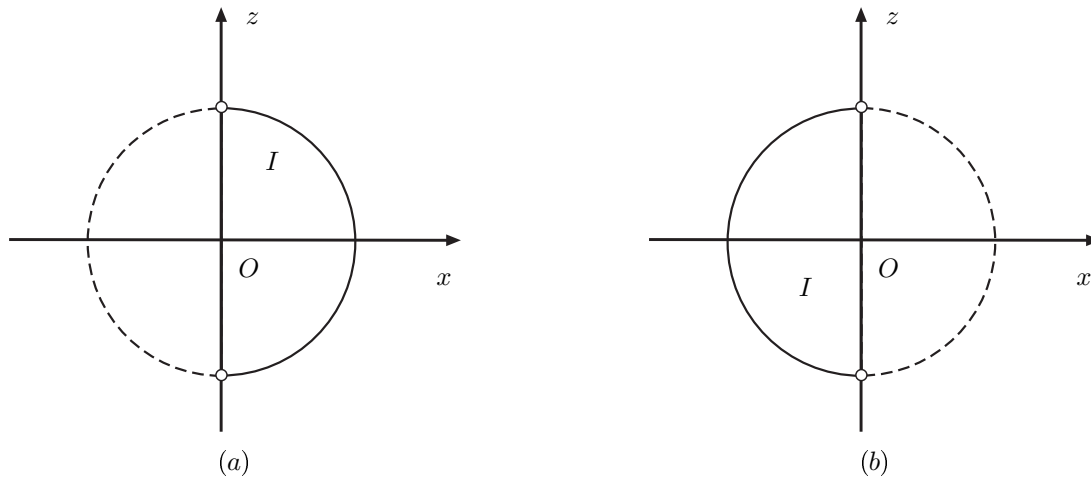


Рис. 1. Допустимые дуги в двух случаях: *a*) $\xi < 1/\alpha$, $\beta > 1$; *b*) $\beta < 1$

При увеличении параметра ξ ($\xi > 1/\alpha$) области допустимых дуг меняются: в случае $\beta > 1$ допустимые дуги определяются условиями $s = 1$ и $0 < \sin \theta_0 < 1/(\xi\alpha)$, а в случае $\beta < 1$ — условиями $s = -1$ и $0 < \sin \theta_0 < 1$, а также $s = 1$ и $1/(\xi\alpha) < \sin \theta_0 < 1$. Допустимые дуги в первом случае показаны тонкими сплошными линиями на рис. 2, *a* (дуги I, II), во втором случае — на рис. 2, *b* (дуги I, II).

С учетом выписанных ограничений на θ_0 можно при помощи соотношений (1.9) найти для каждого случая диапазон изменения величины η^2 . Все полученные результаты представим в виде таблицы 1, где введены обозначения

$$\eta_1^2 = \frac{(1 - \xi\alpha)\beta}{\beta - 1}, \quad \eta_2^2 = \frac{(\xi\alpha + 1)\beta}{1 - \beta}.$$

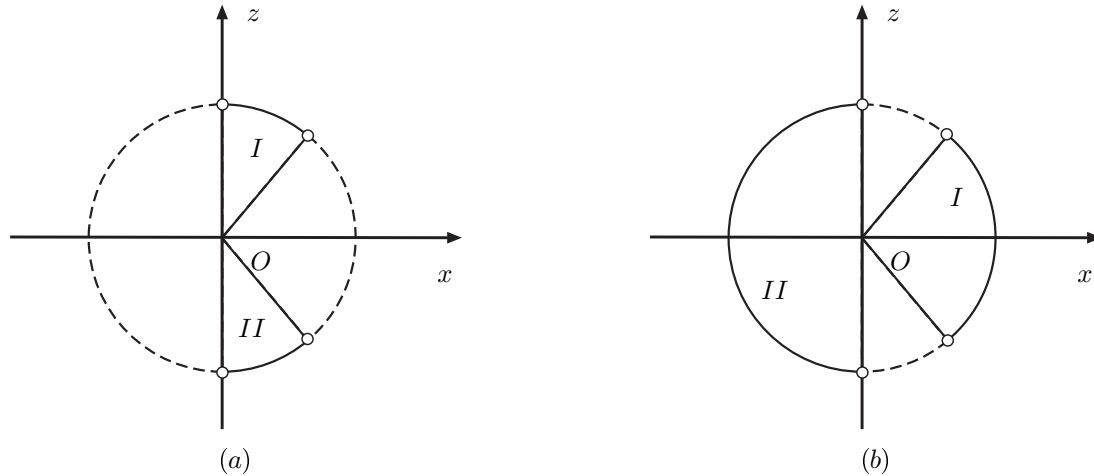


Рис. 2. Допустимые дуги в двух случаях: а) $\xi > 1/\alpha, \beta > 1$; б) $\beta < 1$

Таблица 1. Допустимые значения параметров $\varphi_0, \theta_0, \eta$

	$\beta > 1$		$\beta < 1$		
	$\xi > 1/\alpha$	$\xi < 1/\alpha$	$\xi > 1/\alpha$	$\xi < 1/\alpha$	
s	1	1	1	-1	-1
$\sin \theta_0$	$(0, 1/(\xi\alpha))$	$(0, 1)$	$(1/(\xi\alpha), 1)$	$(0, 1)$	$(0, 1)$
η	$\eta > 0$	$\eta^2 > \eta_1^2$	$\eta^2 < \eta_1^2$	$\eta^2 > \eta_2^2$	$\eta^2 > \eta_2^2$

Далее, учитывая соотношение (1.9), в качестве независимых выбираем параметры α, β, η и ξ . Устойчивость решений (1.6) по отношению к координатам θ, ϕ и отвечающим им импульсам будем исследовать в допустимой части пространства этих параметров.

§ 3. Гамильтониан возмущенного движения

Введем в гамильтониане (1.7) возмущения по формулам

$$\theta = \theta_0 + x_1, \quad \varphi = \varphi_0 + x_2, \quad p_2 = y_1, \quad p_3 = y_2.$$

Гамильтониан системы можно переписать в виде

$$H = H_2 + H_3 + H_4 + \dots, \tag{3.1}$$

где H_k ($k = 2, 3, 4$) — формы степени k относительно возмущений, имеющие следующую структуру:

$$\begin{aligned}
 H_2 &= \frac{1}{2}a_1x_1^2 + \frac{1}{2}a_2x_2^2 + \frac{1}{2}a_3y_1^2 + \frac{1}{2}a_4y_2^2 + a_5x_1y_2 + a_6x_2y_1, \\
 H_3 &= b_1x_1^3 + b_2x_1^2y_2 + b_3x_1x_2^2 + b_4x_1x_2y_1 + b_5x_1y_2^2 + b_6x_2^2y_2 + b_7x_2y_1y_2, \\
 H_4 &= c_1x_1^4 + c_2x_1^3y_2 + c_3x_1^2x_2^2 + c_4x_1^2x_2y_1 + c_5x_1^2y_2^2 + c_6x_1x_2^2y_2 + \\
 &\quad + c_7x_1x_2y_1y_2 + c_8x_2^4 + c_9x_2^3y_1 + c_{10}x_2^2y_1^2 + c_{11}x_2^2y_2^2.
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{(3\beta^2 - 3\beta + 1)(\beta - 1)^2\eta^6 + \xi\alpha\beta(\beta - 1)(5\beta^2 - 5\beta + 2)\eta^4}{z^2\beta^2} + \\
 &\quad + \frac{\beta^2(\xi^2\alpha^2(\beta^2 + 1 - \beta) - (3\beta - 1)(\beta - 1))\eta^2 - \alpha\xi\beta^4(\xi^2\alpha^2 - 1)}{z^2\beta^2}, \\
 a_2 &= \frac{\beta((\alpha\beta - 2\beta + 1)\eta^2 - \xi\beta(\alpha - \beta))}{z^2}, \quad a_5 = \frac{\eta(z^2(2\beta - 1) - (\beta - 1)\beta^2)s}{z\beta^2},
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$a_3 = \alpha, \quad a_4 = \frac{z^2 + (\beta - 1)\beta^2}{\beta^2}, \quad a_6 = \frac{s(\alpha - 1)\eta\beta}{z}, \quad z = (\beta - 1)\eta^2 + \xi\alpha\beta.$$

Коэффициенты форм H_3 и H_4 не приводятся в силу их громоздкости.

Разобьем область (1.6) допустимых значений параметров α , β , ограниченную гиперболами

$$\alpha + \beta - \alpha\beta = 0, \quad \alpha - \beta + \alpha\beta = 0, \quad \alpha - \beta - \alpha\beta = 0,$$

на девять областей, 1–9 (рис. 3). Границами областей служат прямые

$$\alpha = \beta, \quad \beta = 2/3, \quad \beta = 1, \quad \beta = 4/3, \quad \beta = 2.$$

Внутри области 2 выделим подобласть 2^* , отделяемую кривой

$$(\beta^2 - 4\beta + 2)\alpha^2 + (3\beta - 1)(\beta - 1)\alpha - \beta(\beta - 1)^2 = 0.$$

Далее все результаты будем представлять для этих областей изменения параметров α , β и отвечающих им допустимых значений ξ , η .

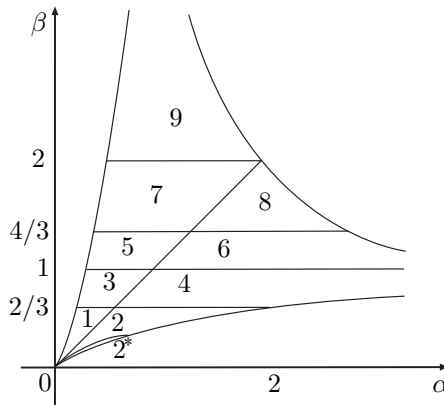


Рис. 3. Разбиение допустимой области параметров α , β

§ 4. Достаточные условия устойчивости

Достаточными условиями устойчивости рассматриваемого движения являются условия положительной определенности квадратичной формы H_2 из (3.2), записываемые в виде системы неравенств

$$a_4 > 0, \quad a_2 a_3 > a_6^2, \quad a_1 a_4 > a_5^2. \quad (4.1)$$

Первое из них выполнено всегда в области допустимых значений параметров. Второе и третье неравенства сводятся к системе вида

$$\begin{cases} (\beta - \alpha)(\xi\alpha\beta - \eta^2) > 0, \\ F(\zeta) = A'\zeta^3 + B'\zeta^2 + C'\zeta + D' < 0, \quad \zeta = \eta^2 \quad (\zeta \geq 0). \end{cases} \quad (4.2)$$

Здесь

$$A' = (\beta - 1)^3, \quad B' = 3\xi\alpha\beta(\beta - 1)^2, \quad C' = 3(\beta - 1)\beta^2(\xi^2\alpha^2 + 1 - \beta), \quad D' = \beta^3\xi\alpha(\beta + \xi^2\alpha^2 - 1).$$

К этой системе следует добавить ограничения на допустимые значения параметров из таблицы 1.

