ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ
МАТЕМАТИКА 2017. Т. 27. Вып. 1

УДК 517.977.80

© *В. И. Ухоботов, И. В. Изместьев*

СИНТЕЗ УПРАВЛЕНИЙ В ОДНОТИПНОЙ ИГРОВОЙ ЗАДАЧЕ ИМПУЛЬСНОЙ ВСТРЕЧИ В ЗАДАННЫЙ МОМЕНТ ВРЕМЕНИ С ТЕРМИНАЛЬНЫМ МНОЖЕСТВОМ В ФОРМЕ КОЛЬЦА[1]

Рассматривается линейная дифференциальная игра с импульсным управлением первого игрока. Возможности первого игрока определяются запасом ресурсов, который он может использовать при формировании своего управления. В отдельные моменты времени возможно отделение части запаса ресурсов, что может привести к «мгновенному» изменению фазового вектора, тем самым задача усложняется. Управление второго игрока стеснено геометрическими ограничениями. Вектограммы игроков описываются одним и тем же шаром с разными радиусами, зависящими от времени. Терминальное множество в игре определяется условием принадлежности нормы фазового вектора отрезку с положительными концами. Множество, определяемое данным условием, названо в работе кольцом. Цель первого игрока заключается в том, чтобы в заданный момент времени привести фазовый вектор на терминальное множество. Цель второго игрока противоположна. С помощью максимального стабильного моста, определенного авторами ранее, построены оптимальные управления игроков.

Ключевые слова: импульсное управление, оптимальное управление, дифференциальная игра.

DOI: 10.20537/vm170107

Введение

К задачам импульсного управления сводятся задачи управления механическими системами переменного состава, когда в отдельные моменты времени может отделяться конечное количество реактивной массы [1]. Если на механическую систему воздействуют неконтролируемые силы, о которых известны только области их возможных значений, то задача управления может быть рассмотрена в рамках теории дифференциальных игр.

Анализ задач импульсного управления усложняется тем, что траектории управляемой системы могут быть разрывными.

В работе [2] предложен метод решения игровых задач преследования, основанный на принципе поглощения областей достижимости. Возможность применения этого метода к задачам импульсного управления рассматривалась, например, в работах [3, 4]. В работе [4] приводится пример импульсной «мягкой» встречи двух управляемых материальных точек, когда первый игрок не может поддерживать требуемое включение областей достижимости. Обсуждается вопрос о возможности применения метода динамического программирования к задачам импульсной встречи. В работе [5] этот метод применяется при решении конкретных задач импульсной встречи.

В работе [6] доказана теорема об альтернативе для дифференциальных игр с импульсными управлениями в предположении, что целевые координаты вектора состояния меняются непрерывно.

В работах [7–13] предложены разные подходы к исследованию дифференциальных игр и задач управления при наличии помех в случае импульсных управлений.

Известно, что линейную управляемую систему с фиксированным моментом окончания с помощью линейной замены переменных [14] можно свести к виду, когда в правой части новых уравнений отсутствуют фазовые переменные.

[1]Работа выполнена при поддержке гранта Фонда перспективных научных исследований ФГБОУ ВО «Челябинский государственный университет» (2017 г.).

§ 1. Постановка задачи

В работе [15] рассмотрена дифференциальная игра

$$dz = -a(t)\,du + b(t)v\,dt, \quad t \leqslant p, \quad z \in \mathbb{R}^n, \quad \|v\| \leqslant 1. \tag{1.1}$$

Здесь p — заданный момент времени; $a(t) \geqslant 0$ и $b(t) \geqslant 0$, причем функция $a(t)$ является непрерывной на полуоси $(-\infty, p]$, а функция $b(t)$ суммируема на каждом отрезке $[\tau_1, \tau_2] \subset (-\infty, p]$; $\|\cdot\|$ — норма в $\mathbb{R}^n$.

На выбор управления первого игрока накладывается импульсное ограничение

$$\mu(t) = \mu_0 - \int_{t_0}^{t} \|du(r)\| \geqslant 0.$$

Здесь t_0 — начальный момент времени, $\mu_0 \geqslant 0$ — начальный запас ресурсов, который первый игрок сможет использовать при формировании своего управления. Второй игрок выбирает управление v.

Заданы числа $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$. Первый игрок стремится осуществить неравенства

$$\varepsilon_1 \leqslant \|z(p)\| \leqslant \varepsilon_2. \tag{1.2}$$

Цель второго игрока противоположна.

Для игры (1.1) в [15] построен максимальный стабильный мост [14], имеющий вид

$$W(t) = \{(z, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ : g(t, \mu) \leqslant \|z\| \leqslant G(t, \mu), \mu \geqslant M(t)\}, \tag{1.3}$$

где функции $G(t, \mu) \in \mathbb{R}$, $g(t, \mu) \geqslant 0$ и $M(t) \geqslant 0$ вычислены в явном виде.

Цель данной статьи заключается в построении соответствующих управлений игроков.

§ 2. Определение допустимых управлений игроков и порожденного ими движения

Управлением первого игрока является пара функций [11] $\phi(t) \in \mathbb{R}_+$ и $u(t, z) \in \mathbb{R}^n$.

При выборе этих функций в отдельные моменты времени осуществляется их коррекция [12, 16], которая производится следующим образом. Первый игрок выбирает конечный набор моментов коррекции $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_l = p$. В момент времени τ_i, $i = \overline{0, l}$, зная реализовавшееся состояние $\|z(\tau_i)\|$, $\mu(\tau_i)$, он выбирает произвольную функцию $u_i : [\tau_i, \tau_{i+1}) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющую равенству $\|u_i(t, z)\| = 1$, абсолютно непрерывную, неубывающую функцию $\phi_i : [\tau_i, \tau_{i+1}] \to \mathbb{R}_+$ и число $\Delta_i \geqslant 0$ такие, что

$$\mu(t) = \mu(\tau_i) - \Delta_i - \int_{\tau_i}^{t} \dot{\phi}_i(r)\,dr \geqslant 0, \quad \tau_i < t \leqslant \tau_{i+1}. \tag{2.1}$$

Управлением второго игрока является произвольная функция $v : (-\infty, p] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющая ограничению $\|v(t, z)\| \leqslant 1$.

Движение, порожденное выбранными на отрезке $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ управлениями, определим с помощью ломаных. Для этого зафиксируем разбиение ω с диаметром $d(\omega)$:

$$\omega : \tau_i = t^{(0)} < t^{(1)} < \ldots < t^{(k+1)} = \tau_{i+1}, \quad d(\omega) = \max_{0 \leqslant j \leqslant k} (t^{(j+1)} - t^{(j)}) \tag{2.2}$$

и построим ломаные [11, с. 75]

$$z_\omega(t^{(0)}) = z(\tau_i) - \Delta_i a(\tau_i) u(\tau_i, z(\tau_i)) = z(\tau_i + 0),$$
$$z_\omega(t) = z_\omega(t^{(j)}) - \left(\int_{t^{(j)}}^{t} a(r)\dot{\phi}(r)\,dr\right) u\big(t^{(j)}, z_\omega(t^{(j)})\big) + \left(\int_{t^{(j)}}^{t} b(r)\,dr\right) v\big(t^{(j)}, z_\omega(t^{(j)})\big), \tag{2.3}$$

при $t^{(j)} \leqslant t \leqslant t^{(j+1)}$, $j = \overline{0, k}$.

МАТЕМАТИКА 2017. Т. 27. Вып. 1

Семейство ломаных (2.3) на отрезке $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ является [11, с. 46] равномерно ограниченным и равностепенно непрерывным. Следовательно, они удовлетворяют условиям теоремы Арцела [17, с. 236]. Под движением $z(t)$ на отрезке $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ будем понимать равномерный предел последовательности ломаных $z_{\omega_k}(t)$, у которых диаметр разбиения $d(\omega_k) \to 0$. Изменение запаса ресурсов $\mu(t)$ определяется формулой (2.1).

В конечный момент времени p первый игрок выбирает число $\Delta \in [0, \mu(p)]$ и вектор $u \in \mathbb{R}^n$ с $\|u\| = 1$. Под реализовавшимся в момент времени p состоянием понимается

$$z(p+0) = z(p) - \Delta a(p)u, \quad \mu(p+0) = \mu(p) - \Delta \geqslant 0. \tag{2.4}$$

Цель первого игрока заключается в том, чтобы вектор $z(p+0)$ при некоторых числе $\Delta \in$ $\in [0, \mu(p)]$ и векторе $u \in \mathbb{R}^n$ с $\|u\| = 1$ удовлетворял неравенствам (1.2).

Из формулы (2.4) следует, что если вектор $z(p+0)$ удовлетворяет неравенствам (1.2), то

$$\varepsilon_1 - \mu(p)a(p) \leqslant \|z(p)\| \leqslant \varepsilon_2 + \mu(p)a(p). \tag{2.5}$$

Если $a(p) = 0$, то любой $z(p+0)$ равен $z(p)$, и, следовательно, неравенства (1.2) выполнены.

Пусть выполнены неравенства (2.5) и $a(p) > 0$. Если $z(p)$ удовлетворяет (1.2), то при $\Delta = 0$ вектор $z(p+0) = z(p)$ удовлетворяет (1.2).

Допустим, что $\|z(p)\| > \varepsilon_2$. Возьмем

$$u = \frac{z(p)}{\|z(p)\|}, \quad 0 < \Delta = \frac{\|z(p)\| - \varepsilon_2}{a(p)} \leqslant \mu(p).$$

Тогда, согласно (2.4), $\|z(p+0)\| = \varepsilon_2$.

