МАТЕМАТИКА 2017. Т. 27. Вып. 1

УДК 517.912, 514.1

© *В. А. Кыров*

ВЛОЖЕНИЕ ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНЫХ ГЕОМЕТРИЙ ДВУХ МНОЖЕСТВ РАНГА $(\mathbf{N}, \mathbf{M})$ В ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНЫЕ ГЕОМЕТРИИ ДВУХ МНОЖЕСТВ РАНГА $(\mathbf{N}+\mathbf{1}, \mathbf{M})$

В данной работе методом вложения строится классификация феноменологически симметричных геометрий двух множеств ранга $(n+1, m)$ при $n \geqslant 2$ и $m \geqslant 3$. Суть этого метода состоит в нахождении метрических функций феноменологически симметричных геометрий двух множеств высокого ранга по известной феноменологически симметричной геометрии двух множеств ранга на единицу ниже. Так, по метрической функции феноменологически симметричной геометрии двух множеств ранга $(n+1, n)$ находится метрическая функция феноменологически симметричной геометрии двух множеств ранга $(n+1, n+1)$, по которой потом находится метрическая функция геометрии ранга $(n+1, n+2)$. Затем доказывается, что вложение феноменологически симметричной геометрии двух множеств ранга $(n+1, n+2)$ в феноменологически симметричную геометрию ранга $(n+1, n+3)$ отсутствует. С учетом симметрии метрической функции относительно первого и второго аргументов в конце работы методом математической индукции завершается классификация. Для решения поставленной задачи записываются специальные функциональные уравнения, которые сводятся к хорошо известным дифференциальным уравнениям.

Ключевые слова: феноменологически симметричная геометрия двух множеств, метрическая функция, дифференциальное уравнение.

DOI: 10.20537/vm170104

Введение

В середине 60-х годов XX века из анализа строения физических законов, таких как второй закон Ньютона, закон Ома, формулы тонкой линзы, была создана теория физических структур (ТФС) [1]. Потом была установлена связь ТФС с теорией прямого межчастичного взаимодействия. Основной задачей ТФС является классификация метрических функций феноменологически симметричных (ФС) геометрий как на одном множестве [2], так и на двух множествах (ГДМ) [3]. Феноменологическая симметрия означает существование функциональной связи между значениями метрической функции для определенного числа произвольно взятых точек. Функциональным методом найдена метрическая функция однометрической ФС ГДМ ранга $(2, 2)$:

$$f = x + \xi.$$

В работе автора [4] методом вложения было доказано вложение ФС ГДМ ранга $(2, 2)$ в ФС ГДМ ранга $(3, 2)$, затем вложение ФС ГДМ ранга $(3, 2)$ в ФС ГДМ ранга $(4, 2)$; кроме того, показано, что не существует вложения ФС ГДМ ранга $(4, 2)$ в ФС ГДМ ранга $(5, 2)$, то есть отсутствует ФС ГДМ ранга $(5, 2)$. Построенное доказательство можно схематически изобразить так:

$$(2,2) \longrightarrow (3,2) \longrightarrow (4,2) \xrightarrow{\times} (5,2).$$

В этой диаграмме знак $\times$ над стрелкой означает отсутствие вложения.

Настоящая работа является продолжением работы [4]. В данной работе методом вложения находятся все метрические функции ФС ГДМ высоких рангов: $(3, 3)$, $(4, 3)$, $\ldots$, (n, n), $(n+1, n)$, $\ldots$. Применяемый здесь метод вложения апробирован для ФС геометрий на одном множестве, с помощью которого построены вложения евклидовых, псевдоевклидовых, симплектических и гельмгольцевых двумерных геометрий [5–7].

§ 1. Определение ФС ГДМ ранга $(s+1, k+1)$

В этом параграфе дается общее определение. Пусть имеются два гладких многообразия M и N, причем $\dim M = k$ и $\dim N = s$. Класс гладкости многообразий и функций на них везде предполагается не ниже C^2. Для сокращения записей ниже будем говорить просто о гладкости, подразумевая выше сказанное. Точки первого многообразия обозначаются строчными латинскими буквами: $i, j, i_1, \ldots$, а точки второго многообразия — строчными греческими буквами: $\alpha, \beta, \alpha_1, \ldots$. Рассматривается также гладкая функция $f : M\times N \to R$, называемая *метрической*, сопоставляющая паре точек $\langle i, \alpha\rangle$ из открытой и плотной области определения $S_f \subseteq M \times N$ число $f(i, \alpha)$. В локальных координатах

$$f = f(i, \alpha) = f(x^1, \ldots, x^k; \xi^1, \ldots, \xi^s),$$

где $(x^1, \ldots, x^k)$ — локальные координаты точки i, $(\xi^1, \ldots, \xi^s)$ — локальные координаты точки α.

В отношении метрической функции предполагается выполнение аксиомы невырожденности [3, 8].

Аксиома невырожденности. Выполняются неравенства

$$\frac{\partial(f(i,\alpha_1), \ldots, f(i,\alpha_k))}{\partial(x^1, \ldots, x^k)} \neq 0, \qquad \frac{\partial(f(i_1,\alpha), \ldots, f(i_s,\alpha))}{\partial(\xi^1, \ldots, \xi^s)} \neq 0, \tag{1.1}$$

где первое неравенство справедливо для плотного в $M \times N^k$ множества кортежей точек $\langle i, \alpha_1, \ldots, \alpha_k\rangle$, а второе — для плотного в $M^s \times N$ множества кортежей $\langle i_1, \ldots, i_s, \alpha\rangle$, причем пары $\langle i, \alpha_1\rangle, \ldots, \langle i, \alpha_k\rangle$ и $\langle i_1, \alpha\rangle, \ldots, \langle i_s, \alpha\rangle$ принадлежат S_f.

Определение 1. Будем говорить, что метрическая функция $f : M \times N \to R$ на многообразиях M и N задает *феноменологически симметричную геометрию двух множеств* (*ФС ГДМ*) *ранга* $(s+1, k+1)$, если кроме аксиомы невырожденности дополнительно выполняется аксиома феноменологической симметрии.