Рассмотрим второе неравенство из (4.2). Дискриминант кубического уравнения $F(\zeta) = 0$ имеет вид

$$\Delta = -108\beta^6(\beta - 1)^8(4\xi^2\alpha^2 - \beta + 1).$$

При $\Delta > 0$ это уравнение имеет три вещественных корня, при $\Delta < 0$ — один.

Пусть сначала $\beta < 1$. Тогда старший коэффициент и дискриминант Δ кубического многочлена $F(\zeta)$ отрицательные, а уравнение $F(\zeta) = 0$ имеет единственный вещественный корень. При выполнении условия $\xi < \sqrt{1 - \beta}/\alpha$ этот корень отрицателен, поэтому для любых значений параметров η, ξ получаем $F(\zeta) < 0$.

Исследуем два интервала допустимых значений параметра ζ из таблицы 1 в случае $\xi > \sqrt{1 - \beta}/\alpha$, когда корень многочлена $F(\zeta)$ положителен. Проверим интервал $\zeta > \eta_2^2$. Для его левого граничного значения имеем

$$F|_{\zeta=\eta_2^2} = \beta^3[-4\xi\alpha(1 - \beta) + 3\beta - 4] < 0,$$

и значит, неравенство $F(\zeta) < 0$ выполнено для любых значений параметра ζ из данного интервала.

На правой границе $\zeta = \eta_1^2$ второго интервала $\zeta < \eta_1^2$ многочлен $F(\zeta)$ принимает значение

$$F|_{\zeta=\eta_1^2} = \beta^3[-4\xi\alpha(1 - \beta) - 3\beta + 4],$$

знак которого может быть как положительным, так и отрицательным. Отсюда находим, что достаточное условие $F(\zeta) < 0$ удовлетворяется при выполнении неравенств

$$\xi > \frac{4 - 3\beta}{4\alpha(1 - \beta)}, \quad \eta_*^2 < \zeta < \eta_1^2,$$

где η_* — корень бикубического уравнения. Для остальных значений параметров ξ и η из рассматриваемых интервалов это условие не выполняется.

В случае $\beta > 1$ старший коэффициент кубического многочлена $F(\zeta)$ положителен. При $\xi > \sqrt{\beta - 1}/(2\alpha)$ дискриминант Δ отрицателен, поэтому многочлен $F(\zeta)$ имеет единственный вещественный корень (отрицательный), а неравенство $F(\zeta) < 0$ не имеет решений на положительной полуоси $O\zeta$.

Если $\xi \leq \sqrt{\beta - 1}/(2\alpha)$, то дискриминант Δ положителен и многочлен $F(\zeta)$ имеет три вещественных корня. При этом функция $F(\zeta)$ имеет две точки экстремума (разных знаков). Учитывая, что свободный член D' положителен, заключаем, что один из корней отрицателен, а два положительны. Обозначим положительные корни через η_* и η_{**} ($\eta_* > \eta_{**}$). Таким образом, решение неравенства $F(\zeta) < 0$ в данном случае задается интервалом $\eta_{**}^2 < \zeta < \eta_*^2$.

Совместим полученные решения бикубического неравенства $F(\zeta) < 0$ с решением первого неравенства из (4.2). Несложный анализ приведет к результатам, представленным в таблице 2.

Здесь введены следующие обозначения:

$$\xi_1 = \frac{3\beta - 4}{4\alpha(\beta - 1)}, \quad \xi_2 = \sqrt{\frac{3\beta^2 - 7\beta + 4}{\alpha^2\beta^3}}, \quad \xi_3 = \frac{\sqrt{\beta - 1}}{2\alpha}.$$

Эти результаты следует интерпретировать следующим образом. Для каждой точки области допустимой части плоскости параметров α, β , номер которой указан в первом столбце таблицы (см. также рис. 3), интервал допустимых значений параметра ξ делится на несколько интервалов, приведенных во втором столбце, границы которых зависят от исследуемой точки (α, β) области. Каждой точке выписанных интервалов соответствует ограничение на безразмерную угловую скорость η (третий столбец) с границами, зависящими от трех выбранных параметров α, β, ξ .

Для тех значений параметра ξ из множества его допустимых значений, которые не приведены в таблице, достаточные условия (4.2) не выполняются при всех допустимых значениях η .

Таблица 2. Достаточные условия устойчивости

Обл.	Значения ξ	Условия выполнения ДУ
1	$\xi_1 < \xi < 1/(\alpha\beta)$	$\eta_*^2 < \eta^2 < \eta_1^2$
	$1/(\alpha\beta) < \xi < \xi_2$	$\eta_*^2 < \eta^2 < \xi\alpha\beta$
2	$\xi < 1/\alpha$	$\eta_2^2 < \eta^2$
	$1/(\alpha\beta) < \xi < \xi_2$	$\eta_2^2 < \eta^2$
		$\xi\alpha\beta < \eta^2 < \eta_1^2$
	$\xi > \xi_2$	$\eta_2^2 < \eta^2$
	$\eta_*^2 < \eta^2 < \eta_1^2$	
4	$\xi < 1/\alpha$	$\eta_2^2 < \eta^2$
	$\xi > \xi_1$	$\eta_2^2 < \eta^2$
		$\eta_*^2 < \eta^2 < \eta_1^2$
8	$\xi < \xi_1$	$\eta_1^2 < \eta^2 < \eta_*^2$
9	$1/(\alpha\beta) < \xi < \xi_2$	$\eta_1^2 < \eta^2 < \xi\alpha\beta$
	$\xi_2 < \xi < \xi_1$	$\eta_1^2 < \eta^2 < \eta_*^2$
	$\xi_1 < \xi < \min(\xi_3, 1/\alpha)$	$\eta_{**}^2 < \eta^2 < \eta_*^2$

В областях 5–7 достаточные условия (4.2) не выполняются ни при каких допустимых значениях параметров ξ и η .

§ 5. Необходимые условия устойчивости

Пусть квадратичная форма H_2 не является знакоопределенной. Составим характеристическое уравнение линейной системы, соответствующей квадратичной форме H_2 :

$$\lambda^4 + a\lambda^2 + b = 0,$$

$$a = a_2a_4 - 2a_5a_6 + a_1a_3, \quad b = (a_2a_3 - a_6^2)(a_1a_4 - a_5^2).$$

При выполнении условий

$$a > 0, \quad b > 0, \quad d = a^2 - 4b > 0 \quad (5.1)$$

корни $\pm i\lambda_j$ ($j = 1, 2$) уравнения чисто мнимые, и исследуемые решения устойчивы в линейном приближении. Если хотя бы одно из неравенств выполняется с противоположным знаком, то имеет место неустойчивость, так как в этом случае у характеристического уравнения будут корни с положительной вещественной частью.

Все полученные ранее достаточные условия являются также и необходимыми. Исследуем далее случаи, для которых выполняются только необходимые условия устойчивости.

Неравенство $b > 0$ в рассматриваемом случае сводится ко второму и третьему неравенствам из (4.1), в которых взяты противоположные знаки. Результаты решения этой системы неравенств представлены в таблице 3.

Неравенство $a > 0$ из (5.1) сводится к кубическому неравенству относительно $\zeta = \eta^2$:

$$a = F_a(\zeta) = A_a\zeta^3 + B_a\zeta^2 + C_a\zeta + D_a > 0,$$

$$A_a = (\beta - 1)^2(2\beta^2 - \beta - \beta\alpha + \alpha), \quad B_a = (\beta - 1)\beta[\beta^3 - (\alpha^2 - 3\alpha + 1)\beta^2 - (1 + \alpha)\alpha\beta + 2\alpha^2]\xi,$$

$$C_a = \beta^2\left[(2\beta^3\alpha - 2\alpha(1 + \alpha^2)\beta^2 + (\alpha + 1)\alpha^2\beta + \alpha^3)\xi^2 + (\beta - 1)((\alpha - 2)\beta^2 - (\alpha + 1)\beta + \alpha)\right],$$

$$D_a = \beta^4\left[(\beta - (1 + \alpha)\alpha)\alpha^2\xi^2 + \alpha^2 + (1 - \beta)(\alpha - \beta)\right]\xi,$$

а неравенство $d > 0$ — к неравенству шестой степени относительно ζ :

$$d = F_d(\zeta) = A_d\zeta^6 + B_d\zeta^5 + C_d\zeta^4 + D_d\zeta^3 + E_d\zeta^2 + F_d\zeta + G_d > 0,$$

Таблица 3. Условие выполнения неравенства $b > 0$

Обл.	Значения ξ	Условия выполнения $b > 0$
1	$\xi_2 < \xi$	$\xi\alpha\beta < \eta^2 < \eta_*^2$
2	$1/\alpha < \xi < \xi_1$	$\eta^2 < \eta_1^2$
	$\xi_1 < \xi < \xi_2$	$\eta^2 < \eta_*^2$
	$\xi_2 < \xi$	$\eta^2 < \xi\alpha\beta$
3	$1/(\alpha\beta) < \xi < \xi_1$	$\xi\alpha\beta < \eta^2 < \eta_1^2$
	$\xi_1 < \xi$	$\xi\alpha\beta < \eta^2 < \eta_*^2$
4	$1/\alpha < \xi < 1/(\alpha\beta)$	$\eta^2 < \eta_1^2$
	$1/(\alpha\beta) < \xi$	$\eta^2 < \xi\alpha\beta$
5	$\xi < 1/(\alpha\beta)$	$\eta_1^2 < \eta^2$
	$1/(\alpha\beta) < \xi$	$\xi\alpha\beta < \eta^2$
6	$1/(\alpha\beta) < \xi < 1/\alpha$	$\eta_1^2 < \eta^2 < \xi\alpha\beta$
	$1/\alpha < \xi$	$\eta^2 < \xi\alpha\beta$
7	$\xi < \xi_1$	$\eta_*^2 < \eta^2$
	$\xi_1 < \xi < 1/(\alpha\beta)$	$\eta_1^2 < \eta^2$
	$1/(\alpha\beta) < \xi$	$\xi\alpha\beta < \eta^2$
8	$1/(\alpha\beta) < \xi < 1/\alpha$	$\eta_1^2 < \eta^2 < \xi\alpha\beta$
	$1/\alpha < \xi$	$\eta^2 < \xi\alpha\beta$
9	$\xi < \xi_2$	$\eta_*^2 < \eta^2$
	$\xi_2 < \xi$	$\xi\alpha\beta < \eta^2$

$$A_d = (\beta - 1)^4(\beta + \beta\alpha - \alpha)^2,$$

$$B_d = 2\xi\beta(\beta - 1)^3(\beta + \beta\alpha - \alpha)\left((\beta - 1)\left[(\beta + 2)\alpha^2 + \beta^2(2\beta - 1)\right] - \beta(4\beta^2 - 5\beta - 1)\alpha\right),$$

$$C_d = \beta^2(\beta - 1)^2\left[\xi^2\left((\beta - 1)^2\left[(\beta^2 + 8\beta + 6)\alpha^4 + \beta^4\right] - 2\alpha\beta(\beta - 1)\left[(17\beta^2 - 25\beta - 2)\alpha^2 + \beta^2(7\beta - 3)\right] + 3\beta^2(6\beta^3 - 25\beta^2 + 24\beta - 3)\alpha^2\right) + 2(\beta - 1)(\beta\alpha + \beta - \alpha)\right],$$