Если $\|z(p)\| < \varepsilon_1$, то при

$$u = -\frac{z(p)}{\|z(p)\|}, \quad 0 < \Delta = \frac{\varepsilon_1 - \|z(p)\|}{a(p)} \leqslant \mu(p)$$

выполнено равенство $\|z(p+0)\| = \varepsilon_1$.

С учетом вышеизложенного считаем, что цель первого игрока заключается в том, чтобы в момент времени p осуществить неравенства (2.5).

Цель второго игрока противоположна. Отметим, что случай $\varepsilon_1 = 0$ рассмотрен в работе [8].

§ 3. Формулировка результатов

Обозначим

$$m(t) = \max_{t \leqslant r \leqslant p} a(r), \quad t \leqslant p. \tag{3.1}$$

Эта функция является непрерывной при $t \leqslant p$ и удовлетворяет следующему условию:

$$t_1 < t_2 \leqslant p \Rightarrow m(t_1) \geqslant m(t_2) \geqslant a(p) \geqslant 0.$$

Предположение 1. *При всех $t < p$ выполнено неравенство $m(t) > 0$.*

Предположение 2. *Для любого числа $t_0 < p$ существуют числа $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_l = p$ такие, что на каждом из отрезков $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ выполнено одно из условий: $m(t) = a(t)$ для всех $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ или $m(t) = m(\tau_{i+1})$ для всех $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$.*

Выпишем функции, найденные в [15], определяющие для $t < p$, $\mu \geqslant 0$ максимальный стабильный мост $W(t)$ (1.3):

$$g(t,\mu) = \begin{cases} \max(\varepsilon_1 - \mu m(p); 0) & \text{при } t = p \text{ и } \mu \geqslant 0, \\ \varepsilon_1 - \mu m(t) + B(t,p) & \text{при } 0 \leqslant \mu < \nu(t) \text{ и } q \leqslant t < p, \\ \dfrac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} - m(t)(\mu - D(t)) & \text{при } 0 \leqslant \mu < \widehat{\nu}(t) \text{ и } q_1 \leqslant t < q, \\ 0 \quad — & \text{во всех остальных случаях,} \end{cases} \tag{3.2}$$

$$G(t,\mu)=\begin{cases}\varepsilon_2+\mu m(t)-B(t,p) & \text{при}\quad q\leqslant t<p \text{ и } \mu\geqslant 0,\\ \dfrac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}+m(t)(\mu-D(t)) & \text{при}\quad q_1\leqslant t<q \text{ и } \mu\geqslant 0,\\ \dfrac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}+m(t)(\mu-D(q_1))-B(t,q_1) & \text{при}\quad q_2\leqslant t<q_1 \text{ и } \mu\geqslant 0,\\ m(t)(\mu-D(t)+D(q_2)-D(q_1)) & \text{при}\quad t<q_2 \text{ и } \mu\geqslant 0,\end{cases} \tag{3.3}$$

$$\nu(t)=\inf_{t\leqslant\tau<p}\left(\frac{\varepsilon_1+B(\tau,p)}{m(\tau)}\right),\quad \widehat{\nu}(t)=\min\left(\nu(q);\min_{t\leqslant r\leqslant q}\left(\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2m(r)}+D(r)\right)\right)\quad \text{при } t\leqslant q, \tag{3.4}$$

$$M(t)=\begin{cases}0 & \text{при}\quad q\leqslant t<p,\\ D(t) & \text{при}\quad q_1\leqslant t<q,\\ D(q_1) & \text{при}\quad q_2\leqslant t<q_1,\\ D(t)-D(q_2)+D(q_1) & \text{при}\quad t<q_2.\end{cases} \tag{3.5}$$

Здесь обозначено

$$B(t,\tau)=\int_t^\tau b(r)\,dr,\quad D(t)=\int_t^q \frac{b(r)}{m(r)}\,dr\quad \text{при } t\leqslant q, \tag{3.6}$$

$$q=\inf\left\{t<p: B(t,p)\leqslant\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{2}\right\},\quad q_1=\inf\{t<q: D(t)<\widehat{\nu}(t)\}, \tag{3.7}$$

$$q_2=\inf\left\{t<q_1: B(t,q_1)\leqslant\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}\right\}. \tag{3.8}$$

Из условия максимальности стабильного моста (1.3) следует, что если начальное состояние $t_0<p$, $(z(t_0),\mu(t_0))\in W(t_0)$, то существует управление первого игрока, гарантирующее выполнение неравенств (2.5). Если же $(z(t_0),\mu(t_0))\notin W(t_0)$, то найдется управление второго игрока, при котором хотя бы одно из неравенств (2.5) не выполнено. Построим эти управления игроков.

В дальнейшем потребуются некоторые свойства функций (3.4).

Лемма 1. *Для любого числа $t_*<p$ найдется число $t^*\in(t_*,p]$, при котором $a(t^*)=m(t^*)>$ >0 и выполнено неравенство*

$$\nu(t_*)\geqslant\frac{\varepsilon_1+B(t^*,p)}{a(t^*)}. \tag{3.9}$$

Доказательство. Вначале покажем, что $\nu(t_*)=\dfrac{\varepsilon_1+B(\tau_*,p)}{m(\tau_*)}$ при некотором $\tau_*\in[t_*,p]$. В самом деле, если $m(p)=0$, то из условия $\varepsilon_1>0$ следует, что $\nu(t_*)=\min\limits_{t_*\leqslant\tau\leqslant\tau^*}\dfrac{\varepsilon_1+B(\tau,p)}{m(\tau)}$ при некотором $\tau^*\in[t_*,p)$. Если $m(p)>0$, то предыдущая формула верна при $\tau^*=p$. Отсюда и из непрерывности функций $B(\tau,p)$ и $m(\tau)$ получим существование требуемого числа τ_*. Поэтому можем определить число

$$t^*=\sup\left\{\tau_*\in[t_*,p]:\nu(t_*)\geqslant\frac{\varepsilon_1+B(\tau_*,p)}{m(\tau_*)}\right\}.$$

Из непрерывности функций $B(\tau,p)$ и $m(\tau)$ следует, что неравенство, стоящее в скобках, выполнено и при $\tau_*=t^*$.

Допустим, что $a(t^*)<m(t^*)$. Тогда из формулы (3.1) получим, что существует число $t_1\in$ $\in(t^*,p]$ такое, что $m(t^*)=m(t_1)$. Следовательно,

$$\frac{\varepsilon_1+B(t^*,p)}{m(t^*)}=\frac{\varepsilon_1+B(t^*,p)}{m(t_1)}\geqslant\frac{\varepsilon_1+B(t_1,p)}{m(t_1)}.$$

Это неравенство противоречит определению числа t^*. Таким образом, найденное число t^* удовлетворяет неравенству (3.9). $\square$

Отметим, что функции (3.4) удовлетворяют условию монотонности, а именно: если $t_1 < t_2$, то $\nu(t_1) \leqslant \nu(t_2)$ и $\widehat{\nu}(t_1) \leqslant \widehat{\nu}(t_2)$.

Лемма 2. *Если $t_1 < t_2$ и $m(t_1) = m(t_2)$, то*

$$\nu(t_1) = \nu(t_2), \quad \widehat{\nu}(t_1) = \widehat{\nu}(t_2). \tag{3.10}$$

Доказательство. Из формулы (3.1) следует, что $m(\tau) = m(t_2)$ при $t_1 \leqslant \tau \leqslant t_2$. Поэтому

$$\nu(t_1) = \min\left(\inf_{t_1 \leqslant \tau \leqslant t_2} \frac{\varepsilon_1 + B(\tau, p)}{m(\tau)}; \nu(t_2)\right) = \min\left(\frac{\varepsilon_1 + B(t_2, p)}{m(t_2)}; \nu(t_2)\right) = \nu(t_2).$$

Аналогично: используя равенство

$$D(r) = \frac{1}{m(t_2)} B(r, t_2) + D(t_2) \text{ при } t_1 \leqslant r \leqslant t_2, \tag{3.11}$$

которое следует из (3.6), получим, что при $t_1 < t_2 \leqslant q$ выполнено второе равенство в (3.10). $\square$

Отметим, что в общем случае

$$\widehat{\nu}(t_1) = \min\left(\widehat{\nu}(t_2); \min_{t_1 \leqslant r \leqslant t_2}\left(\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2m(r)} + D(r)\right)\right) \text{ при } t_1 < t_2 \leqslant q. \tag{3.12}$$

§ 4. Задача преследования в случае $q \leqslant t_0 < p$

Обозначим

$$w(z) = \frac{z}{\|z\|} \text{ при } \|z\| > 0, \text{ и } w(0) \text{ — любой вектор с условием } \|w(0)\| = 1. \tag{4.1}$$

Лемма 3. *Пусть τ_i и τ_{s+1} — два момента коррекции, $i \leqslant s \leqslant l$, функции $\phi_j(t) = 0$ при $j = \overline{i, s}$, числа $\Delta_i \geqslant 0$ и $\Delta_j = 0$ при $j = \overline{i+1, s}$. Тогда если все $u_j(t, z) = w(z)$, то для любого реализовавшегося движения $z(t)$ выполнено неравенство*

$$\Big|\|z(\tau_i)\| - \Delta_i a(\tau_i)\Big| - B(\tau_i, \tau_{s+1}) \leqslant \|z(\tau_{s+1})\| \leqslant \Big|\|z(\tau_i)\| - \Delta_i a(\tau_i)\Big| + B(\tau_i, \tau_{s+1}). \tag{4.2}$$

Если же все $u_j(t, z) = -w(z)$, то

$$\|z(\tau_i)\| + \Delta_i a(\tau_i) - B(\tau_i, \tau_{s+1}) \leqslant \|z(\tau_{s+1})\| \leqslant \|z(\tau_i)\| + \Delta_i a(\tau_i) + B(\tau_i, \tau_{s+1}). \tag{4.3}$$

Здесь функция $w(z)$ определена формулой (4.1).