Аксиома феноменологической симметрии. Существует плотное множество кортежей $\langle i_1, \ldots, i_{s+1}, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k+1}\rangle$ в $M^{s+1} \times N^{k+1}$, где $\langle i_\nu, \alpha_j\rangle \in S_f$, $\nu = \overline{1, s+1}$, $j = \overline{1, k+1}$, такое, что для каждого из них найдется такая гладкая функция $\Phi : R^{(s+1)(k+1)} \to R$ с $\operatorname{rang}\Phi = 1$, для которой выполняется равенство

$$\Phi(f(i_1, \alpha_1), \ldots, f(i_{s+1}, \alpha_{k+1})) = 0.$$

Отметим, что в приведенном здесь определении ФС ГДМ ранга $(s+1, k+1)$ аргументы i и α метрической функции $f(i, \alpha)$ равноправны, поэтому можно говорить о симметрии относительно первого и второго аргументов, чем ниже и воспользуемся.

§ 2. Гипотеза о вложении ФС ГДМ ранга (n, m) в ФС ГДМ ранга $(n, m+1)$

В данном параграфе ставится задача о вложении ФС ГДМ ранга (n, m) в ФС ГДМ ранга $(n, m+1)$.

Гипотеза о вложении. *В окрестности произвольной точки области определения* $S_f \subset M \times N$, $\dim M = m$, $\dim N = n-1$, *существует такая локальная система координат, в которой метрическую функцию* f *ФС ГДМ ранга* $(n, m+1)$ *можно представить в следующем виде:*

$$f(i, \alpha) = \chi(g(x^1, \ldots, x^{m-1}, \xi^1, \ldots, \xi^{n-1}), x^m); \tag{2.1}$$

здесь $\chi = \chi(u, v)$ — *гладкая функция двух переменных,*

$$g = g(\bar{i}, \alpha) = g(x^1, \ldots, x^{m-1}, \xi^1, \ldots, \xi^{n-1}) \tag{2.2}$$

— *метрическая функция ФС ГДМ ранга* (n, m), $\bar{i} = (x^1, \ldots, x^{m-1})$ — *проекция точки* $i = (x^1, \ldots, x^m)$.

В силу невырожденности функций f и g, из неравенств (1.1) вытекают ограничения на функцию χ:

$$\frac{\partial\chi}{\partial u}\neq 0, \quad \frac{\partial\chi}{\partial v}\neq 0.$$

Метрическая функция (2.2) сохраняет свой вид относительно некоторой $(n-1)(m-1)$-мерной группы Ли, действующей сразу на двух многообразиях M и N [8], то есть является двухточечным инвариантом группы движений, и потому выполняется условие локальной инвариантности

$$X_\omega g+\Xi_\omega g=0, \tag{2.3}$$

где $\omega=1,\ldots,(n-1)(m-1)$, причем операторы X_ω и Ξ_ω образуют базисы алгебр Ли. Для алгебры Ли $L(M)$ действия этой группы на первом многообразии произвольный оператор определяется равенством $X=a^\omega X_\omega$, а для алгебры Ли $L(N)$ действия группы на втором многообразии — равенством $\Xi=a^\omega\Xi_\omega$, где $\omega=1,\ldots,(n-1)(m-1)$. Следует отметить, что алгебры Ли $L(M)$ и $L(N)$ не только изоморфны, но и эквивалентны.

Метрическая функция (2.1) для ФС ГДМ ранга $(n,m+1)$ является двухточечным инвариантом действия $(n-1)m$-мерной группы Ли на многообразиях M и N. Поэтому по условию локальной инвариантности выполняются $(n-1)m$ дифференциальных равенств

$$Y_\mu f+\Omega_\mu f=0, \quad \mu=1,\ldots,(n-1)m, \tag{2.4}$$

причем операторы

$$Y_\mu=Y_\mu^1\frac{\partial}{\partial x^1}+\cdots+Y_\mu^{m-1}\frac{\partial}{\partial x^{m-1}}+Y_\mu^m\frac{\partial}{\partial x^m}, \qquad \Omega_\mu=\Omega_\mu^1\frac{\partial}{\partial\xi^1}+\cdots+\Omega_\mu^{n-1}\frac{\partial}{\partial\xi^{n-1}},$$

где $Y_\mu^{\epsilon_1}(x^1,\ldots,x^{m-1},x^m)$, $\Omega_\mu^{\epsilon_2}(\xi^1,\ldots,\xi^{n-1})$ — гладкие функции в области своего определения, $\epsilon_1=1,\ldots,m-1,m$, $\epsilon_2=1,\ldots,n-1$, образуют базисы алгебр Ли. Для алгебры Ли $\overline{L}(M)$ действия такой группы на первом многообразии произвольный оператор определяется равенством $Y=a^\mu Y_\mu$, а для алгебры Ли $\overline{L}(N)$ действия на втором многообразии — равенством $\Omega=a^\mu\Omega_\mu$, где $\mu=1,\ldots,(n-1)m$. В явном виде эти операторы записываются так:

$$Y=Y^1\frac{\partial}{\partial x^1}+\cdots+Y^{m-1}\frac{\partial}{\partial x^{m-1}}+Y^m\frac{\partial}{\partial x^m}, \qquad \Omega=\Omega^1\frac{\partial}{\partial\xi^1}+\cdots+\Omega^{n-1}\frac{\partial}{\partial\xi^{n-1}}, \tag{2.5}$$

где $Y^{\epsilon_1}(x^1,\ldots,x^{m-1},x^m)$, $\Omega^{\epsilon_2}(\xi^1,\ldots,\xi^{n-1})$ — гладкие функции в области своего определения. Алгебры Ли $\overline{L}(M)$ и $\overline{L}(N)$ эквивалентны. Заметим, что алгебры Ли $L(M)$ и $L(N)$ являются подалгебрами соответственно алгебр Ли $\overline{L}(M)$ и $\overline{L}(N)$.