$$D_d = 2\xi\beta^3(\beta - 1)\left[2\alpha\xi^2\left((\beta - 1)^2\left[(\beta^2 + 3\beta + 1)\alpha^4 + \beta^4\right] + \beta^2(8\beta^3 - 30\beta^2 + 27\beta - 4)\alpha^2 - \alpha\beta(\beta - 1)\left[(14\beta^2 - 20\beta + 1)\alpha^2 + \beta^2(4\beta - 1)\right]\right) + (\beta - 1)\left(\beta(11\beta^3 - 18\beta^2 + 6\beta - 2)\alpha^2 - (\beta - 1)\left[(\beta^3 + \beta^2 + 2)\alpha^3 + \beta^2(5\beta^2 - 4\beta - 2)\alpha + 2\beta^3\right]\right)\right],$$

$$E_d = \beta^4\left[\alpha^2\xi^4\left((\beta - 1)^2\left[(6\beta^2 + 8\beta + 1)\alpha^4 + 6\beta^4\right] + \beta^2(28\beta^3 - 90\beta^2 + 72\beta - 9)\alpha^2 - 2\beta\alpha(\beta - 1)\left[(22\beta^2 - 30\beta + 3)\alpha^2 - 2\beta^2(\beta + 1)\right]\right) + 2(\beta - 1)\xi^2\left(\alpha^2\beta\left[(15\beta^3 - 12\beta^2 - 8\beta + 2)\alpha - \beta(9\beta^3 - 10\beta^2 - 8\beta + 6)\right] - (\beta - 1)\left[(2\beta^3 + 3\beta + 1)\alpha^4 + 2\beta^3(\alpha(\beta + 1) + \beta(\beta - 1))\right]\right) + (\beta - 1)^2\left((\beta^2 - \beta + 1)^2\alpha^2 - 2\beta(2\beta^3 - \beta^2 - 5\beta + 1)\alpha + \beta^2(4\beta^2 - 8\beta + 1)\right)\right],$$

$$F_d = 2\beta^6\xi\left[\alpha^3\xi^4\left((2\beta + 1)(\beta - 1)\alpha^4 - (8\beta^2 - 10\beta + 1)\alpha^3 + \alpha\beta^2(2\beta - 3)(3\alpha - 1) + 2\beta^3(\beta - 1)\right) - \right.$$

$$-\alpha\xi^2\left((\beta-1)(\beta^2+\beta+2)\alpha^4-(5\beta^3+2\beta^2-10\beta+2)\alpha^3+\beta(3\beta-1)(\beta^2-2)\alpha^2+2\beta^2(\beta-1)(\alpha(2\beta-1)-\beta(\beta-1))\right)+(\beta-1)\left((\beta^2-\beta+1)\alpha^3-(\beta^3+6\beta^2-\beta-1)(\alpha^2-\beta\alpha)-\beta(2\beta+1)(\alpha+\beta(\beta-1))\right)\Big],$$

$$G_d = \beta^8 \xi^2 \left[\alpha^2 \xi^2 (\beta - \alpha + \alpha^2) - \alpha^2 + (1 - \beta)\alpha + \beta(\beta - 1) \right]^2.$$

Решение этих двух неравенств системы (5.1) будем искать в областях выполнения условия $b > 0$ из таблицы 3.

Рассмотрим систему уравнений

$$b = 0, \quad F_a = 0, \quad F_d = 0, \quad (5.2)$$

решения которой соответствуют точкам пересечения поверхностями $F_a = 0$, $F_d = 0$ (в пространстве параметров α , β , ξ , η) границ исследуемых областей, задаваемых равенством $b = 0$. Заметим, что на этих границах выполняется равенство $d = a^2$, а значит, поверхности $F_a = 0$ и $F_d = 0$ пересекают граничные поверхности в одних и тех же точках.

Определим сначала множество точек пересечения поверхностей $F_a = 0$ и $F_d = 0$ с границей $\zeta = \xi\alpha\beta$ (см. третий столбец в таблице 3). Система (5.2) сводится в этом случае к уравнению

$$F_a|_{\zeta=\xi\alpha\beta} = \beta^3 \xi [Q\xi^2 + W] = 0, \\ Q = \alpha^2 \beta^2 (2\alpha\beta - \alpha + \beta)(\beta - \alpha), \quad W = (\beta^3 - 2\beta^2 + 3\beta - 1)\alpha^2 + 2\alpha\beta(1 - \beta^2) + \beta^2(\beta - 1).$$

Знак коэффициента Q совпадает со знаком разности $\beta - \alpha$. Свободный член W представляет собой квадратное уравнение относительно α , которое принимает положительные значения в областях 1–6 и 8 изменения параметров α , β , а отрицательные — в области 9.

При этом в областях 1, 3 и 5 выражения Q и W одного знака, а значит, $F_a|_{\zeta=\xi\alpha\beta} = 0$ в этих областях не имеет решений для любых значений параметров.

В остальных областях система имеет решение при $\xi = \xi_4 = \sqrt{-W/Q}$. Проверим попадание значений ξ_4 в области изменения параметра ξ , выписанные во втором столбце таблицы 3. Сравним, например,

$$\frac{1}{\alpha^2 \beta^2} - \xi_4^2 = \frac{(\alpha\beta - \alpha - \beta)^2}{\alpha^2 \beta (2\alpha\beta - \alpha + \beta)(\beta - \alpha)} = \frac{\text{const}}{(\beta - \alpha)}, \quad \text{const} > 0.$$

Таким образом, получаем, что

$$\frac{1}{\alpha\beta} > \xi_4, \quad \text{если } \beta > \alpha; \quad \frac{1}{\alpha\beta} < \xi_4 \quad \text{— в противном случае.}$$

В области 7 (для которой $\beta > \alpha$) пересечение с границей $\zeta = \xi\alpha\beta$ может быть только при условии $\xi > 1/(\alpha\beta)$ (см. таблицу 3), поэтому найденная точка ξ_4 не попадает в данный интервал, и вне зависимости от знака W система (5.2) при $\zeta = \xi\alpha\beta$ в области 7 решений не имеет.

В областях с четными номерами (2, 4, 6, 8) значение $\xi = \xi_4$ попадает в один из интервалов допустимых значений ξ , определенных во втором столбце таблицы 3. Таким образом, для этих областей всегда имеются точки пересечения исследуемых поверхностей с граничной поверхностью $\zeta = \xi\alpha\beta$.

Точки пересечения поверхностей $F_a = 0$, $F_d = 0$ с границами $\zeta = \eta_i^2$ ($i = 1, 2$) ищутся аналогично и определяются условием $\xi = \xi_{5,6} = -W/Q_{\pm}$. Здесь

$$Q_{\pm} = -\alpha^2[\beta - 1]^2 \pm \alpha\beta(\beta - 2) \pm \beta^2(\beta - 1), \quad W = \alpha[\beta - 1]^2 + \beta(3 - 2\beta).$$

Здесь плюсы и минусы относятся к ξ_5 (при $\zeta = \eta_1^2$) и ξ_6 (при $\zeta = \eta_2^2$) соответственно. Исследование показало, что система (5.2) для этих границ, аналогично рассмотренной выше границе $\zeta = \xi\alpha\beta$, имеет решение только для областей с четными номерами, для которых $\alpha > \beta$.

Проверка пересечений для границ $\zeta = \eta_{*,**}^2$ приводит к системе кубических уравнений

$$F(\zeta) = 0, \quad F_a(\zeta) = 0.$$

Здесь $F(\zeta)$ — введенное ранее кубическое уравнение (4.2) (причем η_*^2, η_{**}^2 — корни этого уравнения). Рассмотрим области 1, 2, 3, 7, 9, где следует искать пересечения поверхностей (см. таблицу 3). Два многочлена $F(\zeta)$ и $F_a(\zeta)$ имеют общие корни, если их результат обращается в нуль; результат представляется в виде биквадратного трехчлена относительно ξ :

$$\begin{aligned} A_1 \xi^4 + B_1 \xi^2 + C_1 &= 0, \\ A_1 &= -((\beta - 1)^2 \alpha^2 + \beta(3\beta - 2)\alpha - \beta^2(\beta - 1))^3 \alpha^2, \\ B_1 &= \left[\frac{1}{2}(\beta + 1)(\beta - 2)^2(\beta - 1)^3 \alpha^6 + 3\beta(\beta - 1)(\beta^4 - \beta^3 - 5\beta^2 + 6\beta - 2)\alpha^5 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{2}\beta^2(3\beta^4 - 34\beta^3 + 56\beta^2 - 32\beta + 6)\alpha^4 + \beta^3(6\beta^4 - 61\beta^3 + 105\beta^2 - 63\beta + 12)\alpha^3 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{2}\beta^4(\beta - 1)(\beta^3 - 21\beta^2 + 26\beta - 8)\alpha^2 - 3\beta^5(3\beta - 2)(\beta - 1)^2\alpha + \beta^6(\beta - 1)^3 \right] (\beta - 1), \\ C_1 &= -\frac{(\beta - 1)^2}{16} [(\beta - 2)^2\alpha + 4\beta(\beta - 1)]^2 ((\beta + 1)^2\alpha^2 - \beta(5\beta - 2)\alpha + 3\beta^2(\beta - 1)). \end{aligned}$$

Биквадратное уравнение относительно ξ имеет положительные вещественные корни, если его дискриминант, определяемый выражением

$$[(\beta^2 - 4\beta + 2)\alpha^2 + (3\beta - 1)(\beta - 1)\alpha - \beta(\beta - 1)^2] (\alpha - \beta) \geq 0,$$

неотрицателен, а коэффициенты A_1, B_1 и C_1 удовлетворяют некоторым неравенствам, следующим из формул Виета для корней квадратного уравнения. Перечисленные условия накладывают ограничения на область изменения инерционных параметров α, β , для которой возможны искомые пересечения. Эти пересечения (в точках $\xi = \xi_*$ и $\xi = \xi_{**}$, $\xi_* > \xi_{**}$) обнаружены только для подобласти 2* области 2.

Решения уравнений $F_a = 0$ и $F_d = 0$ на границе $\xi = 0$ в исследуемых областях не обнаружены.

Таким образом, выявлено, что в областях с нечетными номерами (1, 3, 5, 7) система (5.2) несовместна. Это означает, что на граничных поверхностях $b = 0$ знаки функций F_a и F_d сохраняются; проверка показывает, что эти знаки положительные. Аналитическая проверка знаков указанных функций на границе $\xi = 0$ и в случае неограниченных значений ξ (для тех областей, где такие значения возможны), а также численно-графический анализ, проведенный внутри областей $b > 0$, показали, что знаки функций F_a и F_d в рассматриваемых областях 1, 3, 5, 7 положительны. Поэтому необходимые условия устойчивости в этих областях сводятся к одному неравенству $b > 0$ и представлены в таблице 3.

Для всех областей с четными номерами найдены случаи пересечения поверхностей $F_a = 0$ и $F_d = 0$ с границами $b = 0$; значит, области $b > 0$ разбиваются на подобласти с различными знаками функций F_a и F_d . Анализ показывает, что знаки обеих функций положительны для значений параметров, приведенных в таблице 4.