Доказательство. Применяя неравенство треугольника, получим, что для любой ломаной (2.3) выполнено неравенство

$$\|z_\omega(t^{(0)})\| - \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} b(r)\, dr \leqslant \|z_\omega(\tau_{i+1})\| \leqslant \|z_\omega(t^{(0)})\| + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} b(r)\, dr.$$

Далее, $\|z_\omega(t^{(0)})\| = \|z(\tau_i) - \Delta_i a(\tau_i) w(z(\tau_i))\| = \Big|\|z(\tau_i)\| - \Delta_i a(\tau_i)\Big|$. Поэтому, переходя в предыдущем неравенстве к пределу и используя первое обозначение в (3.6), получим неравенства (4.2) при $s = i$. Далее, учитывая, что $\Delta_{i+1} = 0$, аналогично получим, что

$$\|z(\tau_{i+2})\| - B(\tau_{i+1}, \tau_{i+2}) \leqslant \|z(\tau_{i+2})\| \leqslant \|z(\tau_{i+2})\| + B(\tau_{i+1}, \tau_{i+2}).$$

Отсюда и из ранее доказанного неравенства получим, что неравенства (4.2) выполнены при $s = i+1$ и так далее. Аналогично доказываются неравенства (4.3). □

Из формул (1.3), (3.3) и (3.5) следует, что при $q \leqslant t_0 \leqslant p$ включение $(z(t_0), \mu(t_0)) \in W(t_0)$ выполнено тогда и только тогда, когда

$$g(t_0, \mu(t_0)) \leqslant \|z(t_0)\| \leqslant \varepsilon_2 + \mu(t_0)m(t_0) - B(t_0, p), \quad \mu(t_0) \geqslant 0. \tag{4.4}$$

При построении управления первого игрока, обеспечивающего выполнение условий окончания (2.5), будет использоваться неравенство

$$B(t, p) \leqslant \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2} \text{ при } q \leqslant t \leqslant p, \tag{4.5}$$

которое следует из первой формулы в (3.7). Из неравенства (4.5) и из формулы (3.2) следует, что

$$g(t_0, \mu(t_0)) \leqslant \varepsilon_1 + B(t_0, p) \leqslant \varepsilon_2 - B(t_0, p). \tag{4.6}$$

Пусть момент коррекции $q \leqslant \tau_i < p$ таков, что $a(\tau_i) > 0$, а реализовавшееся в этот момент времени состояние удовлетворяет неравенствам

$$\varepsilon_1 - \mu(\tau_i)a(\tau_i) + B(\tau_i, p) \leqslant \|z(\tau_i)\| \leqslant \varepsilon_2 + \mu(\tau_i)a(\tau_i) - B(\tau_i, p). \tag{4.7}$$

Лемма 4. *Пусть*

$$\varepsilon_2 - B(\tau_i, p) \leqslant \|z(\tau_i)\| \leqslant \varepsilon_2 + \mu(\tau_i)a(\tau_i) - B(\tau_i, p). \tag{4.8}$$

Тогда функции $u_j(t, z) = w(z)$, $\phi_j(t) = 0$ при $j = \overline{i, l}$, числа $\Delta_j = 0$ при $j = \overline{i+1, l}$ и

$$0 \leqslant \Delta_i = \frac{\|z(\tau_i)\| - \varepsilon_2 + B(\tau_i, p)}{a(\tau_i)} \leqslant \mu(\tau_i) \tag{4.9}$$

обеспечивают выполнение неравенств (1.2) и, следовательно, неравенств (2.5).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из формул (4.8) и (4.9) и из неравенств (4.2) следует, что

$$\varepsilon_2 - 2B(\tau_i, p) = |\varepsilon_2 - B(\tau_i, p)| - B(\tau_i, p) \leqslant \|z(p)\| \leqslant |\varepsilon_2 - B(\tau_i, p)| + B(\tau_i, p) = \varepsilon_2.$$

Здесь использовано неравенство $B(\tau_i, p) \leqslant \varepsilon_2$, которое следует из (4.5). Далее, $\varepsilon_2 - 2B(\tau_i, p) \geqslant \varepsilon_1$ в силу (4.5). □

Лемма 5. *Пусть*

$$\varepsilon_1 + B(\tau_i, p) \leqslant \|z(\tau_i)\| \leqslant \varepsilon_2 - B(\tau_i, p). \tag{4.10}$$

Тогда функции $u_j(t, z) = w(z)$, $\phi_j(t) = 0$ и числа $\Delta_j(t) = 0$ при $j = \overline{i, l}$ обеспечивают выполнение неравенств (1.2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Неравенства (1.2) непосредственно следуют из (4.2) и (4.10). □

Лемма 6. *Пусть*

$$\varepsilon_1 - \mu(\tau_i)a(\tau_i) + B(\tau_i, p) \leqslant \|z(\tau_i)\| \leqslant \varepsilon_1 + B(\tau_i, p). \tag{4.11}$$

Тогда функции $u_j(t, z) = -w(z)$, $\phi_j(t) = 0$ при $j = \overline{i, l}$, числа $\Delta_j = 0$ при $j = \overline{i+1, l}$ и

$$0 \leqslant \Delta_i = \frac{\varepsilon_1 - \|z(\tau_i)\| + B(\tau_i, p)}{a(\tau_i)} \leqslant \mu(\tau_i) \tag{4.12}$$

обеспечивают выполнение неравенств (1.2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из неравенств (4.3) и из формул (4.11) и (4.12) следует, что

$$\varepsilon_1 \leqslant \|z(p)\| \leqslant \varepsilon_1 + 2B(\tau_i, p) \leqslant \varepsilon_2. \qquad \square$$

Замечание 1. Из неравенств (4.6) следует, что если реализовавшееся состояние $(z(\tau_i), \mu(\tau_i))$ удовлетворяет неравенству (4.7), то оно удовлетворяет одному из неравенств (4.8), (4.10) или (4.11).

Перейдем к построению управления первого игрока. Пусть начальное состояние удовлетворяет (4.4).

Случай 1. Пусть $m(t_0) = a(p)$. Первый игрок берет моменты коррекции $\tau_0 = t_0$, $\tau_1 = p$, функции $\phi_0(t) = 0$, $u_0(t, z) = w(z)$ и число $\Delta_0 = 0$. Тогда $\mu(p) = \mu(t_0)$. Из неравенств (4.2) и (4.4) получим, что

$$g(t_0, \mu(t_0)) - B(t_0, p) \leqslant \|z(p)\| \leqslant \varepsilon_2 + \mu(p)a(p). \tag{4.13}$$

Покажем, что выполнено левое неравенство в (2.5). Если $\mu(t_0) < \nu(t_0)$, то это следует из формулы (3.2) и левого неравенства в (4.13). Пусть $\mu(t_0) \geqslant \nu(t_0)$. Из формулы (3.1), учитывая предположение 1, получим $m(t) = a(p) > 0$ при всех $t_0 \leqslant t \leqslant p$. Отсюда и из леммы 2 следует, что $\nu(t_0) = \varepsilon_1/a(p)$. Поэтому $\varepsilon_1 - \mu(p)a(p) \leqslant 0$. Стало быть, левое неравенство в (2.5) выполнено.

Случай 2. Пусть $m(t_0) = a(t_0)$. Тогда из предположения 1 следует, что $a(t_0) > 0$. Пусть

$$\varepsilon_1 + B(t_0, p) \leqslant \|z(t_0)\| \leqslant \varepsilon_2 + \mu(t_0)m(t_0) - B(t_0, p).$$

Это значит, что при $\tau_i = \tau_0 = t_0$ выполнено одно из неравенств — (4.8) или (4.10). Управление строится по правилу, приведенному при доказательстве лемм 4 и 5.

Пусть

$$g(t_0, \mu(t_0)) \leqslant \|z(t_0)\| \leqslant \varepsilon_1 + B(t_0, p). \tag{4.14}$$

Пусть $\mu(t_0) < \nu(t_0)$. Тогда, как следует из формулы (3.2), неравенства (4.14) принимают вид (4.11) при $\tau_i = \tau_0 = t_0$. Управление строится по правилу, описанному при доказательстве леммы 6.

Пусть $\mu(t_0) \geqslant \nu(t_0)$. Тогда неравенства (4.14) принимают вид

$$0 \leqslant \|z(t_0)\| \leqslant \varepsilon_1 + B(t_0, p). \tag{4.15}$$

Применяя лемму 1, найдем число $t_0 \leqslant t^* \leqslant p$ такое, что $a(t^*) > 0$ и

$$\varepsilon_1 - \mu(t_0)a(t^*) + B(t^*, p) \leqslant 0. \tag{4.16}$$

Отсюда и из неравенств (4.15) получим, что если $t^* = t_0$, то выполнено неравенство (4.11) при $\tau_i = \tau_0 = p$. Управление строится так же, как и в лемме 6.