Далее решается задача о нахождении функции f, задающей ФС ГДМ ранга $(n,m+1)$ по известной функции g, задающей ФС ГДМ ранга (n,m).

Операторы (2.5) и метрическую функцию (2.1) подставляем в условие инвариантности (2.4) и получаем функционально-дифференциальное выражение:

$$\left(Y^1\frac{\partial g}{\partial x^1}+\cdots+Y^{m-1}\frac{\partial g}{\partial x^{m-1}}+\Omega^1\frac{\partial g}{\partial\xi^1}+\cdots+\Omega^{n-1}\frac{\partial g}{\partial\xi^{n-1}}\right)\frac{\partial\chi}{\partial u}+Y^m\frac{\partial\chi}{\partial v}=0, \tag{2.6}$$

где $u=g$, $v=x^m$. Очевидно,

$$Y^1\frac{\partial g}{\partial x^1}+\cdots+Y^{m-1}\frac{\partial g}{\partial x^{m-1}}+\Omega^1\frac{\partial g}{\partial\xi^1}+\cdots+\Omega^{n-1}\frac{\partial g}{\partial\xi^{n-1}}=Y^m\varkappa(u,v), \tag{2.7}$$

где $\varkappa=-\chi'_v/\chi'_u\neq 0$.

Лемма 1. *В функционально-дифференциальном выражении* (2.7) $Y^m\neq 0$.

Доказательство. Пусть $Y^m = 0$. Тогда, согласно (2.7), имеем равенство

$$Y^1\frac{\partial g}{\partial x^1}+\dots+Y^{m-1}\frac{\partial g}{\partial x^{m-1}}+\Omega^1\frac{\partial g}{\partial \xi^1}+\dots+\Omega^{n-1}\frac{\partial g}{\partial \xi^{n-1}}=0,$$

которое представляет собой условие локальной инвариантности (2.3) для произвольных операторов (2.5). Таким образом, произвольные операторы Y и Ω алгебр Ли $\overline{L}(M)$ и $\overline{L}(N)$ удовлетворяют условию инвариантности для алгебр Ли $L(M)$ и $L(N)$. Поэтому $Y = b^\omega X_\omega$ и $\Omega = b^\omega \Xi_\omega$. Значит алгебры Ли $\overline{L}(M)$ и $\overline{L}(N)$ имеют размерность $(n-1)m$. Противоречие. □

Из леммы 1 следует, что выражение (2.6), с учетом равенства (2.7), можно привести к виду

$$\varkappa(u,v)\frac{\partial\chi}{\partial u}+\frac{\partial\chi}{\partial v}=0. \tag{2.8}$$

Из равноправия первого и второго аргументов, входящих в метрическую функцию $f(i,\alpha)$, отмеченного в конце определении ФС ГДМ ранга $(s+1,k+1)$ в § 1, следует симметрия и в построениях данного параграфа. Так, по аналогии с формулировкой гипотезы о вложении ФС ГДМ ранга (n,m) в ФС ГДМ ранга $(n,m+1)$, формулируется гипотеза о вложении ФС ГДМ ранга (n,m) в ФС ГДМ ранга $(n+1,m)$:

В окрестности произвольной точки области определения $S_f \subset M\times N$, $\dim M = m-1$, $\dim N = n$, существует такая локальная система координат, в которой метрическую функцию f ФС ГДМ ранга $(n+1,m)$ можно представить в следующем виде:

$$f(i,\alpha)=\chi(g(x^1,\dots,x^{m-1},\xi^1,\dots,\xi^{n-1}),\xi^n);$$

здесь $\chi=\chi(u,v)$ — гладкая функция двух переменных,

$$g=g(i,\overline{\alpha})=g(x^1,\dots,x^{m-1},\xi^1,\dots,\xi^{n-1})$$

— метрическая функция ФС ГДМ ранга (n,m), $\overline{\alpha}=(\xi^1,\dots,\xi^{n-1})$ — проекция точки $\alpha = (\xi^1,\dots,\xi^{n-1},\xi^n)$.

Ввиду выше отмеченной симметрии последующие построения аналогичны предыдущим.

§ 3. Основные результаты

Главной задачей данной работы является доказательство основной теоремы.

Теорема 1. *Существуют только такие вложения ФС ГДМ, которые приведены в блочной диаграмме:*

$$\cdots \longrightarrow [n,n] \longrightarrow [n+1,n+1] \longrightarrow [n+2,n+2] \longrightarrow \cdots,$$

причем блок $[n+1,n+1]$ имеет вид

$$\begin{array}{ccccc} & & (n,n+1) & & \\ & & \downarrow & & \\ (n+1,n) & \longrightarrow & (n+1,n+1) & \longrightarrow & (n+1,n+2) \\ & & \downarrow & & \\ & & (n+2,n+1) & & \end{array}$$

для любого $n \geqslant 2$.

Доказательство этой теоремы разбито на этапы. В §§ 4–6 проводится доказательство диаграммы

$$(n+1,n) \longrightarrow (n+1,n+1) \longrightarrow (n+1,n+2) \xrightarrow{\times} (n+1,n+3),$$

причем $n \geqslant 2$, а знак $\times$ над стрелкой означает отсутствие вложения. Так как, согласно определению ФС ГДМ, аргументы i и α входят равноправно, то из предыдущей диаграммы вытекает следующая диаграмма:

$$(n, n+1) \longrightarrow (n+1, n+1) \longrightarrow (n+2, n+1) \xrightarrow{\times} (n+3, n+1).$$

В §7 завершается доказательство основной теоремы, для чего применяется метод математической индукции.

§4. Вложение ФС ГДМ ранга $(n+1, n)$ в ФС ГДМ ранга $(n+1, n+1)$

В данном параграфе рассматривается метрическая функция, задающая ФС ГДМ ранга $(n+1, n)$:

$$g = x^1\xi^1 + \dots + x^{n-1}\xi^{n-1} + \xi^n, \tag{4.1}$$

где $n \geqslant 2$ [3]. Заметим, что при $n = 2$ эта метрическая функция имеет вид

$$g = x^1\xi^1 + \xi^2,$$

то есть задает ФС ГДМ ранга $(3, 2)$ [4].