На рис. 4 представлены результаты проведенного анализа устойчивости перманентных вращений. Найденные области устойчивости изображены в плоскости параметров η, ξ при фиксированных значениях инерционных параметров α, β из областей 1–9. Рисунки 4, $a-j$ соответствуют областям 1 (a), 2 (b), 2* (c), 3 (d), 4 (e), 5 (f), 6 (g), 7 (h), 8 (i), 9 (j). Показана характерная для каждой области картина устойчивости.

Прямые $\eta = \eta_1$ и $\eta = \eta_2$ на рисунках, относящихся к областям 1–4, отвечают правой и левой границам областей существования перманентных вращений при $s = 1$ и $s = -1$ (см. также таблицу 1). В областях между этими прямыми перманентные вращения не существуют. Области 5–9 относятся к вращениям, для которых $s = 1$.

Таблица 4. Необходимые условия устойчивости в областях с четными номерами

Обл.	Значения ξ	Условия выполнения НУ
2	$\xi_5 < \xi < \xi_1$	$\eta_D^2 < \eta^2 < \eta_1^2$
	$\xi_1 < \xi < \xi_2$	$\eta_D^2 < \eta^2 < \eta_*^2$
	$\xi_2 < \xi < \xi_4$	$\eta_D^2 < \eta^2 < \xi\alpha\beta$
2*	$\xi_5 < \xi < \xi_1$	$\eta_D^2 < \eta^2 < \eta_1^2$
	$\xi_1 < \xi < \xi_{**}$	$\eta_D^2 < \eta^2 < \eta_*^2$
	$\xi_* < \xi < \xi_2$	$\eta_D^2 < \eta^2 < \eta_*^2$
	$\xi_2 < \xi < \xi_4$	$\eta_D^2 < \eta^2 < \xi\alpha\beta$
4	$\xi_5 < \xi < 1/(\alpha\beta)$	$\eta_D^2 < \eta^2 < \eta_1^2$
	$1/(\alpha\beta) < \xi < \xi_4$	$\eta_D^2 < \eta^2 < \xi\alpha\beta$
6	$1/(\alpha\beta) < \xi < \min(1/\alpha, \xi_5, \xi_4)$	$\eta_1^2 < \eta^2 < \xi\alpha\beta$
	$\min(1/\alpha, \xi_5, \xi_4) < \xi < \max(1/\alpha, \xi_5, \xi_4)$	$\eta_D^2 < \eta^2 < \xi\alpha\beta$
8	$1/(\alpha\beta) < \xi < \min(1/\alpha, \xi_5, \xi_4)$	$\eta_1^2 < \eta^2 < \xi\alpha\beta$
	$\min(1/\alpha, \xi_5, \xi_4) < \xi < \max(1/\alpha, \xi_5, \xi_4)$	$\eta_D^2 < \eta^2 < \xi\alpha\beta$

В областях существования перманентных вращений на рис. 4 сплошным цветом закрашены области выполнения как необходимых, так и достаточных условий устойчивости, в заштрихованных областях выполняются только необходимые условия, в остальной части области имеет место неустойчивость.

Приведенный анализ показывает, что перманентные вращения, для которых центр масс тела расположен ниже точки подвеса тела (случай $s = -1$), в областях 2, 2*, 4 устойчивы при всех допустимых значениях параметров η , ξ . Эти движения устойчивы и в случае отсутствия вибрации ($\xi = 0$), однако с появлением вибрации точки подвеса нижняя граница диапазона допустимых значений угловых скоростей перманентных вращений возрастает. В областях 1 и 3 рассматриваемые перманентные вращения всегда неустойчивы, как и при отсутствии вибраций.

Перманентные вращения, для которых центр масс расположен выше точки подвеса (случай $s = 1$), можно стабилизировать в областях 1–4 в определенном диапазоне угловых скоростей за счет вибраций точки подвеса; при отсутствии вибраций имеет место неустойчивость.

В областях 5, 7, 8, 9, по сравнению со случаем отсутствия вибрации, сдвигается в сторону уменьшения нижняя граница угловых скоростей устойчивых перманентных вращений. Для точек области 8 увеличение параметра ξ приводит к исчезновению подобласти выполнения достаточных условий устойчивости, при этом имеется новая подобласть устойчивости в линейном приближении, появляющаяся за счет вибрации. В области 9 при $\xi > 0$, кроме расширения области устойчивости в линейном приближении, отметим появление подобласти выполнения достаточных условий устойчивости. В области 6 имеет место стабилизация рассматриваемых перманентных вращений для определенного диапазона угловых скоростей и частоты вибрации точки подвеса.

§ 6. Нелинейный анализ устойчивости

В областях изменения параметров задачи, где выполняются только необходимые условия устойчивости, может быть проведен нелинейный анализ устойчивости решений (1.8), опирающийся на известные методы исследования устойчивости автономных гамильтоновых систем с двумя степенями свободы [36].

Нормализуем гамильтониан возмущенного движения (3.1) в членах до четвертого порядка включительно относительно возмущений. Сначала приведем квадратичную часть (3.2) гамиль-

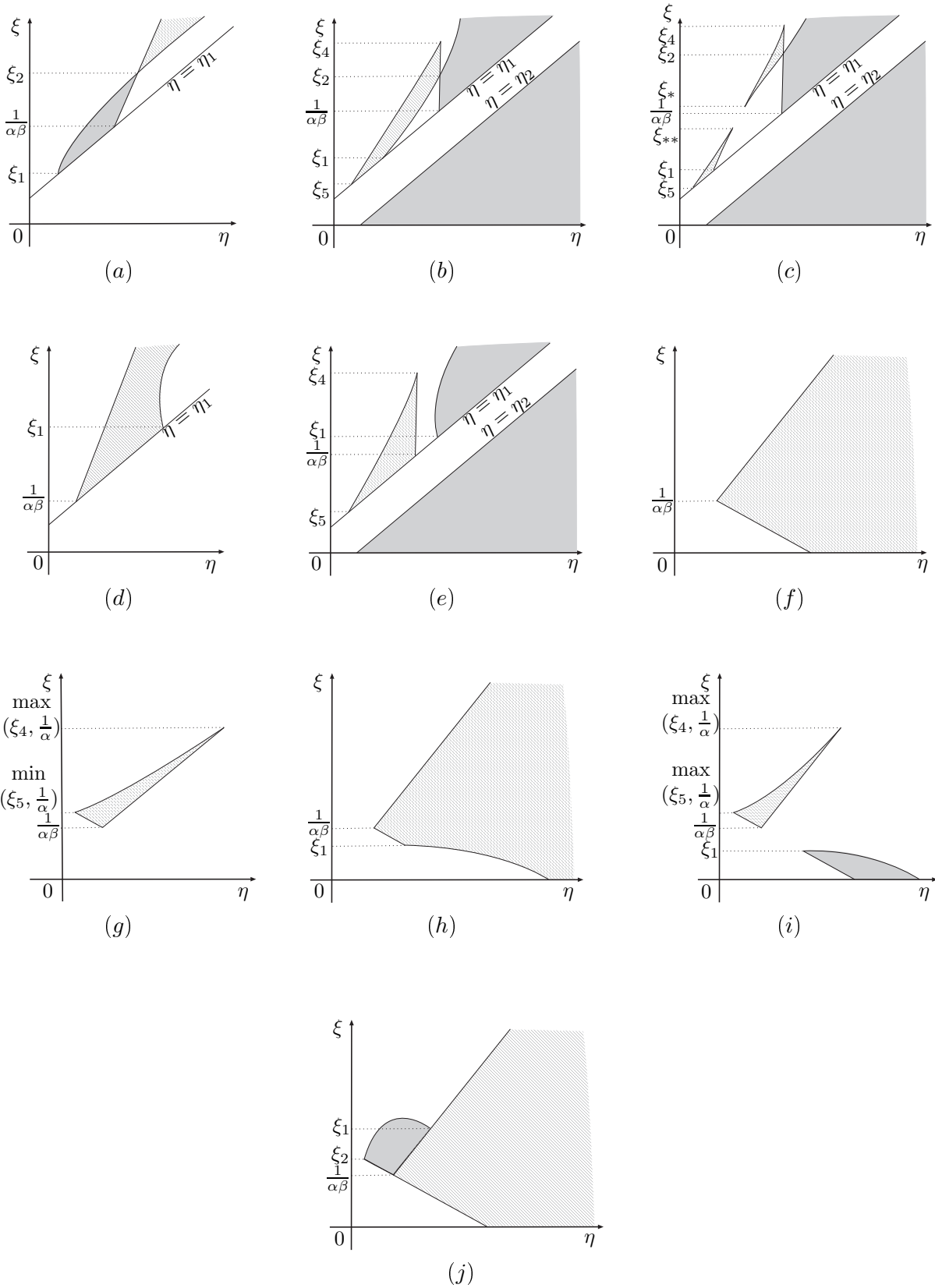


Рис. 4. Области устойчивости

тониана к нормальной форме вида

$$\tilde{H}_2 = \frac{1}{2}\sigma_1(q_1^2 + p_1^2) - \frac{1}{2}\sigma_2(q_2^2 + p_2^2),$$

используя линейное унивалентное каноническое преобразование $x_i, y_i \rightarrow q_i, p_i$ ($i = 1, 2$):

$$\begin{aligned} x_1 &= n_{11}q_1 + n_{12}q_2, & x_2 &= n_{23}p_1 + n_{24}p_2, \\ y_1 &= n_{33}p_1 + n_{34}p_2, & y_2 &= n_{41}q_1 + n_{42}q_2, \\ n_{11} &= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2\kappa}(a_1a_3 - a_2a_4 + \sqrt{d})}{o_1\sqrt{\chi}}, & n_{12} &= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2\kappa}(a_1a_3 - a_2a_4 - \sqrt{d})}{o_2\sqrt{\chi}}, \\ n_{23} &= \frac{1}{2} \frac{\varsigma\sigma_1(a_2a_4a_6 + a_1a_3a_6 - 2a_2a_3a_5 - a_6\sqrt{d})}{o_1\kappa}, \\ n_{24} &= -\frac{1}{2} \frac{\varsigma\sigma_2(a_2a_4a_6 + a_1a_3a_6 - 2a_2a_3a_5 + a_6\sqrt{d})}{o_2\kappa}, \\ n_{33} &= \frac{1}{2} \frac{\varsigma\sigma_1(a_1a_2a_3 + a_2\sqrt{d} - a_2^2a_4 + 2a_2a_5a_6 - 2a_6^2a_1)}{o_1\kappa}, \\ n_{34} &= -\frac{1}{2} \frac{\varsigma\sigma_2(a_1a_2a_3 - a_2\sqrt{d} - a_2^2a_4 + 2a_2a_5a_6 - 2a_6^2a_1)}{o_2\kappa}, \\ n_{41} &= -\frac{\sqrt{2\chi\kappa}}{o_1}, & n_{42} &= -\frac{\sqrt{2\chi\kappa}}{o_2}, \\ \varsigma &= \sqrt{2\chi\kappa}, & \kappa &= \chi(a_2a_3 - a_6^2), & \chi &= a_6a_1 - a_2a_5, & \lambda &= -a_2^2a_4 + 2a_2a_5a_6 + a_1a_2a_3 - 2a_6^2a_1, \\ o_1 &= \sqrt{\sigma_1\sqrt{d}(\lambda + a_2\sqrt{d})}, & o_2 &= \sqrt{\sigma_2\sqrt{d}(\lambda - a_2\sqrt{d})}, \\ \sigma_{1,2} &= \frac{1}{2} \sqrt{2a_2a_4 - 4a_5a_6 + 2a_1a_3 \pm 2\sqrt{d}} \quad (\sigma_1 > \sigma_2). \end{aligned}$$

Здесь d — дискриминант характеристического уравнения, введенный в (5.1), а σ_1 и σ_2 — частоты малых линейных колебаний системы. Параметры a_1 – a_6 введены ранее в соотношениях (3.3).