Пусть $t^* = p$. Первый игрок берет $\tau_0 = t_0$, $\tau_1 = p$, функции $u_0(t, z) = w(z)$ и $\phi_0(t) = 0$. Тогда $\mu(p) = \mu(t_0)$ и, согласно (4.16), $\varepsilon_1 - \mu(p)a(p) \leqslant 0$. Далее, из неравенств (4.3) и (4.15) получим, что $\|z(p)\| \leqslant \varepsilon_1 + 2B(t_0, p) \leqslant \varepsilon_2$. Стало быть, неравенства (2.5) выполнены.

Пусть $t_0 < t^* < p$. Первый игрок берет $\tau_0 = t_0$, $\tau_1 = t^*$, $\tau_2 = p$, функции $u_0(t, z) = w(z)$ и $\phi_0(t) = 0$ и число $\Delta_0 = 0$. Тогда $\mu(\tau_1) = \mu(t_0)$ и, как следует из (4.2) и (4.15),

$$\|z(\tau_1)\| \leqslant \varepsilon_1 + B(t_0, p) + B(t_0, \tau_1) = \varepsilon_1 + 2B(t_0, p) - B(\tau_1, p) \leqslant \varepsilon_2 - B(\tau_1, p).$$

Поэтому если $\varepsilon_1 + B(\tau_1, p) \leqslant \|z(\tau_1)\|$, то применяется лемма 5 с $\tau_i = \tau_1$. Если же $\varepsilon_1 + B(\tau_1, p) > \|z(\tau_1)\|$, то, с учетом неравенства (4.16), получим неравенства (4.11) при $\tau_i = \tau_1$. Далее применяется лемма 6.

Случай 3. Пусть $m(t_0) = a(t_*)$ при некотором $q < t_* < p$. Тогда $a(t_*) = m(t_*) > 0$.

Если $\mu(t_0) < \nu(t_0)$, то неравенства (4.4) принимают вид

$$\varepsilon_1 - \mu(t_0)a(t_*) + B(t_0,p) \leqslant \|z(t_0)\| \leqslant \varepsilon_2 + \mu(t_0)a(t_*) - B(t_0,p). \tag{4.17}$$

Первый игрок берет моменты коррекции $\tau_0 = t_0$, $\tau_1 = t_*$, $\tau_2 = p$, функции $u_0(t,z) = w(z)$, $\phi_0(t) = 0$ и число $\Delta_0 = 0$. Тогда $\mu(\tau_1) = \mu(t_0)$. Из неравенств (4.2) и (4.17) получим, что в момент времени $\tau_i = \tau_1$ выполнены неравенства (4.7). Далее применяем леммы 4, 5, 6.

Пусть $\mu(t_0) \geqslant \nu(t_0)$. Тогда неравенства (4.4) принимают вид

$$0 \leqslant \|z(t_0)\| \leqslant \varepsilon_2 + \mu(t_0)a(t_*) - B(t_0,p). \tag{4.18}$$

Поскольку $m(t_0) = m(t_*)$, то из леммы 2 получим неравенство $\mu(t_0) \geqslant \nu(t_*)$. Для числа t_* найдем число $t^* \in [t_*,p]$, для которого выполнено неравенство (3.9). Первый игрок берет $\tau_0 = t_0$, $\tau_1 = t_*$, $\tau_2 = t^*$, $\tau_3 = p$, функции $u_0(t,z) = w(z)$, $\phi_0(t) = 0$ и число $\Delta_0 = 0$. Тогда $\mu(t_0) = \mu(\tau_1) \geqslant \geqslant \nu(\tau_1)$ и, согласно (4.2) и (4.18),

$$0 \leqslant \|z(\tau_1)\| \leqslant \|z(t_0)\| + B(t_0,\tau_1) \leqslant \varepsilon_2 + \mu(\tau_1)a(\tau_1) - B(\tau_1,p).$$

Если $\varepsilon_2 - B(\tau_1,p) \leqslant \|z(\tau_1)\|$, то первый игрок берет функции $u_j(t,z) = w(z)$, $\phi_j(t) = 0$ при $j = 1,2$, число Δ_1, определяемое формулой (4.9) при $\tau_i = \tau_1$, и число $\Delta_2 = 0$. Тогда из леммы 4 получим неравенства (1.2).

Если $\varepsilon_1 + B(\tau_1,p) \leqslant \|z(\tau_1)\| \leqslant \varepsilon_2 - B(\tau_1,p)$, то первый игрок берет $u_j(t,z) = w(z)$, $\phi_j(t) = 0$, $\Delta_j = 0$ при $j = 1,2$. Тогда из леммы 5 получим неравенства (1.2).

Пусть $\|z(\tau_1)\| \leqslant \varepsilon_1 + B(\tau_1,p)$. Поскольку $\mu(\tau_1) \geqslant \nu(\tau_1)$, то из неравенства (3.9) получим, что $\varepsilon_1 - \mu(\tau_1)a(\tau_2) + B(\tau_2,p) \leqslant 0$. Управление строится так же, как и для случая (4.15), (4.16).

§ 5. Задача преследования в случае $t_0 < q$

Рассмотрим вначале случай, когда $q_1 \leqslant t_0 < q$. Исходя из предположения 1, построим моменты коррекции $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_l < \tau_{l+1} = q$. Из формул (1.3), (3.3) и (3.5) следует, что включение $(z(\tau_i),\mu(\tau_i)) \in W(\tau_i)$ выполнено тогда и только тогда, когда

$$g(\tau_i,\mu(\tau_i)) \leqslant \|z(t_i)\| \leqslant \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2} + m(\tau_i)(\mu(\tau_i) - D(\tau_i)), \quad \mu(\tau_i) \geqslant D(\tau_i). \tag{5.1}$$

Отметим, что если

$$\|z(t_i)\| = \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}, \quad \mu(\tau_i) \geqslant D(\tau_i), \tag{5.2}$$

то неравенства (5.1) выполнены. В самом деле, неравенство $g(\tau_i,\mu(\tau_i)) \leqslant \dfrac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}$ при $q_1 \leqslant \tau_i \leqslant q$ непосредственно следует из формулы (3.2).

При $i = 0$ неравенства (5.1) выполнены. Пусть они выполнены при некотором $i = \overline{0,l}$. Построим на отрезке $[\tau_i,\tau_{i+1}]$ управление первого игрока, обеспечивающее выполнение неравенств (5.1) при $i+1$.

Случай 1. Пусть $m(t) = m(\tau_i)$ при всех $\tau_i \leqslant t \leqslant \tau_{i+1}$. Первый игрок берет функции $\phi_i(t) = 0$, $u_i(t,z) = w(z)$ и число $\Delta_i = 0$. Тогда $\mu(\tau_{i+1}) = \mu(\tau_i)$. Поэтому из формулы (3.11) следует, что $\mu(\tau_{i+1}) \geqslant D(\tau_{i+1})$. Из формул (3.11) и (4.2) следует, что при $i+1$ выполнена правая часть первого неравенства в (5.1).

Покажем, что выполнена и левая часть первого неравенства в (5.1).

Пусть $\mu(\tau_i) < \widehat{\nu}(\tau_i)$. Поскольку $\mu(\tau_{i+1}) = \mu(\tau_i)$ и, согласно второму равенству в (3.10), $\widehat{\nu}(\tau_i) = \widehat{\nu}(\tau_{i+1})$, то из формулы (3.2) получим, что $g(\tau_i,\mu(\tau_i)) = g(\tau_{i+1},\mu(\tau_{i+1})) + B(\tau_i,\tau_{i+1})$. Здесь также использовано равенство (3.11). Отсюда, используя левое неравенство в (4.2), получим, что левая часть первого неравенства в (5.1) выполнена при $i+1$.

Пусть $\mu(\tau_i) \geqslant \widehat{\nu}(\tau_i)$. Тогда $\mu(\tau_{i+1}) \geqslant \widehat{\nu}(\tau_{i+1})$. Из формулы (3.2) следует, что $g(\tau_{i+1},\mu(\tau_{i+1})) = = 0$. Значит, требуемое неравенство выполнено.

Случай 2. Пусть $m(t)=a(t)$ при всех $\tau_i\leqslant t\leqslant\tau_{i+1}$. Тогда $a(\tau_i)>0$. Первый игрок берет при $\tau_i\leqslant t\leqslant\tau_{i+1}$

$$\phi_i(t)=\int_{\tau_i}^{t}\frac{b(r)}{m(r)}\,dr;\quad u_i(t,z)=w(z)\ \text{при}\ \|z\|\geqslant\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}\ \ \text{и}\ \ u_i(t,z)=-w(z),\ \text{если иначе.}\tag{5.3}$$

Пусть $\|z(\tau_i)\|\geqslant\dfrac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}$. Первый игрок берет число $0\leqslant\Delta_i=\dfrac{2\|z(\tau_i)\|-\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2a(\tau_i)}\leqslant\mu(\tau_i)$. Возьмем разбиение ω (2.2) отрезка $[\tau_i,\tau_{i+1}]$. Тогда для ломаной (2.3) с функциями (5.3) получим, что $\|z_\omega(t^{(0)})\|=\dfrac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}$ и

$$z_\omega(t)=z_\omega(t^{(j)})-\int_{t^{(j)}}^{t}b(r)\,dr\Big(u(t^{(j)},z_\omega(t^{(j)}))-v(t^{(j)},z_\omega(t^{(j)}))\Big).$$

Применяя теорему 1 из работы [18], в условиях которой примем $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\|z_\omega(t^{(0)})\|$, получим, что $\|z_\omega(\tau_{i+1})\|=\dfrac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}$. Далее,

$$\mu(\tau_{i+1})=\mu(\tau_i)-\frac{2\|z(\tau_i)\|-\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2m(\tau_i)}-\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}\frac{b(r)}{m(r)}\,dr.$$

Отсюда, используя вторую формулу в (3.6), получим, что

$$\mu(\tau_{i+1})=\frac{1}{m(\tau_i)}\left(m(\tau_i)(\mu(\tau_i)-D(\tau_i))+\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}-\|z(\tau_i)\|\right)+D(\tau_{i+1})\geqslant D(\tau_{i+1}).\tag{5.4}$$

Здесь использовано второе неравенство в (5.1). Таким образом, при τ_{i+1} выполнены соотношения (5.2). Стало быть, выполнены неравенства (5.1).