Теорема 2. *Существуют два вложения ФС ГДМ ранга $(n+1, n)$ с метрической функцией, локально изотопной функции (4.1), в ФС ГДМ ранга $(n+1, n+1)$ с метрическими функциями, локально изотопными функциям*

$$f = x^1\xi^1 + \dots + x^{n-1}\xi^{n-1} + x^n + \xi^n, \tag{4.2}$$

$$f = x^1\xi^1 + \dots + x^{n-1}\xi^{n-1} + x^n\xi^n. \tag{4.3}$$

Доказательство. Метрическая функция (4.1) ФС ГДМ ранга $(n+1, n)$ подставляется в равенство (2.7) при $m = n$:

$$Y^1\xi^1 + \dots + Y^{n-1}\xi^{n-1} + \Omega^1 x^1 + \dots + \Omega^{n-1}x^{n-1} + \Omega^n = Y^n\varkappa(u, v), \tag{4.4}$$

где $u = g = x^1\xi^1 + \dots + x^{n-1}\xi^{n-1} + \xi^n$, $v = x^n$. Полученное равенство выполняется тождественно по переменным $x^1, \dots, x^n, \xi^1, \dots, \xi^n$, поэтому является функциональным уравнением относительно неизвестных $Y^1(x^1, \dots, x^n)$, ..., $Y^n(x^1, \dots, x^n)$, $\Omega^1(\xi^1, \dots, \xi^n)$, ..., $\Omega^n(\xi^1, \dots, \xi^n)$, $\varkappa(u, x^n)$. По лемме 1, $Y^n \neq 0$. Далее, решая уравнения (4.4) и (2.8), найдем все метрические функции, задающие ФС ГДМ ранга $(n+1, n+1)$.

Функциональное уравнение (4.4) продифференцируем по переменным $\xi^1, \dots, \xi^{n-1}, \xi^n$:

$$\begin{cases} Y^1 + \Omega^1_{\xi^1}x^1 + \dots + \Omega^{n-1}_{\xi^1}x^{n-1} + \Omega^n_{\xi^1} = Y^n\varkappa_u x^1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Y^{n-1} + \Omega^1_{\xi^{n-1}}x^1 + \dots + \Omega^{n-1}_{\xi^{n-1}}x^{n-1} + \Omega^n_{\xi^{n-1}} = Y^n\varkappa_u x^{n-1}, \end{cases} \tag{4.5}$$

$$\Omega^1_{\xi^n}x^1 + \dots + \Omega^{n-1}_{\xi^n}x^{n-1} + \Omega^n_{\xi^n} = Y^n\varkappa_u. \tag{4.6}$$

Затем (4.6) подставляем в (4.5):

$$\begin{cases} Y^1 + \Omega^1_{\xi^1}x^1 + \dots + \Omega^{n-1}_{\xi^1}x^{n-1} + \Omega^n_{\xi^1} = (\Omega^1_{\xi^n}x^1 + \dots + \Omega^{n-1}_{\xi^n}x^{n-1} + \Omega^n_{\xi^n})x^1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Y^{n-1} + \Omega^1_{\xi^{n-1}}x^1 + \dots + \Omega^{n-1}_{\xi^{n-1}}x^{n-1} + \Omega^n_{\xi^{n-1}} = (\Omega^1_{\xi^n}x^1 + \dots + \Omega^{n-1}_{\xi^n}x^{n-1} + \Omega^n_{\xi^n})x^{n-1}. \end{cases} \tag{4.7}$$

Фиксируя в системе (4.7) координаты $\xi^1, \dots, \xi^n$ точки второго множества, получаем:

$$\begin{cases} Y^1 = -x^1(a^1_n x^1 + \dots + a^{n-1}_n x^{n-1}) + a^1_1 x^1 + \dots + a^{n-1}_1 x^{n-1} + a^n_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Y^{n-1} = -x^{n-1}(a^1_n x^1 + \dots + a^{n-1}_n x^{n-1}) + a^1_{n-1}x^1 + \dots + a^{n-1}_{n-1}x^{n-1} + a^n_{n-1}, \end{cases} \tag{4.8}$$

где $a_l^k, a_n^k, a_l^n = \mathrm{const}$, $k, l = 1, \ldots, n-1$. Затем (4.8) подставляем в (4.7) и сравниваем коэффициенты перед переменными $x^1, \ldots, x^{n-1}$, получим равенства

$$\begin{cases} \Omega^1_{\xi^1} = -a^1_1 + \Omega^n_{\xi^n}, & \Omega^1_{\xi^2} = -a^1_2, & \ldots, & \Omega^1_{\xi^{n-1}} = -a^1_{n-1}, & \Omega^1_{\xi^n} = -a^1_n, \\ \Omega^2_{\xi^1} = -a^2_1, & \Omega^2_{\xi^2} = -a^2_2 + \Omega^n_{\xi^n}, & \ldots, & \Omega^2_{\xi^{n-1}} = -a^2_{n-1}, & \Omega^2_{\xi^n} = -a^2_n, \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \ldots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \Omega^{n-1}_{\xi^1} = -a^{n-1}_1, & \Omega^{n-1}_{\xi^2} = -a^{n-1}_2, & \ldots, & \Omega^{n-1}_{\xi^{n-1}} = -a^{n-1}_{n-1} + \Omega^n_{\xi^n}, & \Omega^{n-1}_{\xi^n} = -a^{n-1}_n, \\ \Omega^n_{\xi^1} = -a^n_1, & \Omega^n_{\xi^2} = -a^n_2, & \ldots, & \Omega^n_{\xi^{n-1}} = -a^n_{n-1}. \end{cases} \tag{4.9}$$