Затем в преобразованном гамильтониане проведем нормализацию слагаемых третьей и четвертой степеней. При отсутствии резонансов третьего и четвертого порядков нормализованный гамильтониан возмущенного движения в «полярных» координатах φ_j и r_j , задаваемых формулами $q_j = \sqrt{2r_j} \sin \varphi_j$, $p_j = \sqrt{2r_j} \cos \varphi_j$ ($j = 1, 2$), имеет вид

$$H = \sigma_1 r_1 - \sigma_2 r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 + O(r_j^{5/2}).$$

Здесь слагаемое $O(r_j^{5/2})$ 2π -периодично по угловым переменным φ_j ($j = 1, 2$), а коэффициенты c_{02} , c_{11} и c_{02} представляются в виде

$$\begin{aligned} c_{20} &= \frac{3}{2(4\sigma_1^2 - \sigma_2^2)\sigma_1\sigma_2} \left(8(l_2 + l_6)^2 \sigma_1^3 + 8(3m_2 + m_6 + 3m_9)\sigma_2\sigma_1^3 - (3l_2^2 + 2l_2l_6 + 3l_6^2 + l_7^2)\sigma_1\sigma_2^2 - \right. \\ &\quad \left. - 2(3m_2 + m_6 + 3m_9)\sigma_2^3\sigma_1 + 3(5l_1^2 + 2l_1l_5 + l_5^2)\sigma_2^3 \right), \\ c_{11} &= -\frac{6}{(4\sigma_1^2 - \sigma_2^2)(\sigma_1^2 - 4\sigma_2^2)\sigma_1\sigma_2} \left((m_4 + m_7 + m_{14} + m_{15})(17\sigma_1^2\sigma_2^2 - 4\sigma_1^4 - 4\sigma_2^4)\sigma_1\sigma_2 - \right. \\ &\quad - \left[17(3l_1 + l_5)(l_3 + l_9) + 8(l_2 - l_6)^2 - 2l_8(l_3 - l_9) + 8l_7^2 \right] \sigma_1^2\sigma_2^3 + 4(l_3 + l_9)(3l_1 + l_5)\sigma_2^5 - \\ &\quad - 4(l_2 + l_6)(3l_4 + l_{10})\sigma_1^5 - 2 \left[2(l_2 + l_6)(3l_4 + l_{10}) + (l_3 - l_9)^2 + l_8^2 - 4l_7(l_2 - l_6) \right] \sigma_1\sigma_2^4 + \\ &\quad + \left[17(3l_4 + l_{10})(l_2 + l_6) - 2l_7(l_2 - l_6) + 8(l_3 - l_9)^2 + 8l_8^2 \right] \sigma_1^3\sigma_2^2 + \\ &\quad + 2 \left[2(l_3 + l_9)(3l_1 + l_5) + (l_2 - l_6)^2 - 4l_8(l_3 - l_9) + l_7^2 \right] \sigma_1^4\sigma_2 \right), \\ c_{02} &= \frac{3}{2(\sigma_1^2 - 4\sigma_2^2)\sigma_1\sigma_2} \left(8(l_3 + l_9)^2\sigma_2^3 + 2(m_{17} + 3m_3 + 3m_{19})(\sigma_1^2 - 4\sigma_2^2)\sigma_1\sigma_2 - \right. \\ &\quad \left. - 4 \left[3(l_{10} + l_4)^2 + 12l_4^2 - l_8(l_3 - l_9) \right] \sigma_1\sigma_2^2 + 3 \left[4l_4^2 + (l_{10} + l_4)^2 \right] \sigma_1^3 - \left[3(l_3 + l_9)^2 + l_8^2 \right] \sigma_1^2\sigma_2 \right). \end{aligned}$$

Условие устойчивости (по Ляпунову) положения равновесия приведенной системы, отвечающего рассматриваемому перманентному вращению тела, следует из теоремы Арнольда–Мозера [37] и определяется неравенством

$$\Delta = c_{20}\sigma_2^2 + c_{11}\sigma_1\sigma_2 + c_{02}\sigma_1^2 \neq 0. \quad (6.1)$$

Явный вид величины Δ здесь и для рассматриваемых ниже частных случаев не приводим в силу громоздкости. Случай вырождения $\Delta = 0$ требует анализа в гамильтониане возмущенного движения слагаемых до шестого порядка включительно относительно возмущений, такой анализ в данной работе не проводится.

Если в системе реализуется резонанс третьего порядка ($\sigma_1 = 2\sigma_2$), то с помощью нелинейной нормализации гамильтониан приводится к виду

$$H = 2\sigma_2 r_1 - \sigma_2 r_2 + k_3 \sqrt{r_1} r_2 \sin(\varphi_1 + 2\varphi_2) + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 + O(r_j^{5/2}),$$

в котором резонансный коэффициент вычисляется по формуле

$$k_3 = l_3 - l_8 - l_9.$$

При выполнении условия $k_3 \neq 0$ исследуемое решение неустойчиво. Если же $k_3 = 0$ и при этом

$$c_{20} + 2c_{11} + 4c_{02} \neq 0,$$

то имеет место устойчивость [36].

Пусть в системе нет резонанса третьего порядка, но есть резонанс четвертого порядка ($\sigma_1 = 3\sigma_2$). Гамильтониан преобразуется к виду

$$H = 2\sigma_2 r_1 - \sigma_2 r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 + k_4 \sqrt{r_1} r_2 \cos(\varphi_1 + 3\varphi_2) + O(r_j^{5/2}),$$

$$k_4 = \frac{3}{5\sigma_2} \left(5(m_5 - m_{11} - m_{16} + m_{18})\sigma_2 - (6l_2 + 10l_4 + 4l_6 - l_7 + 10l_{10})l_3 + \right.$$

$$\left. + (6l_2 + 20l_4 + 4l_6 - l_7)l_9 + (4l_2 + 15l_4 + 6l_6 + l_7 + 5l_{10})l_8 \right).$$

Условие устойчивости по Ляпунову определяется в этом случае неравенством [36]

$$|c_{20} + 3c_{11} + 9c_{02}| > 3\sqrt{3}k_4.$$

Если неравенство выполнено с противоположным знаком, то перманентное вращение неустойчиво.

В выражениях для величин c_{ij} и резонансных коэффициентов k_3, k_4 введены следующие обозначения:

$$l_1 = n_{11}(n_{41}^2 b_4 + n_{11} b_5 n_{41} + n_{11}^2 b_2), \quad l_2 = 3(b_2 n_{12} + n_{42} b_5) n_{11}^2 + 2n_{41}(b_5 n_{12} + b_4 n_{42}) n_{11} + b_4 n_{12} n_{41}^2,$$

$$l_3 = (2n_{42} b_5 n_{12} + n_{42}^2 b_4 + 3b_2 n_{12}^2) n_{11} + n_{12} n_{41} (2b_4 n_{42} + b_5 n_{12}), \quad l_4 = n_{12} (n_{42}^2 b_4 + n_{42} b_5 n_{12} + b_2 n_{12}^2),$$

$$l_5 = ((n_{23} b_1 + n_{33} b_3) n_{11} + n_{41} (n_{23} b_7 + b_6 n_{33})) n_{23}, \quad l_6 = ((n_{23} b_1 + n_{33} b_3) n_{12} + n_{42} (n_{23} b_7 + b_6 n_{33})) n_{23},$$

$$l_7 = ((b_1 n_{24} + n_{34} b_3) n_{11} + n_{41} (b_7 n_{24} + b_6 n_{34})) n_{23} + ((n_{23} b_1 + n_{33} b_3) n_{11} + n_{41} (n_{23} b_7 + b_6 n_{33})) n_{24},$$

$$l_8 = ((b_1 n_{24} + n_{34} b_3) n_{12} + n_{42} (b_7 n_{24} + b_6 n_{34})) n_{23} + ((n_{23} b_1 + n_{33} b_3) n_{12} + n_{42} (n_{23} b_7 + b_6 n_{33})) n_{24},$$

$$l_9 = ((b_1 n_{24} + n_{34} b_3) n_{11} + n_{41} (b_7 n_{24} + b_6 n_{34})) n_{24}, \quad l_{10} = ((b_1 n_{24} + n_{34} b_3) n_{12} + n_{42} (b_7 n_{24} + b_6 n_{34})) n_{24},$$

$$m_1 = n_{11} ((4n_{12} c_3 + n_{42} c_9) n_{11}^2 + (2n_{42} c_8 + 3n_{12} c_9) n_{11} n_{41} + 2n_{12} n_{41}^2 c_8),$$

$$m_2 = (c_3 n_{11}^2 + n_{11} n_{41} c_9 + n_{41}^2 c_8) n_{11}^2, \quad m_3 = (c_9 n_{42} n_{12} + c_3 n_{12}^2 + n_{42}^2 c_8) n_{12}^2,$$

$$m_4 = (3c_9 n_{42} n_{12} + 6c_3 n_{12}^2 + n_{42}^2 c_8) n_{11}^2 + (3n_{12}^2 n_{41} c_9 + 4n_{12} n_{41} c_8 n_{42}) n_{11} + n_{12}^2 n_{41}^2 c_8,$$

$$m_5 = (3n_{11} n_{42} c_9 n_{12} + 4n_{11} c_3 n_{12}^2 + 2n_{11} n_{42}^2 c_8 + 2n_{12} n_{41} c_8 n_{42} + n_{12}^2 n_{41} c_9) n_{12},$$

$$m_6 = ((c_1 n_{11}^2 + c_{11} n_{41} n_{11} + n_{41}^2 c_7) n_{23} + n_{11} n_{33} (c_5 n_{11} + n_{41} c_{10})) n_{23},$$

$$m_7 = ((c_1 n_{12}^2 + n_{42}^2 c_7 + c_{11} n_{42} n_{12}) n_{23} + n_{33} n_{12} (c_5 n_{12} + c_{10} n_{42})) n_{23},$$