Рассмотрим теперь случай, когда $\|z(\tau_i)\|<\dfrac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}$. Пусть $\mu(\tau_i)<\widehat{\nu}(\tau_i)$. Тогда первое неравенство в (5.1) принимает вид

$$\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}-a(\tau_i)(\mu(\tau_i)-D(\tau_i))\leqslant\|z(\tau_i)\|.\tag{5.5}$$

Первый игрок берет число

$$0\leqslant\Delta_i=\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2-2\|z(\tau_i)\|}{2a(\tau_i)}\leqslant\mu(\tau_i).\tag{5.6}$$

Тогда для ломаной (2.3) выполнено равенство $\|z_\omega(t^0)\|=\dfrac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}$. Как и ранее, получим, что для функций (5.3) выполнено равенство $\|z_\omega(\tau_{i+1})\|=\dfrac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}$. Аналогично (5.4) получим, что

$$\mu(\tau_{i+1})=\frac{1}{m(\tau_i)}\left(m(\tau_i)(\mu(\tau_i)-D(\tau_i))-\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}+\|z(\tau_i)\|\right)+D(\tau_{i+1})\geqslant D(\tau_{i+1}).$$

Здесь использовано неравенство (5.4). Стало быть, при τ_{i+1} выполнены соотношения (5.2).

Пусть $\mu(\tau_i)\geqslant\widehat{\nu}(\tau_i)$. Тогда из формулы (3.12) и из равенства $a(t)=m(t)$ при $\tau_i\leqslant t\leqslant\tau_{i+1}$ следует, что выполнено одно из неравенств:

$$\mu(\tau_i)\geqslant\widehat{\nu}(\tau_{i+1})\ \text{или}\ \mu(\tau_i)\geqslant\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2a(\tau)}+D(\tau)\tag{5.7}$$

при некотором $\tau\in[\tau_i,\tau_{i+1}]$.

Первый игрок берет функции $\phi_i(t)=0$, $u_i(t,z)=w(z)$ и число $\Delta_i=0$. Тогда

$$\mu(t)=\mu(\tau_i)\geqslant D(\tau_i)\geqslant D(t)\ \text{при}\ \tau_i\leqslant t.\tag{5.8}$$

При выбранном управлении вторым игроком реализуется $\|z(t)\|$, значение которого известно первому игроку.

Рассмотрим случай, когда выполнено первое неравенство в (5.7). Поскольку функция $\widehat{\nu}(t)$ с ростом t не убывает, то $\mu(\tau_i) \geqslant \widehat{\nu}(t)$ при всех $\tau_i \leqslant t \leqslant \tau_{i+1}$. Если $\|z(t)\| < \dfrac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}$ при всех $\tau_i \leqslant t < \tau_{i+1}$, то из (3.2) и (5.8) получим, что в момент времени τ_{i+1} будут выполнены неравенства (5.1). Пусть

$$\|z(\tau)\| = \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2} \text{ при некотором } \tau_i < \tau < \tau_{i+1}. \tag{5.9}$$

Первый игрок в этот момент времени проводит коррекцию функции $\phi_i(t)$, полагая

$$\phi_i(t) = \int_\tau^t \frac{b(r)}{m(r)}\,dr \quad \text{при} \quad \tau \leqslant t \leqslant \tau_{i+1}. \tag{5.10}$$

Тогда, учитывая (5.8), будем иметь

$$\mu(t) = \mu(\tau_i) - \int_\tau^t \frac{b(r)}{m(r)}\,dr = \mu(\tau) - D(\tau) + D(t) \geqslant D(t).$$

Как было показано ранее, из равенств (5.9) и (5.10) следует, что $\|z(\tau_{i+1})\| = \dfrac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}$. Стало быть, при τ_{i+1} выполнены соотношения (5.2).

Рассмотрим теперь случай, когда выполнено второе неравенство в (5.7). Если

$$\|z(t)\| < \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2} \quad \text{при} \quad \tau_i \leqslant t < \tau,$$

то, согласно (5.7) и (5.8), в момент времени τ будут выполнены неравенства

$$\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2} - a(\tau)(\mu(\tau) - D(\tau)) \leqslant 0 \leqslant \|z(\tau)\| < \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2} + a(\tau)(\mu(\tau) - D(\tau)).$$

Первый игрок в момент времени τ проводит коррекцию, взяв функцию $\phi_i(t)$ (5.10) и число Δ_i, определяемое формулой (5.6) с заменой в ней τ_i на τ. Тогда, как и в случае (5.5), при τ_{i+1} будут выполнены соотношения (5.2).

Если

$$\|z(\tau_*)\| = \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2} \quad \text{при некотором } \tau_i < \tau_* < \tau,$$

то первый игрок в этот момент времени τ_* проводит коррекцию функции $\phi_i(t)$, полагая ее равной (5.10) с заменой в этой формуле τ на τ_*. Тогда в момент времени τ_{i+1} будут выполнены соотношения (5.2).

Рассмотрим теперь случай, когда начальный момент времени $t_0 \leqslant q_1$.

Из формул (1.3), (3.3) и (3.5) следует, что включение $(z, \mu) \in W(t)$ при $q_2 \leqslant t \leqslant q_1$ выполнено тогда и только тогда, когда

$$\|z\| \leqslant \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2} + m(t)\widehat{\mu} - \int_t^{q_1} b(r)\,dr, \quad \widehat{\mu} = \mu - D(q_1) \geqslant 0. \tag{5.11}$$

Пусть начальное состояние при $q_2 \leqslant t_0 < q_1$ удовлетворяет условиям (5.11). В работе [11] (см. теорему 10.1, с. 76) построено управление первого игрока, обеспечивающее неравенства (5.11) при $t = q_1$. Приведем его.

Пусть $m(t_0) = a(q_1)$ или

$$\|z(t)\| \leqslant \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2} - \int_t^{q_1} b(r)\,dr \quad \text{при } t = t_0. \tag{5.12}$$

Отметим, что, согласно (3.8), правая часть неравенства (5.12) неотрицательна при всех $t \in [q_2, q_1)$. Первый игрок берет $\tau_0 = t_0$, $u_0(t,z) = w(z)$, $\phi_0(t) = 0$ и число $\Delta_0 = 0$.

Пусть $m(t_0) = a(t_0)$ и неравенство (5.12) при $t = t_0$ не выполнено. Тогда первый игрок берет $\tau_0 = t_0$, $u_0(t,z) = w(z)$, $\phi_0(t) = 0$ и число $\Delta_0 = \Delta$, где

$$0 \leqslant \Delta = \frac{2\|z(t_0)\| - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + 2\displaystyle\int_{t_0}^{q_1} b(r)\,dr}{2a(t_0)} \leqslant \widehat{\mu}(t_0). \tag{5.13}$$

Пусть $m(t_0) = a(t_*)$ при некотором $t_0 < t_* < q_1$ и неравенство (5.12) не выполнено. Первый игрок берет $\tau_0 = t_0$, $\tau_1 = t_*$, $u_i(t,z) = w(z)$, $\phi_i(t) = 0$ при $i = 1, 2$, число $\Delta_0 = 0$. Далее, если при $t = t_*$ выполнено неравенство (5.12), то число $\Delta_1 = 0$. Если же при $t = t_*$ неравенство (5.12) не выполнено, то число Δ_1 определяется формулой (5.13) с заменой в ней t_0 на t_*.

Пусть $t_0 \leqslant q_2$. Из формул (1.3), (3.3), (3.5) и (3.6) следует, что включение $(z, \mu) \in W(t)$ при $t \leqslant q_2$ выполнено тогда и только тогда, когда

$$\|z\| \leqslant m(t)\left(\widehat{\mu} - \int_t^{q_2} \frac{b(r)}{m(r)}\,dr\right), \quad \widehat{\mu} = \mu - D(q_1) \geqslant 0. \tag{5.14}$$

Пусть начальное состояние при $t_0 < q_2$ удовлетворяет условиям (5.14). В работе [11] (см. теорему 10.5, с. 82) построено управление первого игрока, обеспечивающее неравенства (5.14) при $t = q_2$. Приведем его. Возьмем в качестве моментов коррекции точки $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_l = q_2$ из предположения 2. Если $m(t) = m(\tau_{i+1})$ при любом $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$, то первый игрок берет $u(t,z) = w(z)$, $\phi_i(t) = 0$ и число $\Delta_i = 0$. При $m(t) = a(t)$ для любого $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ первый игрок берет

$$\Delta_i = \frac{\|z(\tau_i)\|}{a(\tau_i)}, \quad \phi_i(t) = \int_{\tau_i}^t \frac{b(r)}{m(r)}\,dr.$$

§ 6. Задача уклонения

Пусть $v(t,z)$ — управление второго игрока при $t_* \leqslant t \leqslant t^* \leqslant p$, $z \in \mathbb{R}^n$, а $z(t)$ — движение, которое реализовалось при выбранном управлении первого игрока.