Интегрируя систему (4.9), получаем

$$\begin{cases} \Omega^1 = -a^1_2\xi^2 - \cdots - a^1_{n-1}\xi^{n-1} - a^1_n\xi^n + p^1(\xi^1), \\ \Omega^2 = -a^2_1\xi^1 - a^2_3\xi^3 - \cdots - a^2_{n-1}\xi^{n-1} - a^2_n\xi^n + p^2(\xi^2), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Omega^{n-1} = -a^{n-1}_1\xi^1 - a^{n-1}_2\xi^2 - \cdots - a^{n-1}_{n-2}\xi^{n-2} - a^{n-1}_n\xi^n + p^{n-1}(\xi^{n-1}), \\ \Omega^n = -a^n_1\xi^1 - a^n_2\xi^2 - \cdots - a^n_{n-1}\xi^{n-1} + p^n(\xi^n). \end{cases} \tag{4.10}$$

В силу (4.9) имеют место равенства

$$\Omega^1_{\xi^1} = -a^1_1 + \Omega^n_{\xi^n}, \quad \Omega^2_{\xi^2} = -a^2_2 + \Omega^n_{\xi^n}, \quad \ldots, \quad \Omega^{n-1}_{\xi^{n-1}} = -a^{n-1}_{n-1} + \Omega^n_{\xi^n}. \tag{4.11}$$

Подставим выражения (4.10) в равенства (4.11), получим

$$p^1_{\xi^1} = -a^1_1 + p^n_{\xi^n}, \quad p^2_{\xi^2} = -a^2_2 + p^n_{\xi^n}, \quad \ldots, \quad p^{n-1}_{\xi^{n-1}} = -a^{n-1}_{n-1} + p^n_{\xi^n}. \tag{4.12}$$

Разделяя переменные в системе (4.12) и интегрируя ее, получаем

$$p^n = -a^n_n\xi^n + a^n, \quad p^1 = -a^1_1\xi^1 - a^n_n\xi^1 + a^1, \quad \ldots, \quad p^{n-1} = -a^{n-1}_{n-1}\xi^{n-1} - a^n_n\xi^{n-1} + a^{n-1}, \tag{4.13}$$

где $a^n_n, a^1, \ldots, a^n = \mathrm{const}$. Подставляя (4.13) в систему (4.10), получаем

$$\begin{cases} \Omega^1 = -(a^1_1 + a^n_n)\xi^1 - a^1_2\xi^2 - \cdots - a^1_{n-1}\xi^{n-1} - a^1_n\xi^n + a^1, \\ \Omega^2 = -a^2_1\xi^1 - (a^2_2 + a^n_n)\xi^2 - \cdots - a^2_{n-1}\xi^{n-1} - a^2_n\xi^n + a^2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Omega^{n-1} = -a^{n-1}_1\xi^1 - a^{n-1}_2\xi^2 - \cdots - (a^{n-1}_{n-1} + a^n_n)\xi^{n-1} - a^{n-1}_n\xi^n + a^{n-1}, \\ \Omega^n = -a^n_1\xi^1 - a^n_2\xi^2 - \cdots - a^n_{n-1}\xi^{n-1} - a^n_n\xi^n + a^n, \end{cases} \tag{4.14}$$

причем все коэффициенты в системе (4.14) постоянные. Далее подставляем (4.8) и (4.14) в (4.4) и дважды дифференцируем по ξ^n, получим $\varkappa_{uu} = 0$. После интегрирования будем иметь

$$\varkappa(u, v) = p(v)u + q(v). \tag{4.15}$$

Тогда уравнение (2.8) примет вид

$$\big(p(v)u + q(v)\big)\frac{\partial \chi}{\partial u} + \frac{\partial \chi}{\partial v} = 0. \tag{4.16}$$

Лемма 2. *Общим решением дифференциального уравнения (4.16) является функция*

$$f = \chi = \varphi\left(ue^{-\int p(v)\,dv} - \int q(v)e^{-\int p(v)\,dv}\,dv\right).$$

Доказательство леммы 2 можно найти либо в книге [9], либо в работе [4].

Затем, учитывая, что $v = x^n$, осуществляем замену координат и масштабное преобразование метрической функции, полученной в лемме 2.

1. При $q = 0$, $p \neq 0$ имеем

$$\overline{f} = \varphi^{-1}(f), \quad \overline{x}^1 = x^1 e^{-\int p(x^n)\,dx^n}, \quad \ldots, \quad \overline{x}^{n-1} = x^{n-1} e^{-\int p(x^n)\,dx^n}, \quad \overline{x}^n = e^{-\int p(x^n)\,dx^n}.$$

Тогда метрическая функция принимает вид

$$\overline{f} = \overline{x}^1\xi^1 + \cdots + \overline{x}^{n-1}\xi^{n-1} + \overline{x}^n\xi^n,$$

которая, с точностью до обозначений координат, совпадает с (4.3) для ФС ГДМ ранга $(n+1, n+1)$.

2. При $q \neq 0$, $p = 0$ имеем

$$\overline{f} = \varphi^{-1}(f), \quad \overline{x}^n = -\int q(x^n)\,dx^n.$$

Поэтому для метрической функции будем иметь

$$\overline{f} = x^1\xi^1 + \cdots + x^{n-1}\xi^{n-1} + \overline{x}^n + \xi^n,$$

то есть, с точностью до обозначений координат, получена каноническая форма (4.2) для ФС ГДМ ранга $(n+1, n+1)$.

3. При $q \neq 0$, $p \neq 0$ имеем

$$\overline{f} = \varphi^{-1}(f), \quad \overline{x}^1 = x^1 e^{-\int p(x^n)\,dx^n}, \quad \ldots, \quad \overline{x}^{n-1} = x^{n-1} e^{-\int p(x^n)\,dx^n}, \quad \overline{x}^n = e^{-\int p(x^n)\,dx^n}.$$

Значит, метрическая функция принимает вид

$$\overline{f} = \overline{x}^1\xi^1 + \cdots + \overline{x}^{n-1}\xi^{n-1} + \overline{x}^n\xi^n + r(\overline{x}^n), \tag{4.17}$$

где $r(\overline{x}^n)$ — гладкая функция. Выясним, при каких значениях функции r метрическая функция (4.17) задает ФС ГДМ ранга $(n+1, n+1)$. Задача сводится к исследованию этой метрической функции на деформацию. Впервые задача деформации исследовалась в работе [10].