$$\begin{aligned}
m_8 &= ((2c_1n_{12} + c_{11}n_{42})n_{11} + (2c_7n_{42} + c_{11}n_{12})n_{41})n_{23} + \\
&\quad + ((2c_5n_{12} + c_{10}n_{42})n_{11} + c_{10}n_{12}n_{41})n_{33})n_{23}, \\
m_9 &= (n_{23}c_4n_{33} + n_{33}^2c_6 + n_{23}^2c_2)n_{23}^2, \quad m_{10} = ((2n_{24}c_1 + n_{34}c_5)n_{23} + n_{24}n_{33}c_5)n_{11}^2 + \\
&\quad + ((c_{10}n_{34} + 2c_{11}n_{24})n_{23} + c_{10}n_{33}n_{24})n_{41}n_{11} + 2n_{23}n_{24}n_{41}^2c_7, \\
m_{11} &= ((2n_{24}c_1 + n_{34}c_5)n_{23} + n_{24}n_{33}c_5)n_{12}^2 + ((c_{10}n_{34} + 2c_{11}n_{24})n_{23} + c_{10}n_{33}n_{24})n_{42}n_{12} + \\
&\quad + 2n_{23}n_{24}n_{42}^2c_7, \quad m_{12} = ((2(2c_1n_{12} + c_{11}n_{42})n_{11} + 2(2c_7n_{42} + c_{11}n_{12})n_{41})n_{24} + \\
&\quad + ((2c_5n_{12} + c_{10}n_{42})n_{11} + c_{10}n_{12}n_{41})n_{34})n_{23} + n_{33}n_{24}((2c_5n_{12} + c_{10}n_{42})n_{11} + c_{10}n_{12}n_{41}), \\
m_{13} &= (4n_{23}^2c_2n_{24} + n_{23}^2n_{34}c_4 + 2n_{33}n_{23}c_6n_{34} + 3n_{23}c_4n_{33}n_{24} + 2c_6n_{24}n_{33}^2)n_{23}, \\
m_{14} &= (n_{34}^2c_6 + 6c_2n_{24}^2 + 3c_4n_{24}n_{34})n_{23}^2 + (3n_{33}n_{24}^2c_4 + 4n_{24}n_{33}c_6n_{34})n_{23} + c_6n_{24}^2n_{33}^2, \\
m_{15} &= ((c_1n_{11}^2 + c_{11}n_{41}n_{11} + n_{41}^2c_7)n_{24} + n_{11}n_{34}(c_5n_{11} + n_{41}c_{10}))n_{24}, \\
m_{16} &= ((2c_1n_{12} + c_{11}n_{42})n_{24}n_{11} + (2c_7n_{42} + c_{11}n_{12})n_{24}n_{41} + (2c_5n_{12} + c_{10}n_{42})n_{11}n_{34} + \\
&\quad + c_{10}n_{34}n_{12}n_{41})n_{24}, \quad m_{17} = ((c_1n_{12}^2 + n_{42}^2c_7 + c_{11}n_{42}n_{12})n_{24} + n_{34}n_{12}(c_5n_{12} + c_{10}n_{42}))n_{24}, \\
m_{18} &= (4n_{23}c_2n_{24}^2 + 3n_{23}c_4n_{24}n_{34} + 2n_{23}n_{34}^2c_6 + n_{33}n_{24}^2c_4 + 2n_{24}n_{33}c_6n_{34})n_{24}. \\
m_{19} &= (c_4n_{24}n_{34} + n_{34}^2c_6 + c_2n_{24}^2)n_{24}^2,
\end{aligned}$$

Таким образом, устойчивость стационарного вращения в исследуемых областях устойчивости в линейном приближении может нарушиться для значений параметров (β, ξ, η) , принадлежащих поверхностям резонансов третьего и четвертого порядков или поверхности вырождения $\Delta = 0$ из (6.1).

§ 7. Частные случаи геометрии масс тела

Нелинейный анализ устойчивости проведем для двух значений инерционного параметра α : $\alpha = 1$ (случай динамически симметричного тела) и $\alpha = 2$ (геометрия масс тела соответствует случаю Бобылева–Стеклова).

7.1. Случай динамической симметрии

Случаю динамической симметрии $\alpha = 1$ ($A = B$) соответствует отрезок прямой $\alpha = 1$ при $\beta > 1/2$ (см. рис. 3).

Анализ устойчивости проводился следующим образом. Рассматривались сечения изучаемых областей трехмерного пространства параметров плоскостями $\beta = \text{const}$ при различных значениях параметра β из интервала $\beta > 1/2$. В получаемых сечениях, в плоскости параметров η, ξ строились области устойчивости в линейном приближении, а также имеющиеся в них кривые резонансов третьего и четвертого порядков и кривые вырождения; на кривых резонанса четвертого порядка выделялись участки устойчивости и неустойчивости. При этом отслеживалась эволюция изучаемых областей и картины устойчивости.

На рисунках, иллюстрирующих полученные результаты (см. рис. 5, 6), области, где не выполняются необходимые условия устойчивости, закрашены серым цветом. Кривые резонанса третьего порядка показаны тонкими линиями. Кривые резонанса четвертого порядка изображены полужирными линиями на участках устойчивости и пунктирными линиями на участках неустойчивости. Кривые вырождения показаны точечными линиями.

Вид полученных сечений и картина устойчивости в них качественно отличаются для значений β из интервалов $1/2 < \beta < 1$ (области 2 и 4) и $\beta > 1$ (области 5, 7, 9).

Для областей 2 и 4 исследуемые множества в плоскости параметров ξ, η ограничены и представляют собой криволинейный четырехугольник (для области 2 рис. 5, а) или криволинейный треугольник (для области 4 рис. 5, б). В этих областях во всех исследуемых сечениях существуют кривая вырождения, а также кривые резонансов третьего и четвертого порядков. Все три кривые имеют общие концы в угловых точках области.

Для точек кривой резонанса третьего порядка всегда имеет место неустойчивость. Кривые вырождения и резонанса четвертого порядка имеют точку пересечения; в этой точке, а также

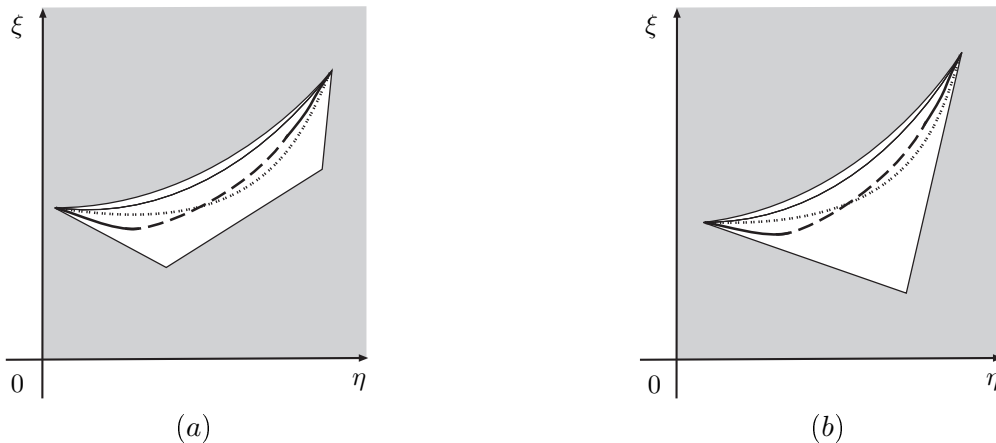


Рис. 5. Области 2, 4

на среднем участке резонансной кривой, содержащем эту точку, исследуемое перманентное вращение неустойчиво, вне данного участка имеем устойчивость.

Для значений параметра β (при $\alpha = 1$) из областей 5, 7, 9 области выполнения только необходимых условий устойчивости неограниченны (см. рис. 6). Рис. 6, *a–j* соответствуют области 5 (*a*), области 7 при $4/3 < \beta < 1.352$ (*b*), $1.352 < \beta < 1.395$ (*c*), $1.395 < \beta < 1.459$ (*d*), $1.459 < \beta < 1.483$ (*e*), $1.483 < \beta < 1.5$ (*f*), $1.5 < \beta < 1.54$ (*g*), $1.54 < \beta < 1.64$ (*h*), $1.64 < \beta < 2$ (*i*), области 9 (*j*).

В области 5 (рис. 6, *a*) в исследуемой части плоскости параметров η , ξ существуют одна кривая резонанса четвертого порядка и одна ветвь кривой вырождения. На резонансной кривой перманентное вращение устойчиво.

При переходе в область 7 (рис. 6, *b–i*) эти две кривые сохраняются, а картина устойчивости качественно такая же, как в области (рис. 6, *b*). С ростом β две кривые «сближаются», при этом на резонансной кривой появляется участок неустойчивости (рис. 6, *c*). При переходе через значение $\beta = 1.395$ (рис. 6, *d*) у резонансной кривой и кривой вырождения появляется точка пересечения в зоне неустойчивости на резонансной кривой.

В области 7 существует также вторая ветвь кривой вырождения, имеющая при $4/3 < \beta < 1.459$ две общие точки с осью абсцисс (рис. 6, *b–d*). С ростом β правая точка пересечения «ползет» вдоль оси абсцисс, а при переходе через $\beta = 1.459$ (рис. 6, *e*) «отрывается» от нее. Начиная со значения $\beta = 1.483$ (рис. 6, *f*), кривая резонанса четвертого порядка пересекает (на участке неустойчивости) обе ветви кривой вырождения, а при переходе через $\beta = 1.5$ (рис. 6, *g*) пересекает также и ось абсцисс.

С дальнейшим увеличением β две ветви кривой вырождения сближаются и при $\beta = 1.54$ (рис. 6, *h*) «смыкаются» в общей точке; при этом резонансная кривая и кривая вырождения по-прежнему имеют две точки пересечения. Участок между этими общими точками с ростом β уменьшается, при $\beta = 1.64$ (рис. 6, *i*) стягивается в точку, после чего кривая вырождения «отрывается» от резонансной кривой.

В области 9 ($\beta > 2$, см. рис. 6, *j*) две кривые снова имеют две точки пересечения. Кроме того, в этой области появляется кривая резонанса третьего порядка, на которой рассматриваемое движение неустойчиво.