Лемма 7. *Пусть $v(t,z) = w(z)$. Тогда выполнено неравенство*

$$\|z(t^*)\| \geqslant \|z(t_*)\| - (\mu(t_*) - \mu(t^*))m(t_*) + B(t_*, t^*).$$

Доказательство приведено в работе [11] (см. лемму 10.1, с. 78).

Лемма 8. *Пусть $v(t,z) = -w(z)$ и $\|z(t)\| > 0$ при $t_* \leqslant t \leqslant t^*$. Тогда*

$$\|z(t^*)\| \leqslant \|z(t_*)\| + (\mu(t_*) - \mu(t^*))m(t_*) - B(t_*, t^*). \tag{6.1}$$

Доказательство. Пусть τ_i, $i = \overline{0, l}$, — моменты коррекции. Рассмотрим вначале случай, когда $\tau_i \leqslant t_* < t^* \leqslant \tau_{i+1}$. Существует число $\sigma > 0$ такое, что $\|z(t)\| \geqslant 2\sigma$ при всех $t_* \leqslant t \leqslant t^*$. Пусть $z_s(t)$ — последовательность ломаных (2.3), которая равномерно сходится на отрезке $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ к $z(t)$. Тогда из равномерной сходимости и из теоремы об абсолютной непрерывности интеграла Лебега [19, с. 282] следует, что существует число $\delta > 0$ такое, что для всех ломаных, у которых диаметры $d(\omega_s) < \delta$, выполнены неравенства

$$B(t, \widehat{t}) < \sigma < \|z_s(t)\| \text{ при всех } t_* \leqslant t < \widehat{t} \leqslant t^*, \quad \widehat{t} < t + \delta. \tag{6.2}$$

Пусть $t_{r-1}^{(s)} \leqslant t_* < t_r^{(s)} < \ldots < t_j^{(s)} < t^* \leqslant t_{j+1}^{(s)}$. Тогда из (2.3) следует, что для любого $k = \overline{r, j}$ выполнено неравенство

$$\|z_s(t_{k+1}^{(s)})\| \leqslant \left|\|z(t_k^{(s)})\| - B(t_k^{(s)}, t_{k+1}^{(s)})\right| + \left(\mu(t_k^{(s)}) - \mu(t_{k+1}^{(s)})\right) m(t_k^{(s)}).$$

Отсюда и из неравенства (6.2) получим, что

$$\|z_s(t_{k+1}^{(s)})\| \leqslant \|z(t_k^{(s)})\| + \Big(\mu(t_k^{(s)}) - \mu(t_{k+1}^{(s)})\Big)\, m(t_k^{(s)}) - B(t_k^{(s)}, t_{k+1}^{(s)}). \tag{6.3}$$

Просуммируем эти неравенства и учтем, что $m(t_k^{(s)}) \leqslant m(t_r^{(s)})$. Получим

$$\|z_s(t_{j+1}^{(s)})\| \leqslant \|z_s(t_r^{(s)})\| + \Big(\mu(t_r^{(s)}) - \mu(t_{j+1}^{(s)})\Big)\, m(t_r^{(s)}) - B(t_r^{(s)}, t_{j+1}^{(s)}).$$

Перейдем в этом неравенстве к пределу при $d(\omega_s) \to 0$. Получим требуемое неравенство (6.1).

Пусть $\tau_i \leqslant t_* < \tau_{i+1} < \ldots < \tau_q < t^* \leqslant \tau_{q+1}$. Тогда неравенство (6.1) выполнено при $t^* = \tau_{i+1}$. Далее, это неравенство сохранится, если в нем заменить $\|z(t^*)\|$ и $\mu(t^*)$ на

$$\|z(\tau_{i+1}+0)\| = \|z(\tau_{i+1}) - \Delta_{i+1} a(\tau_{i+1}) u(\tau_{i+1}, z(\tau_{i+1}))\| \leqslant \|z(\tau_{i+1})\| + \Delta_{i+1} m(\tau_{i+1}),$$
$$\mu(\tau_{i+1}+0) = \mu(\tau_{i+1}) - \Delta_{i+1} \geqslant 0.$$

Отсюда следует, что неравенство (6.1) будет выполнено при замене t^* на τ. Далее, принимая τ_q за t_*, получим неравенство (6.1). $\square$

Лемма 9. *Пусть* $\alpha = \dfrac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}$ *и*

$$v(t,z) = w(z) \text{ при } \|z(t)\| \geqslant \alpha \text{ и } v(t,z) = -w(z) \text{ при } \|z(t)\| < \alpha.$$

Тогда если $\|z(t)\| > 0$ *при* $t_* \leqslant t \leqslant t^*$, *то*

$$\big|\|z(t^*)\| - \alpha\big| \geqslant \big|\|z(t_*)\| - \alpha\big| - (\mu(t_*) - \mu(t^*))m(t_*) + B(t_*, t^*). \tag{6.4}$$

Доказательство. Примем все обозначения, которые были введены при доказательстве леммы 8. Пусть

$$\tau_i \leqslant \ldots \leqslant t_{r-1}^{(s)} \leqslant t_* < t_r^{(s)} < \ldots < t_j^{(s)} < t^* \leqslant t_{j+1}^{(s)} \leqslant \ldots \leqslant \tau_{i+1}.$$

Рассмотрим любые $t_k^{(s)} < t_{k+1}^{(s)}$, $k = \overline{r,j}$.

Допустим, что $\|z(t_k^{(s)})\| \geqslant \alpha$. Тогда из (2.3) и вида функции $v(t,z)$ получим, что

$$\|z_s(t_{k+1}^{(s)})\| \geqslant \|z_s(t_k^{(s)})\| - (\mu(t_k^{(s)}) - \mu(t_{k+1}^{(s)}))m(t_k^{(s)}) + B(t_k^{(s)}, t_{k+1}^{(s)}).$$

Далее,

$$\big|\|z_s(t_k^{(s)})\| - \alpha\big| = \|z_s(t_k^{(s)})\| - \alpha, \quad \big|\|z_s(t_{k+1}^{(s)})\| - \alpha\big| \geqslant \|z_s(t_{k+1}^{(s)})\| - \alpha.$$

Отсюда и из предыдущего неравенства следует, что выполнено неравенство

$$\big|\|z_s(t_{k+1}^{(s)})\| - \alpha\big| \geqslant \big|\|z_s(t_k^{(s)})\| - \alpha\big| - (\mu(t_k^{(s)}) - \mu(t_{k+1}^{(s)}))m(t_k^{(s)}) + B(t_k^{(s)}, t_{k+1}^{(s)}). \tag{6.5}$$

Пусть $\|z(t_k^{(s)})\| < \alpha$. Тогда, учитывая вид функции $v(t,z)$, получим неравенство (6.3). Далее,

$$\big|\|z_s(t_k^{(s)})\| - \alpha\big| = \alpha - \|z_s(t_k^{(s)})\|, \quad \big|\|z_s(t_{k+1}^{(s)})\| - \alpha\big| \geqslant \alpha - \|z_s(t_{k+1}^{(s)})\|.$$

Отсюда и из неравенства (6.3) получим неравенство (6.5). Просуммируем эти неравенства, учитывая, что $m(t_k^{(s)}) \leqslant m(t_r^{(s)})$ при $k = \overline{r,j}$. Затем перейдем к пределу при $d(\omega) \to 0$. Получим требуемое неравенство (6.4).

Доказательство общего случая $\tau_i \leqslant t_* < \tau_{i+1} < \ldots < \tau_q < t^* \leqslant \tau_{q+1}$ проводится так же, как и при доказательстве этого случая в лемме 8. $\square$

Перейдем к построению управления второго игрока.

Пусть $(z(t_0), \mu(t_0)) \notin W(t_0)$ и $q \leqslant t_0 \leqslant p$. Допустим, что не выполнено правое неравенство в (4.4). Второй игрок берет управление $v(t,z) = w(z)$. Тогда, используя лемму 7, получим, что

$$\|z(p)\| \geqslant \|z(t_0)\| - (\mu(t_0) - \mu(p))m(t_0) + B(t_0,p) > \varepsilon_2 + \mu(p)m(p).$$

Стало быть, правое неравенство в (2.5) не выполнено.

Пусть не выполнено левое неравенство в (4.4). Это значит, что при $t = t_0$ выполнены неравенства

$$\|z(t)\| < \varepsilon_1 - \mu(t)m(t) + B(t,p), \quad 0 \leqslant \mu(t_0) < \nu(t_0). \tag{6.6}$$

Второй игрок берет управление $v(t,z) = -w(z)$. Пусть первый игрок выбрал моменты коррекции $t_0 = \tau_0 < \tau_1 \leqslant p$, функции $u_0(t,z)$, $\phi_0(t)$ и число $0 \leqslant \Delta_0 \leqslant \mu(t_0)$. Неравенства (6.6) сохранятся при замене в них $\|z(t_0)\|$ и $\mu(t_0)$ на $\|z(t_0+0)\|$ и $\mu(t_0+0)$.