Лемма 3. *Метрическая функция (4.17) задает ФС ГДМ ранга $(n+1, n+1)$ тогда и только тогда, когда*

$$r(\overline{x}^n) = a\overline{x}^n + b,$$

где $a = \mathrm{const}$, $b = \mathrm{const}$.

Доказательство. Пусть метрическая функция (4.17) задает ФС ГДМ ранга $(n+1, n+1)$. Тогда она является инвариантом группы движений размерности n^2, следовательно, для произвольного оператора ее алгебры Ли выполняется уравнение

$$Y^1\frac{\partial\overline{f}}{\partial\overline{x}^1} + \cdots + Y^{n-1}\frac{\partial\overline{f}}{\partial\overline{x}^{n-1}} + Y^n\frac{\partial\overline{f}}{\partial\overline{x}^n} + \Omega^1\frac{\partial\overline{f}}{\partial\xi^1} + \cdots + \Omega^{n-1}\frac{\partial\overline{f}}{\partial\xi^{n-1}} + \Omega^n\frac{\partial\overline{f}}{\partial\xi^n} = 0,$$

которое представляет собой условие локальной инвариантности (2.4). Учитывая (4.17), имеем

$$Y^1\xi^1 + \cdots + Y^{n-1}\xi^{n-1} + Y^n(\xi^n + r'(\overline{x}^n)) + \Omega^1\overline{x}^1 + \cdots + \Omega^{n-1}\overline{x}^{n-1} + \Omega^n\overline{x}^n = 0. \tag{4.18}$$

Дифференцируя полученное равенство по ξ^k и $\overline{x}^l$, $k, l = 1, \ldots, n$, получим $Y^k_{\overline{x}^l} + \Omega^l_{\xi^k} = 0$. После разделения переменных и интегрирования будем иметь

$$Y^k = \sum b^k_l\overline{x}^l + b^k, \qquad \Omega^k = -\sum b^l_k\xi^l + c_k,$$

причем все коэффициенты постоянные. Затем найденное подставляем в (4.18):

$$b^1\xi^1 + \dots + b^{n-1}\xi^{n-1} + b^n\xi^n + (b_1^n\overline{x}^1 + \dots + b_n^n\overline{x}^n + b^n)r'(\overline{x}^n) + c_1\overline{x}^1 + \dots + c_{n-1}\overline{x}^{n-1} + c_n\overline{x}^n = 0.$$

Дифференцируя по переменным $\xi^1, \dots, \xi^n$, получаем $b^k = 0$. Так как алгебра Ли имеет размерность n^2, то $b_l^k \neq 0$. Тогда из последнего равенства следует $r'' = 0$, то есть приходим к утверждению леммы 3. □

Таким образом, метрическая функция (4.17) принимает вид

$$\overline{f} = \overline{x}^1\xi^1 + \dots + \overline{x}^{n-1}\xi^{n-1} + \overline{x}^n\xi^n + a\overline{x}^n + b.$$

Затем переобозначаем метрическую функцию и координаты: $\widehat{f} = \overline{f} - b$, $\overline{\xi}^n = \xi^n + a$. Тогда

$$\widehat{f} = \overline{x}^1\xi^1 + \dots + \overline{x}^{n-1}\xi^{n-1} + \overline{x}^n\overline{\xi}^n.$$

Итак, с точностью до обозначений координат получена каноническая форма (4.3) для ФС ГДМ ранга $(n+1, n+1)$.

Таким образом, задача вложения ФС ГДМ ранга $(n+1, n)$ в ФС ГДМ ранга $(n+1, n+1)$ полностью решена. □

Заметим, что единственность вложения следует из единственности решения соответствующих дифференциальных уравнений.

§ 5. Вложение ФС ГДМ ранга $(n+1, n+1)$ в ФС ГДМ ранга $(n+1, n+2)$

В данном параграфе рассматриваются метрические функции (4.2) и (4.3), задающие ФС ГДМ ранга $(n+1, n+1)$ и которые найдены в § 4.

Теорема 3. *Существует одно вложение ФС ГДМ ранга $(n+1, n+1)$ с метрической функцией, локально изотопной функции (4.2), в ФС ГДМ ранга $(n+1, n+2)$ с метрической функцией, локально изотопной функции*

$$f = x^1\xi^1 + \dots + x^{n-1}\xi^{n-1} + x^n\xi^n + x^{n+1}. \tag{5.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Метрическая функция (4.2) ФС ГДМ ранга $(n+1, n+1)$ подставляется в равенство (2.7) при $m = n+1$:

$$Y^1\xi^1 + \dots + Y^{n-1}\xi^{n-1} + Y^n + \Omega^1 x^1 + \dots + \Omega^{n-1}x^{n-1} + \Omega^n = Y^{n+1}\varkappa(u, v), \tag{5.2}$$

где $u = g = x^1\xi^1 + \dots + x^{n-1}\xi^{n-1} + x^n + \xi^n$, $v = x^{n+1}$. Полученное выражение выполняется тождественно по переменным $x^1, \dots, x^n, x^{n+1}, \xi^1, \dots, \xi^n$ и поэтому является функциональным уравнением относительно неизвестных $Y^1(x^1, \dots, x^n, x^{n+1}), \dots, Y^n(x^1, \dots, x^n, x^{n+1}), \Omega^1(\xi^1, \dots, \xi^n), \dots, \Omega^n(\xi^1, \dots, \xi^n)$, $\varkappa(u, x^{n+1})$. По лемме 1, $Y^{n+1} \neq 0$. Затем решаются уравнения (5.2) и (2.8).