7.2. Случай $\alpha = 2$

В случае $\alpha = 2$ ($A = 2B$) параметр β меняется в диапазоне $2/3 < \beta < 2$. Анализ проводится аналогично предыдущему, в каждом сечении $\beta = \text{const}$ область выполнения только необходимых условий устойчивости представляет собой криволинейный треугольник в плоскости параметров ξ , η . Его характерный вид такой же, как и для точек области 4 рассмотренного

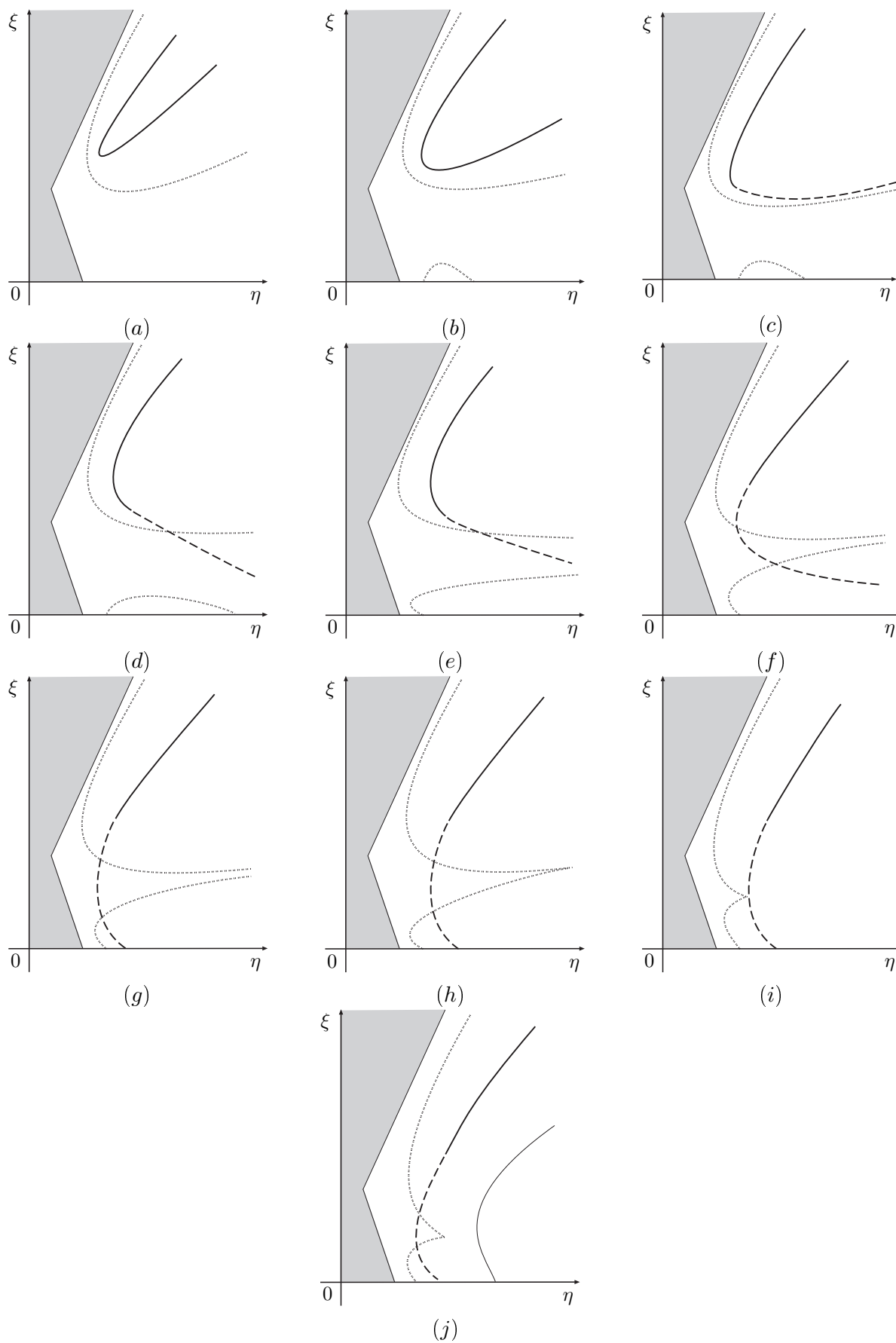


Рис. 6. Области 5, 7, 9

выше случая динамической симметрии (см. рис. 5, *b*). Состав кривых и картина устойчивости внутри самой области также качественно не отличаются от представленных на этом рисунке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Stephenson A. On a new type of dynamical stability // *Memoirs and Proceedings of the Manchester Literary & Philosophical Society*. 1908. Vol. 52. Part 2. No. 8. P. 1–10.
2. Блехман И.И. Вибрационная механика. М.: Физматлит, 1994. 400 с.
3. Стрижак Т.Г. Методы исследования динамических систем типа «маятник». Алма-Ата: Наука, 1981. 253 с.
4. Холостова О.В. Задачи динамики твердых тел с вибрирующим подвесом. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2016. 308 с.
5. Юдович В.И. Вибродинамика и виброгеометрия механических систем со связями // *Успехи механики*. 2006. Т. 4. № 3. С. 26–158.
6. Капица П.Л. Маятник с вибрирующим подвесом // *Успехи физических наук*. 1951. Т. 44. Вып. 5. С. 7–20. DOI: [10.3367/UFNr.0044.195105b.0007](https://doi.org/10.3367/UFNr.0044.195105b.0007)
7. Капица П.Л. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. 1951. Т. 21. Вып. 5. С. 588–597.
8. Боголюбов Н.Н. Теория возмущений в нелинейной механике // *Сборник трудов Института строит. механики АН УССР*. 1950. № 14. С. 9–34.
9. Бардин Б.С., Маркеев А.П. Об устойчивости равновесия маятника при вертикальных колебаниях точки подвеса // *Прикладная математика и механика*. 1995. Т. 59. Вып. 6. С. 922–929.
10. Холостова О.В. Об устойчивости периодических движений маятника с горизонтально вибрирующей точкой подвеса // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. 1997. № 4. С. 35–39.
11. Маркеев А.П. О динамике сферического маятника с вибрирующим подвесом // *Прикладная математика и механика*. 1999. Т. 63. Вып. 2. С. 213–219.
12. Холостова О.В. О движениях маятника с вибрирующей точкой подвеса // *Теоретическая механика: сб. статей*. М.: Изд-во МГУ, 2000. Вып. 24. С. 157–167.
13. Холостова О.В. О движениях двойного маятника с вибрирующей точкой подвеса // *Известия РАН. Механика твердого тела*. 2009. № 2. С. 25–40.
14. Вишенкова Е.А., Холостова О.В. К динамике двойного маятника с горизонтально вибрирующей точкой подвеса // *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*. 2012. Вып. 2. С. 114–129. DOI: [10.20537/vm120211](https://doi.org/10.20537/vm120211).
15. Холостова О.В. О периодических движениях волчка Лагранжа с вибрирующей точкой подвеса // *Известия РАН. Механика твердого тела*. 2002. № 1. С. 34–48.
16. Холостова О.В. О динамике волчка Лагранжа с вибрирующей точкой подвеса // *Прикладная математика и механика*. 1999. Т. 63. Вып. 5. С. 785–796.
17. Холостова О.В. Об одном случае периодических движений волчка Лагранжа с вибрирующим подвесом // *Доклады Академии наук*. 2000. Т. 375. № 5. С. 627–630.
18. Kholostova O.V. On a case of periodic motions of the Lagrangian top with vibrating fixed point // *Regular & Chaotic Dynamics*. 1999. Vol. 4. No. 4. P. 81–93.
19. Маркеев А.П. О движении тяжелого динамически симметричного твердого тела с вибрирующей точкой подвеса // *Известия РАН. Механика твердого тела*. 2012. № 4. С. 3–10.
20. Маркеев А.П. К теории движения твердого тела с вибрирующим подвесом // *Доклады Академии наук*. 2009. Т. 427. № 6. С. 771–775.
21. Маркеев А.П. Об уравнениях приближенной теории движения твердого тела с вибрирующей точкой подвеса // *Прикладная математика и механика*. 2011. Т. 75. № 2. С. 193–203.
22. Холостова О.В. Об устойчивости равновесий твердого тела с вибрирующей точкой подвеса // *Вестник РУДН. Математика. Информатика. Физика*. 2011. № 2. С. 111–122.
23. Сафонов А.И. О влиянии вязкого трения на устойчивость равновесий тела с вибрирующим подвесом // *Вестник МАИ*. 2014. Т. 21. № 2. С. 158–168.
24. Staude O. Ueber permanente Rotationsachsen bei der Bewegung eines schweren Körpers um einen festen Punkt // *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. 1894. Vol. 1894. Issue 113. P. 318–334. DOI: [10.1515/crll.1894.113.318](https://doi.org/10.1515/crll.1894.113.318)
25. Млодзеевский Б.К. О перманентных осях в движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки // *Труды отделения физических наук Общества любителей естествознания*. 1894. Т. 7. Вып. 1. С. 46–48.

26. Холостова О.В. Исследование устойчивости перманентных вращений Штауде. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008. 128 с.
27. Граммель Р. Гироскоп, его теория и применения. В 2-х томах. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1962.
28. Румянцев В.В. Устойчивость перманентных вращений тяжелого твердого тела // Прикладная математика и механика. 1956. Т. 20. Вып. 1. С. 51–66.
29. Румянцев В.В. Об устойчивости вращения тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой в случае С.В. Ковалевской // Прикладная математика и механика. 1954. Т. 18. Вып. 4. С. 457–458.
30. Магнус К. Гироскоп. Теория и применения. М.: Мир, 1974. 526 с.
31. Ковалев А.М., Савченко А.Я. Устойчивость равномерных вращений твердого тела вокруг главной оси // Прикладная математика и механика. 1975. Т. 39. Вып. 4. С. 650–660.
32. Сергеев В.С. Об устойчивости перманентных вращений тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки // Прикладная математика и механика. 1976. Т. 40. Вып. 3. С. 408–416.
33. Ковалев А.М., Савченко А.Я. Устойчивость стационарных движений гамильтоновых систем при наличии резонанса четвертого порядка // Механика твердого тела. Киев: Наукова думка, 1977. Вып. 9. С. 40–44.
34. Холостова О.В. Об устойчивости частных движений тяжелого твердого тела, обусловленных быстрыми вертикальными вибрациями одной из его точек // Нелинейная динамика. 2015. Т. 11. № 1. С. 99–116. DOI: [10.20537/nd1501005](https://doi.org/10.20537/nd1501005)
35. Вишенкова Е.А. Об устойчивости частных решений приближенных уравнений движения тяжелого твердого тела с вибрирующей точкой подвеса // Нелинейная динамика. 2015. Т. 11. № 3. С. 459–474. DOI: [10.20537/nd1503002](https://doi.org/10.20537/nd1503002)
36. Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
37. Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики. Изд. 3-е. М.: Едиториал УРСС, 2009. 416 с.

Поступила в редакцию 30.12.2016

Вишенкова Екатерина Алексеевна, кафедра теоретической механики, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), 125080, Россия, г. Москва, Волоколамское ш., 4.
E-mail: vishenkova@bk.ru

Холостова Ольга Владимировна, д. ф.-м. н., профессор, кафедра теоретической механики, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), 125080, Россия, г. Москва, Волоколамское ш., 4;
доцент, кафедра теоретической механики, Московский физико-технический институт (государственный университет), 141700, Россия, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, 9.
E-mail: kholostova_o@mail.ru

E. A. Vishenkova, O. V. Kholostova

On the influence of vertical vibrations on the stability of permanent rotations of a rigid body about axes lying in the main plane of inertia

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2017, vol. 27, issue 1, pp. 98–120 (in Russian).

Keywords: permanent rotations, high-frequency oscillations, stability, rigid body.