Допустим, что при $t = \tau_1$ выполнено неравенство

$$\|z(t)\| \geqslant \varepsilon_1 - \mu(t)m(t) + B(t,p). \tag{6.7}$$

Используя первое неравенство в (6.6) при $t = t_0 + 0$ и непрерывность функций, стоящих в (6.7), найдем число $t_0 < \tau \leqslant \tau_1$ такое, что при $t_0 \leqslant t < \tau$ выполнено первое неравенство в (6.6) и

$$\|z(\tau)\| = \varepsilon_1 - \mu(\tau)m(\tau) + B(\tau,p). \tag{6.8}$$

Из второго неравенства в (6.6) следует, что $\mu(\tau) \leqslant \mu(t_0) < \nu(t_0) \leqslant \nu(\tau)$. Отсюда и из первой формулы (3.4) получим неравенство $\varepsilon_1 - \mu(\tau)m(\tau) + B(\tau,p) > 0$. Поэтому из (6.8) следует, что $\|z(\tau)\| > 0$. Стало быть, существует число $\delta > 0$ такое, что для всех $\tau - \delta \leqslant t \leqslant \tau$ выполнено первое неравенство в (6.6) и $\|z(t)\| > 0$ при $\tau - \delta \leqslant t \leqslant \tau$. Применяя лемму 8 при $t_* = t$ и $t^* = \tau$ и используя (6.6), получим, что

$$\|z(\tau)\| < \varepsilon_1 - \mu(\tau)m(t) + B(\tau,p) \leqslant \varepsilon_1 - \mu(\tau)m(\tau) + B(\tau,p).$$

Получим противоречие с (6.8).

Следуя вышеизложенной схеме, можно показать, что неравенства (6.6) выполнены при всех $t = \tau_i$, где τ_i — моменты коррекции. В частности, при $t = p$ получим, что левое неравенство в (2.5) не выполнено.

Рассмотрим теперь случай, когда $q_1 \leqslant t_0 < q$. Из формул (1.3), (3.2), (3.3) и (3.6) получим, что $(z,\mu) \in W(q)$ тогда и только тогда, когда

$$\|z\| \leqslant \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \mu m(q) \ \text{ при } \ \mu \geqslant \widehat{\nu}(q) \tag{6.9}$$

и

$$\left| \|z\| - \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} \right| \leqslant \mu m(q) \ \text{ при } \ 0 \leqslant \mu < \widehat{\nu}(q). \tag{6.10}$$

Пусть $(z(t_0), \mu(t_0)) \notin W(t_0)$. Тогда из формул (1.3), (3.2) и (3.3) получим, что при $t = t_0$ выполнены неравенства

$$\left| \|z(t)\| - \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} \right| > m(t)(\mu(t) - D(t)) \ \text{ при } \ 0 \leqslant \mu(t) < \widehat{\nu}(t) \tag{6.11}$$

и

$$\|z(t)\| > \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + m(t)(\mu(t) - D(t)) \ \text{ при } \ \mu(t) \geqslant \widehat{\nu}(t). \tag{6.12}$$

Рассмотрим вначале случай, когда выполнено (6.11). Второй игрок берет управление $v(t,z)$ из леммы 9. Пусть первый игрок выбрал моменты коррекций $t_0 = \tau_0 < \tau_1 \leqslant q$, функции

$u_0(t,z)$, $\phi_0(t)$ при $t_0 \leqslant t \leqslant \tau_1$ и число $0 \leqslant \Delta_0 \leqslant \mu(t_0)$. Можно показать, что неравенство (6.11) выполнено при замене $\|z(t_0)\|$ и $\mu(t_0)$ на $\|z(t_0+0)\|$ и $\mu(t_0+0)$.

Пусть при выбранных управлениях реализовались $z(t)$ и $\mu(t)$. При этом полагаем, что при $t = t_0$ они равны $z(t_0+0)$ и $\mu(t_0+0)$. Тогда $z(t)$ и $\mu(t)$ являются непрерывными функциями при $t_0 \leqslant t \leqslant \tau_1$.

Из второго неравенства в (6.11) и из монотонности функций $\mu(t)$ и $\widehat{\nu}(t)$ получим неравенство $\mu(t) < \widehat{\nu}(t)$ при всех $t_0 \leqslant t \leqslant \tau_1$. Отсюда и из (3.4) следует, что

$$\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2} > m(t)(\mu(t) - D(t)) \text{ при } t_0 \leqslant t \leqslant \tau_1.$$

Поэтому, если $\|z(\widehat{t})\| = 0$ в какой-то момент времени $t_0 \leqslant \widehat{t} \leqslant \tau_1$, то неравенство (6.11) при $t = \widehat{t}$ выполнено.

Пусть $\|z(\tau_1)\| > 0$. Обозначим $\widehat{t} = \inf\{t \in [t_0, \tau_1] : \|z(\tau)\| > 0 \text{ при всех } t \leqslant \tau \leqslant \tau_1\}$.

Покажем, что при $t = \widehat{t}$ выполнено неравенство (6.11). В самом деле, если $\widehat{t} = t_0$, то неравенство (6.11) выполнено. Пусть $t_0 < \widehat{t} < \tau_1$. Тогда $\|z(\widehat{t})\| = 0$ и, следовательно, неравенство (6.11) также выполнено. Из непрерывности следует, что при всех достаточно близких к $\widehat{t}$ чисел $t_* > \widehat{t}$ выполнено неравенство (6.11) и $\|z(t)\| > 0$ при $t_* \leqslant t \leqslant \tau_1$.

Возьмем разбиение $\omega : t_* = t_1 < \ldots < t_{k+1} = \tau_1$ и обозначим

$$B_i(\omega) = \sum_{s=i}^{k} \frac{1}{m(t_s)} \int_{t_s}^{t_{k+1}} b(r)\,dr \leqslant \int_{t_i}^{\tau_1} \frac{b(r)}{m(r)}\,dr. \tag{6.13}$$

Тогда (см. [11, лемма 7.3, с. 39–40]) $\sup\limits_{\omega} B_1(\omega) = \displaystyle\int_{t_*}^{\tau_1} \frac{b(r)}{m(r)}\,dr$. Следовательно, существует разбиение ω такое, что при $i = 1$ выполнено неравенство

$$\left|\|z(t_i)\| - \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}\right| > m(t_i)(\mu(t_i) - N_i(\omega)), \quad N_i(\omega) = B_i(\omega) + \int_{\tau_1}^{q} \frac{b(r)}{m(r)}\,dr. \tag{6.14}$$

Допустим, что это неравенство выполнено в момент времени t_i. Тогда, используя неравенство (6.4) и формулу (6.13), получим, что

$$\left|\|z(t_{i+1})\| - \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}\right| > m(t_i)(\mu(t_{i+1}) - N_{i+1}(\omega)). \tag{6.15}$$

Если $\mu(t_{i+1}) < N_{i+1}(\omega)$, то неравенство (6.14) выполнено при t_{i+1}. Пусть $\mu(t_{i+1}) \geqslant N_{i+1}(\omega)$. Тогда из (6.15) и из неравенства $m(t_i) \geqslant m(t_{i+1})$ опять получим неравенство (6.14) в момент времени t_{i+1}.

Полагая в (6.14) $i = k+1$, получим, что неравенство (6.11) выполнено при $t = \tau_1$. Повторяя проделанное рассуждение, будем иметь, что неравенство (6.11) выполнено во все моменты коррекции τ_i. Стало быть, при $t = q$ первое неравенство в (6.10) не выполнено.

Рассмотрим теперь случай, когда при $t = t_0$ выполнено неравенство (6.12). Как и ранее, существует разбиение ω, при котором при $i = 1$ выполнено неравенство

$$\|z(t_i)\| > \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2} + m(t_i)(\mu(t_i) - N_i(\omega)). \tag{6.16}$$

Второй игрок берет управление $v(t,z) = w(z)$ при $t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}$. Тогда, применяя лемму 7, получим, что

$$\|z(t_{i+1})\| > \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2} + m(t_i)(\mu(t_{i+1}) - N_{i+1}(\omega)).$$

Если $\mu(t_{i+1}) \geqslant N_{i+1}(\omega)$, то, используя неравенство $m(t_i) \geqslant m(t_{i+1})$, получим, что неравенство (6.16) выполнено в момент времени t_{i+1}.

Пусть $\mu(t_{i+1}) < N_{i+1}(\omega)$. Тогда, согласно (6.13), $\mu(t_{i+1}) \leqslant D(t_{i+1}) < \widehat{\nu}(t_{i+1})$ и выполнено неравенство (6.14). Стало быть, попадаем в условия случая, разобранного выше.

Пусть неравенство (6.16) выполнено во все моменты времени t_i. Тогда, как и ранее из неравенства (6.14), получим, что

$$\|z(q)\| > \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + m(q)\mu(q).$$

Отсюда и из (6.9) и (6.10) следует, что $(z(q), \mu(q)) \notin W(q)$.

Рассмотрим теперь случай, когда $q_2 \leqslant t_0 < q_1$. Пусть при $t = t_0$ не выполнено одно из условий (5.11). Если $\mu(t_0) < D(q_1)$, то при любых управлениях игроков в момент времени $t = q_1$ будут выполнены неравенства (6.11).

Пусть $\mu(t_0) \geqslant D(q_1)$, но при $t = t_0$ не выполнено первое неравенство в (5.11). Второй игрок берет управление $v(t, z) = w(z)$. Если $\mu(q_1) < D(q_1)$, то $(z(q_1), \mu(q_1)) \notin W(q_1)$. Пусть $\mu(q_1) \geqslant D(q_1)$. Тогда, используя лемму 7, получим, что

$$\|z(q_1)\| > \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + m(t_0)(\mu(q_1) - D(q_1)) \geqslant \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + m(q_1)(\mu(q_1) - D(q_1)).$$

Следовательно, при $t = q_1$ выполнены либо неравенства (6.11), либо неравенства (6.12).