Функциональное уравнение (5.2) решается так же, как и уравнение (4.4). В результате получим функцию (4.15), от которой перейдем к уравнению (4.16), решенному в лемме 2. Затем, учитывая, что $v = x^{n+1}$, осуществляем замену координат и масштабное преобразование функции, полученной в лемме 2.

1. При $q = 0$, $p \neq 0$ имеем

$$\begin{cases} \overline{f} = \varphi^{-1}(f), \quad \overline{x}^1 = x^1 e^{-\int p(x^{n+1})\,dx^{n+1}}, \quad \dots, \quad \overline{x}^{n-1} = x^{n-1}e^{-\int p(x^{n+1})\,dx^{n+1}}, \\ \qquad \overline{x}^n = e^{-\int p(x^{n+1})\,dx^{n+1}}, \quad \overline{x}^{n+1} = x^n e^{-\int p(x^{n+1})\,dx^{n+1}}. \end{cases}$$

Тогда с точностью до обозначений координат получается метрическая функция (5.1) ФС ГДМ ранга $(n+1, n+2)$.

2. При $q \neq 0$, $p = 0$ имеем

$$\overline{f} = \varphi^{-1}(f), \quad \overline{x}^n = x^n - \int q(x^{n+1})\,dx^{n+1}.$$

Значит, с точностью до обозначений координат метрическая функция принимает вид (4.2). В таком случае она не содержит переменной $\overline{x}^{n+1}$, а значит, вырождена. Поэтому эта функция не задает ФС ГДМ ранга $(n+1, n+2)$.

3. При $q \neq 0$, $p \neq 0$ имеем

$$\begin{cases} \overline{f} = \varphi^{-1}(f), \quad \overline{x}^1 = x^1 e^{-\int p(x^{n+1})\,dx^{n+1}}, \quad \ldots, \quad \overline{x}^{n-1} = x^{n-1} e^{-\int p(x^{n+1})\,dx^{n+1}}, \\ \overline{x}^n = e^{-\int p(x^{n+1})\,dx^{n+1}}, \quad \overline{x}^{n+1} = x^n e^{-\int p(x^{n+1})\,dx^{n+1}} - \int q(x^{n+1}) e^{-\int p(x^{n+1})\,dx^{n+1}}\,dx^{n+1}. \end{cases}$$

Поэтому метрическая функция, с точностью до обозначений координат, совпадает с канонической формой (5.1) для ФС ГДМ ранга $(n+1, n+2)$. □

Теорема 4. *Существует одно вложение ФС ГДМ ранга* $(n+1, n+1)$ *с метрической функцией, локально изотопной функции* (4.3), *в ФС ГДМ ранга* $(n+1, n+2)$ *с метрической функцией, локально изотопной функции* (5.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство данной теоремы полностью повторяет все этапы доказательства теоремы 3, поэтому оно опускается. □

Таким образом, задача вложения ФС ГДМ ранга $(n+1, n+1)$ в ФС ГДМ ранга $(n+1, n+2)$ полностью решена.

§ 6. Вложение ФС ГДМ ранга $(n+1, n+2)$ в ФС ГДМ ранга $(n+1, n+3)$

В данном параграфе рассматривается метрическая функция (5.1), задающая ФС ГДМ ранга $(n+1, n+2)$ и которая найдена в § 5.

Теорема 5. *Вложение ФС ГДМ ранга* $(n+1, n+2)$ *с метрической функцией, локально изотопной функции* (5.1), *в ФС ГДМ ранга* $(n+1, n+3)$ *не существует, то есть нет метрической функции, задающей ФС ГДМ ранга* $(n+1, n+3)$.

Доказательство теоремы 5 строится аналогично доказательству теорем 2–4, поэтому приводим основные этапы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Метрическая функция (5.1) ФС ГДМ ранга $(n+1, n+2)$ подставляется в равенство (2.7) при $m = n+2$:

$$Y^1\xi^1 + \cdots + Y^{n-1}\xi^{n-1} + Y^n\xi^n + Y^{n+1} + \Omega^1 x^1 + \cdots + \Omega^{n-1}x^{n-1} + \Omega^n x^n = Y^{n+2}\varkappa(u, v), \quad (6.1)$$

где $u = g = x^1\xi^1 + \cdots + x^{n-1}\xi^{n-1} + x^n\xi^n + x^{n+1}$, $v = x^{n+2}$. Полученное выражение выполняется тождественно по переменным $x^1, \ldots, x^{n+2}, \xi^1, \ldots, \xi^n$ и поэтому является функциональным уравнением относительно неизвестных $Y^1, \ldots, Y^n$, $\Omega^1, \ldots, \Omega^n$, $\varkappa(u, x^{n+2})$. В силу леммы 1 $Y^{n+2} \neq 0$. Далее решаются уравнения (6.1) и (2.8).

Функциональное уравнение (6.1) решаем так же, как и уравнение (4.4), в результате получим функцию (4.15), от которой перейдем к уравнению (4.16), решенному в лемме 2. Затем, учитывая, что $v = x^{n+2}$, осуществляем замену координат и масштабное преобразование функции, полученной в лемме 2.

1. При $q = 0$, $p \neq 0$ имеем

$$\overline{f} = \varphi^{-1}(f), \quad \overline{x}^1 = x^1 e^{-\int p(x^{n+2})\,dx^{n+2}}, \quad \ldots,$$
$$\overline{x}^n = x^n e^{-\int p(x^{n+2})\,dx^{n+2}}, \quad \overline{x}^{n+1} = x^{n+1} e^{-\int p(x^{n+2})\,dx^{n+2}}.$$

2. При $q \neq 0$, $p = 0$ имеем

$$\overline{f} = \varphi^{-1}(f), \quad \overline{x}^{n+1} = x^{n+1} - \int q(x^{n+2})\,dx^{n+2}.$$

3. При $q \neq 0$, $p \neq 0$ имеем

$$\begin{cases} \overline{f} = \varphi^{-1}(f), \quad \overline{x}^1 = x^1 e^{-\int p(x^{n+2})\,dx^{n+2}}, \quad \ldots, \quad \overline{x}^n = x^n e^{-\int p(x^{n+2})\,dx^{n+2}}, \\ \qquad \overline{x}^{n+1} = x^{n+1} e^{-\int p(x^{n+2}) dx^{n+2}} - \displaystyle\int q(x^{n+2}) e^{-\int p(x^{n+2})\,dx^{n+2}}\,dx^{n+2}. \end{cases}$$

Во всех трех случаях, с точностью до замены координат и масштабного преобразования, метрическая функция имеет каноническую форму (5.1), которая в данном случае будет вырожденной. □

Таким образом, ФС ГДМ ранга $(n+1, n+3)$ не существует.