MSC2010: 53A17, 70E20, 70E50

DOI: [10.20537/vm170109](https://doi.org/10.20537/vm170109)

The motion of a rigid body in a uniform gravity field is considered for the case of high-frequency vertical harmonic small-amplitude oscillations of one of its points (the suspension point). The center of mass of the body is assumed to lie on one of the principal axes of inertia for the suspension point. In the framework of an approximate autonomous system of differential equations of motion written in the canonical Hamiltonian form the special motions of the body are studied, which are permanent rotations about the axes directed vertically and lying in the principal planes of inertia containing the above-mentioned principal axis. Analogous

permanent rotations exist for the body with a fixed suspension point. The influence of the fast vibrations on the stability of these rotations is examined. For all admissible values of the four-dimensional parameter space (two inertial parameters, and parameters characterizing the vibration frequency and the rotation angular velocity) the necessary and in some cases sufficient conditions for stability are written and illustrated. They are considered as the stability conditions of the corresponding equilibrium positions of the reduced (in the sense of Routh) autonomous Hamiltonian two-degree-of-freedom system. Nonlinear stability analysis is carried out for two special cases of the inertial parameter corresponding to the dynamically symmetric body and the body with the geometry of the mass for the Bobilev–Steklov case. The nonresonant and resonant cases are considered as well as the degeneration cases. A comparison is made between the results obtained and the corresponding results for the body with the fixed suspension point.

REFERENCES

1. Stephenson A. On a new type of dynamical stability, *Memoirs and Proceedings of the Manchester Literary & Philosophical Society*, 1908, vol. 52, part 2, no. 8, pp. 1–10.
2. Blekhman I.I. *Vibratsionnaya mekhanika* (Vibration mechanics), Moscow: Fizmatlit, 1994, 400 p.
3. Strizhak T.G. *Metody issledovaniya dinamicheskikh sistem tipa “mayatnik”* (Methods of research of dynamic systems of the type “pendulum”), Alma-Ata: Nauka, 1981, 253 p.
4. Kholostova O.V. *Zadachi dinamiki tverdykh tel s vibriruyushchim podvesom* (Problems of dynamics of solids with vibrating suspension), Moscow–Izhevsk: Regular and Chaotic Dynamics, 2016, 308 p.
5. Yudovich V.I. Vibrodynamics and vibrogeometry of mechanical systems with constraints, *Uspekhi Mekhaniki*, 2006, vol. 4, no. 3, pp. 26–158 (in Russian).
6. Kapitza P.L. Pendulum with a vibrating suspension, *Usp. Fiz. Nauk*, 1951, vol. 44, no. 5, pp. 7–20 (in Russian). DOI: [10.3367/ufnr.0044.195105b.0007](https://doi.org/10.3367/ufnr.0044.195105b.0007)
7. Kapitza P.L. P. Dynamic stability of a pendulum with an oscillating point of suspension, *Zh. Eksper. Teor. Fiz.*, 1951, vol. 21, no. 5, pp. 588–597 (in Russian).
8. Bogolyubov N.N. The theory of perturbations in nonlinear mechanics, *Sbornik Trudov Inst. Stroit. Mekh., Akad. Nauk Ukr. SSR*, 1950, no. 14, pp. 9–34 (in Russian).
9. Bardin B.S., Markeyev A.P. The stability of the equilibrium of a pendulum for vertical oscillations of the point of suspension, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1995, vol. 59, issue 6, pp. 879–886. DOI: [10.1016/0021-8928\(95\)00121-2](https://doi.org/10.1016/0021-8928(95)00121-2)
10. Kholostova O.V. On stability of the periodic motions of the pendulum with a horizontally vibrating suspension point, *Izv. Ross. Akad. Nauk. Mekh. Tverd. Tela*, 1997, no. 4, pp. 35–39 (in Russian).
11. Markeyev A.P. The dynamics of a spherical pendulum with a vibrating suspension, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1999, vol. 63, issue 2, pp. 205–211. DOI: [10.1016/S0021-8928\(99\)00028-3](https://doi.org/10.1016/S0021-8928(99)00028-3)
12. Kholostova O.V. On the motions of a pendulum with a vibrating suspension point, *Teoreticheskaya mekhanika: sbornik statei* (Theoretical mechanics: transactions), Moscow: Lomonosov Moscow State University, 2000, issue 24, pp. 157–167 (in Russian).
13. Kholostova O.V. On the motions of a double pendulum with vibrating suspension point, *Mechanics of Solids*, 2009, vol. 44, issue 2, pp. 184–197. DOI: [10.3103/S0025654409020034](https://doi.org/10.3103/S0025654409020034)
14. Vishenkova E.A., Kholostova O.V. To dynamics of a double pendulum with a horizontally vibrating point of suspension, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp’yut. Nauki*, 2012, issue 2, pp. 114–129 (in Russian). DOI: [10.20537/vm120211](https://doi.org/10.20537/vm120211)
15. Kholostova O.V. On the periodic motion of Lagrange’s top with vibrating suspension, *Mechanics of Solids*, 2002, vol. 37, issue 1, pp. 26–38.
16. Kholostova O.V. The dynamics of a Lagrange top with vibrating suspension point, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1999, vol. 63, issue 5, pp. 741–750. DOI: [10.1016/S0021-8928\(99\)00094-5](https://doi.org/10.1016/S0021-8928(99)00094-5)
17. Kholostova O.V. A case of periodic motion for a Lagrange gyroscope with a vibrating suspension, *Doklady Physics*, 2000, vol. 45, issue 12, pp. 690–693. DOI: [10.1134/1.1342451](https://doi.org/10.1134/1.1342451)
18. Kholostova O.V. On a case of periodic motions of the Lagrangian top with vibrating fixed point, *Regular & Chaotic Dynamics*, 1999, vol. 4, no. 4, pp. 81–93.
19. Markeev A.P. On the motion of a heavy dynamically symmetric rigid body with vibrating suspension point, *Mechanics of Solids*, 2012, vol. 47, issue 4, pp. 373–379. DOI: [10.3103/S0025654412040012](https://doi.org/10.3103/S0025654412040012)
20. Markeev A.P. On the theory of motion of a rigid body with a vibrating suspension, *Doklady Physics*, 2009, vol. 54, issue 8, pp. 392–396. DOI: [10.1134/S1028335809080114](https://doi.org/10.1134/S1028335809080114)
21. Markeev A.P. The equations of the approximate theory of the motion of a rigid body with a vibrating suspension point, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2011, vol. 75, issue 2, pp. 132–139. DOI: [10.1016/j.jappmathmech.2011.05.002](https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2011.05.002)

22. Kholostova O.V. On stability of relative equilibria of a rigid body with a vibrating point of support, *Vestn. Ross. Univ. Dr. Nar. Ser. Mat. Inform. Fiz.*, 2011, no. 2, pp. 111–122 (in Russian).
23. Safonov A.I. Influence of viscous friction on stability balance of the body with a vibrating suspension, *Vestnik Moskovskogo Aviatsionnogo Instituta*, 2014, vol. 21, no. 2, pp. 158–168 (in Russian).
24. Staude O. Ueber permanente Rotationsachsen bei der Bewegung eines schweren Körpers um einen festen Punkt, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1894, vol. 1894, issue 113, pp. 318–334.
DOI: [10.1515/crll.1894.113.318](https://doi.org/10.1515/crll.1894.113.318)
25. Mlodzeevskii B.K. About a permanent axis in the motion of a heavy rigid body around a fixed point, *Trudy Otdeleniya Fizicheskikh Nauk Obshchestva Lyubitelei Estestvoznaniya* (Proceedings of the Department of Physical Sciences of the Society of Naturalists), 1894, vol. 7, issue 1, pp. 46–48 (in Russian).
26. Kholostova O.V. *Issledovanie ustoychivosti permanentnykh vrashchenii Shtaude* (Investigation of stability of Staude permanent rotations), Moscow–Izhevsk: Regular and Chaotic Dynamics, 2008, 128 p.
27. Grammel R. *Der kreisel. Seine theorie und seine anwendungen*, Berlin, 1950, bd. 1, 2. Translated under the title *Giroskop, ego teoriya i primeneniya*, vol. 1, 2, Moscow: Inostr. Lit., 1962.
28. Rumyantsev V.V. Stability of permanent rotations of a heavy rigid bodies, *Prikl. Mat. Mekh.*, 1956, vol. 20, issue 1, pp. 51–66 (in Russian).
29. Rumyantsev V.V. On stability of the rotation of a heavy rigid body with one fixed point in the case of S.V. Kovalevskaya, *Prikl. Mat. Mekh.*, 1954, vol. 18, issue 4, pp. 457–458 (in Russian).
30. Magnus K. *Kreisel. Theorie und anwendungen*, Springer, Berlin, 1971, 507 p. Translated under the title *Giroskop. Teoriya i primeneniya*, Moscow: Mir, 1974, 526 p.
31. Kovalev A.M., Savchenko A.Ia. Stability of uniform rotations of a rigid body about a principal axis, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1975, vol. 39, issue 4, pp. 623–633.
DOI: [10.1016/0021-8928\(75\)90063-5](https://doi.org/10.1016/0021-8928(75)90063-5)
32. Sergeev V.S. On the stability of permanent rotation of a heavy solid body about a fixed point, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1976, vol. 40, issue 3, pp. 370–378.
DOI: [10.1016/0021-8928\(76\)90028-9](https://doi.org/10.1016/0021-8928(76)90028-9)
33. Kovalev A.M., Savchenko A.Ya. Stability of stationary motions of Hamiltonian systems in the presence of fourth order resonance, *Mekh. Tverd. Tela* (Solid Mechanics), Kiev: Naukova Dumka, 1977, vol. 9, pp. 40–44 (in Russian).
34. Kholostova O.V. On the stability of the specific motions of a heavy rigid body due to fast vertical vibrations of one of its points, *Nelineinaya Dinamika*, 2015, vol. 11, no. 1, pp. 99–116 (in Russian).
DOI: [10.20537/nd1501005](https://doi.org/10.20537/nd1501005)
35. Vishenkova E.A. Stability of special motions (permanent rotations) of a heavy rigid body with a suspension point vibrating along the vertical, *Nelineinaya Dinamika*, 2015, vol. 11, no. 3, pp. 459–474 (in Russian). DOI: [10.20537/nd1503002](https://doi.org/10.20537/nd1503002)
36. Markeev A.P. *Tochki libratsii v nebesnoi mekhanike i kosmodinamike* (Libration points in celestial mechanics and cosmodynamics), Moscow: Nauka, 1978, 312 p.
37. Arnold V.I., Kozlov V.V., Neyshadt A.I. *Mathematical aspects of classical and celestial mechanics, Dynamical systems*, III, Encyclopaedia Math. Sci., 3, 3rd edition, Springer-Verlag, Berlin, 2006, 518 p. Original Russian text published in Arnold V.I., Kozlov V.V., Neyshadt A.I. *Matematicheskie aspekty klassicheskoi i nebesnoi mekhaniki*, Moscow: Editorial URSS, 2009, 416 p.

Received 30.12.2016

Vishenkova Ekaterina Alekseevna, Department of Theoretical Mechanics, Moscow Aviation Institute (National Research University), Volokolamskoe shosse, 4, Moscow, 125080, Russia.

E-mail: vishenkova@bk.ru

Kholostova Ol'ga Vladimirovna, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Theoretical Mechanics, Moscow Aviation Institute (National Research University), Volokolamskoe shosse, 4, Moscow, 125080, Russia;

Associate Professor, Department of Theoretical Mechanics, Moscow Institute of Physics and Technology (State University), Institutskii per., 9, Dolgoprudnyi, Moscow oblast, 141700, Russia.

E-mail: kholostova_o@mail.ru