Пусть $t_0 < q_2$ и при $t = t_0$ не выполнено одно из неравенств (5.14). Если $\mu(t_0) < D(q_1)$, то $(z(q_1), \mu(q_1)) \notin W(q_1)$ при любых управлениях игроков. Поэтому считаем, что не выполнено первое неравенство в (5.14). Второй игрок берет управление $v(t, z) = w(z)$. Тогда (см. [11, теорема 10.4, с. 81]) для любого управления первого игрока и для любого реализовавшегося движения в момент времени q_2 будет выполнено неравенство

$$\|z(q_2)\| > m(q_2)\widehat{\mu}(q_2).$$

Стало быть, $(z(q_2), \mu(q_2)) \notin W(q_2)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.
2. Красовский Н.Н. Об одной задаче преследования // Прикладная математика и механика. 1963. Т. 27. Вып. 2. С. 244–254.
3. Красовский Н.Н., Репин Ю.М., Третьяков В.Е. О некоторых игровых ситуациях в теории управляемых систем // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1965. № 4. С. 3–23.
4. Красовский Н.Н., Третьяков В.Е. К задаче о преследовании в случае ограничений на импульсы управляющих сил // Дифференциальные уравнения. 1966. Т. 2. № 5. С. 587–599.
5. Пожарицкий Г.К. Игровая задача импульсного сближения с противником, ограниченным по энергии // Прикладная математика и механика. 1975. Т. 39. Вып. 4. С. 579–589.
6. Субботина Н.Н., Субботин А.И. Альтернатива для дифференциальной игры сближения-уклонения при ограничениях на импульсы управлений игроков // Прикладная математика и механика. 1975. Т. 39. Вып. 3. С. 397–406.
7. Петров Н.Н. Задача группового преследования в классе импульсных стратегий преследователей // Известия РАН. Теория и системы управления. 2009. № 2. С. 38–44.
8. Ухоботов В.И. Об одном классе линейных дифференциальных игр с импульсными управлениями // Прикладная математика и механика. 1974. Т. 38. Вып. 4. С. 590–598.
9. Кумков С.И., Пацко В.С. Информационные множества в задаче импульсного управления // Автоматика и телемеханика. 1997. № 7. С. 195–206.
10. Ухоботов В.И. Линейная дифференциальная игра с ограничениями на импульсы управлений // Прикладная математика и механика. 1988. Т. 52. Вып. 3. С. 355–362.
11. Ухоботов В.И. Метод одномерного проектирования в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями. Челябинск: Челябинский государственный университет, 2005. 124 с.
12. Ухоботов В.И., Зайцева О.В. Линейная задача импульсной встречи в заданный момент времени при наличии помехи // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16. № 1. С. 186–198.

13. Чикрий А.А., Матичин И.И., Чикрий К.А. Конфликтно управляемые процессы с разрывными траекториями // Кибернетика и системный анализ. 2004. № 6. С. 15–29.
14. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
15. Ухоботов В.И., Изместьев И.В. Однотипная задача импульсной встречи в заданный момент времени с терминальным множеством в форме кольца // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2015. Т. 25. Вып. 2. С. 197–211. DOI: 10.20537/vm150205
16. Черноусько Ф.Л., Меликян А.А. Игровые задачи управления и поиска. М.: Наука, 1978. 270 с.
17. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965. 520 с.
18. Ухоботов В.И., Изместьев И.В. Однотипные дифференциальные игры с терминальным множеством в форме кольца // Динамика систем и процессы управления: Труды Междунар. конф., посвященной 90-летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского. ИММ УрО РАН. Екатеринбург, 2015. С. 325–332.
19. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972. 496 с.

Поступила в редакцию 12.12.2016

Ухоботов Виктор Иванович, д. ф.-м. н., профессор, заведующий кафедрой теории управления и оптимизации, Челябинский государственный университет, 454001, Россия, г. Челябинск, ул. Братьев Кашириных, 129.
E-mail: ukh@csu.ru

Изместьев Игорь Вячеславович, младший научный сотрудник, кафедра теории управления и оптимизации, Челябинский государственный университет, 454001, Россия, г. Челябинск, ул. Братьев Кашириных, 129.
E-mail: j748e8@gmail.com

V. I. Ukhobotov, I. V. Izmest'ev

Synthesis of controls in a single-type game problem of pulse meeting at fixed time with a terminal set in the form of a ring

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2017, vol. 27, issue 1, pp. 69–85 (in Russian).

Keywords: pulse control, optimal control, differential game.

MSC2010: 91A23, 49N75

DOI: 10.20537/vm170107

We consider a linear differential game with a pulse control of the first player. The abilities of the first player are determined by the stock of resources that the player can use when forming his control. At certain instants of time a separation of part of the resources stock is possible, which may implicate an "instantaneous" change of a phase vector, resulting in the complication of the problem. The control of the second player has geometrical constraints. The vectograms of the players are described by the same ball with different time-dependent radii. The terminal set of the game is determined by the condition of belonging the norm of a phase vector to a segment with positive ends. In this paper, a set defined by this condition is called a *ring*. The aim of the first player is to lead a phase vector to the terminal set at fixed time. The aim of the second player is opposite. With the maximal stable bridge, which has been defined by the authors previously, optimal controls of players are constructed.

REFERENCES

1. Krasovskii N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem* (Theory of motion control), Moscow: Nauka, 1968, 475 p.
2. Krasovskii N.N. On a problem of tracking, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1963, vol. 27, issue 2, pp. 363–377. DOI: 10.1016/0021-8928(63)90006-6

3. Krasovskii N.N., Repin Yu.M., Tret'yakov V.E. Some game situations in theory of control systems, *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Tekhnicheskaya Kibernetika*, 1965, no. 4, pp. 3–23 (in Russian).
4. Krasovskii N.N., Tret'yakov V.E. On a pursuit problem in the case of restrictions on the impulses of control forces, *Differ. Uravn.*, 1966, vol. 2, no. 5, pp. 587–599 (in Russian).
5. Pozharitskii G.K. Game problem of impulse encounter with an opponent limited in energy, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1975, vol. 39, issue 4, pp. 555–565. DOI: 10.1016/0021-8928(75)90056-8
6. Subbotina N.N., Subbotin A.I. Alternative for the encounter-evasion differential game with constraints on the momenta of the players' controls, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1975, vol. 39, issue 3, pp. 376–385. DOI: 10.1016/0021-8928(75)90002-7
7. Petrov N.N. A problem of group pursuit in the class of impulse strategies of pursuers, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2009, vol. 48, issue 2, pp. 199–205. DOI: 10.1134/S106423070902004X
8. Ukhobotov V.I. On a class of linear differential games with impulse controls, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1974, vol. 38, issue 4, pp. 550–557. DOI: 10.1016/0021-8928(74)90002-1
9. Kumkov S.I., Patsko V.S. Information sets in the pulse control problem, *Automation and Remote Control*, 1997, vol. 58, no. 7, part 2, pp. 1224–1234.
10. Ukhobotov V.I. A linear differential game with constraints imposed on the control impulses, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1988, vol. 52, issue 3, pp. 277–283. DOI: 10.1016/0021-8928(88)90078-0
11. Ukhobotov V.I. *Metod odnomernogo proektirovaniya v lineinykh differentsial'nykh igrakh s integral'nymi ogranicheniyami* (Method of one-dimensional projecting in linear differential games with integral constraints), Chelyabinsk: Chelyabinsk State University, 2005, 124 p.
12. Ukhobotov V.I., Zaitseva O.V. A linear problem of pulse encounter at a given time under interference, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2011, vol. 272, suppl. 1, pp. 215–228. DOI: 10.1134/S0081543811020167
13. Chikrii A.A., Matichin I.I., Chikrii K.A. Conflict control processes with discontinuous trajectories, *Kibernetika i Sistemnyi Analiz*, 2004, no. 6, pp. 15–29 (in Russian).
14. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry* (Positional differential games), Moscow: Nauka, 1974, 456 p.
15. Ukhobotov V.I., Izmest'ev I.V. Single-type problem of pulse meeting in fixed time with terminal set in form of a ring, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2015, vol. 25, issue 2, pp. 197–211 (in Russian). DOI: 10.20537/vm150205
16. Chernous'ko F.L., Melikyan A.A. *Igrovye zadachi upravleniya i poiska* (Game problems of control and search), Moscow: Nauka, 1978, 270 p.
17. Lyusternik L.A., Sobolev V.I. *Elementy funktsional'nogo analiza* (Elements of functional analysis), Moscow: Nauka, 1965, 520 p.
18. Ukhobotov V.I., Izmest'ev I.V. Single-type differential games with terminal set in form of a ring, *Dinamika sistem i processy upravleniya: Trudy Mezhdunarodnoi konferentsii* (System dynamic and control processes: Proceedings of Int. Conf. Dedicated to the 90th Anniversary of Academician N.N. Krasovskii), Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, 2015, pp. 325–332 (in Russian).
19. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza* (Elements of functions theory and functional analysis), Moscow: Nauka, 1972, 496 p.

Received 12.12.2016

Ukhobotov Viktor Ivanovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Department of Control Theory and Optimization, Chelyabinsk State University, ul. Brat'ev Kashirinykh, 129, Chelyabinsk, 454001, Russia.
E-mail: ukh@csu.ru

Izmest'ev Igor' Vyacheslavovich, Junior Researcher, Department of Control Theory and Optimization, Chelyabinsk State University, ul. Brat'ev Kashirinykh, 129, Chelyabinsk, 454001, Russia.
E-mail: j748e8@gmail.com