§ 7. Завершение доказательства

Для завершения доказательства теоремы 1 применяем метод математической индукции, согласно которому сначала проверяется первое утверждение, состоящее в справедливости диаграммы

$$(3,2) \longrightarrow (3,3) \longrightarrow (3,4) \xrightarrow{\times} (3,5).$$

Затем предполагается p-е утверждение

$$(p+2, p+1) \longrightarrow (p+2, p+2) \longrightarrow (p+2, p+3) \xrightarrow{\times} (p+2, p+4).$$

Потом проверяется $(p+1)$-е утверждение

$$(p+3, p+2) \longrightarrow (p+3, p+3) \longrightarrow (p+3, p+4) \xrightarrow{\times} (p+3, p+5).$$

Первое утверждение на самом деле доказано в §§ 4–6, если полагать $n = 2$; $(p+1)$-е утверждение также доказано в этих параграфах, если положить $n = p+2$. Таким образом, основная теорема доказана.

Заключение

Подведем итог. Метрическая функция однометрической ФС ГДМ в подходящих локальных координатах принимает следующий вид:

для ФС ГДМ ранга $(n+1, n)$:

$$f = x^1\xi^1 + \cdots + x^{n-1}\xi^{n-1} + \xi^n;$$

для ФС ГДМ ранга $(n, n+1)$:

$$f = x^1\xi^1 + \cdots + x^{n-1}\xi^{n-1} + x^n;$$

для ФС ГДМ ранга $(n+1, n+1)$:

$$f = x^1\xi^1 + \cdots + x^{n-1}\xi^{n-1} + x^n\xi^n;$$

$$f = x^1\xi^1 + \cdots + x^{n-1}\xi^{n-1} + x^n + \xi^n.$$

Таким образом, в данной работе и в работе [4] полностью решена задача вложения однометрических феноменологически симметричных геометрий на двух множествах.

Ранее эта задача решалась технически сложными функциональными методами [3]. Предложенный в данной статье метод вложения сопряжен с меньшими техническими трудностями, применение которого для ФС ГДМ с большей метричностью, например двуметрических, триметрических и т. д., по мнению автора, позволит продвинуться в решении классификационной задачи.

Выражаю благодарность рецензенту за внимательное прочтение рукописи и конструктивные замечания, позволившие улучшить текст.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кулаков Ю.И. Об одном принципе, лежащем в основании классической физики // Доклады АН СССР. 1970. Т. 193. № 1. С. 72–75.
2. Михайличенко Г.Г. Двумерные геометрии // Доклады АН СССР. 1981. Т. 260. № 4. С. 803–805.
3. Михайличенко Г.Г. Решение функциональных уравнений в теории физических структур // Доклады АН СССР. 1972. Т. 206. № 5. С. 1056–1058.
4. Кыров В.А. Вложение феноменологически симметричных геометрий двух множеств ранга $(N,2)$ в феноменологически симметричные геометрии двух множеств ранга $(N+1,2)$ // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26. Вып. 3. С. 312–323. DOI: 10.20537/vm160302
5. Кыров В.А. Функциональные уравнения в псевдоевклидовой геометрии // Сибирский журнал индустриальной математики. 2010. Т. 13. № 4. С. 38–51.
6. Кыров В.А. Функциональные уравнения в симплектической геометрии // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16. № 2. С. 149–153.
7. Кыров В.А. Об одном классе функционально-дифференциальных уравнений // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2012. Т. 26. № 1. С. 31–38. DOI: 10.14498/vsgtu986
8. Михайличенко Г.Г. Групповая симметрия физических структур. Барнаул: Изд-во Барн. гос. пед. ун-та, 2003. 204 с.
9. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969. 424 с.
10. Михайличенко Г.Г. Функциональные уравнения в геометрии двух множеств // Известия вузов. Математика. 2010. № 7. С. 64–72.

Поступила в редакцию 31.10.2016

Кыров Владимир Александрович, к. ф.-м. н., доцент, Горно-Алтайский государственный университет, 649000, Россия, Респ. Алтай, г. Горно-Алтайск, ул. Ленкина, 1.
E-mail: kyrovVA@yandex.ru

V. A. Kyrov

Embedding of phenomenologically symmetric geometries of two sets of rank $(\mathbf{N},\mathbf{M})$ into phenomenologically symmetric geometries of two sets of rank $(\mathbf{N}+\mathbf{1},\mathbf{M})$

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2017, vol. 27, issue 1, pp. 42–53 (in Russian).

Keywords: phenomenologically symmetric geometry of two sets, metric function, differential equation.

MSC2010: 35F05, 39B05, 51P99

DOI: 10.20537/vm170104

In this paper, a classification of phenomenologically symmetric geometries of two sets of rank $(n+1,m)$ with $n \geqslant 2$ and $m \geqslant 3$ is constructed by the method of embedding. The essence of this method is to find the metric functions of phenomenologically symmetric geometries of two high-rank sets by the known phenomenologically symmetric geometries of two sets of a rank which is lower by unity. By the known metric function of the phenomenologically symmetric geometry of two sets of rank $(n+1,n)$, we find the metric function of the phenomenologically symmetric geometry of rank $(n+1,n+1)$, on the basis of which we find later the metric function of the phenomenologically symmetric geometry of rank $(n+1,n+2)$. Then we prove that there is no embedding of the phenomenologically symmetric geometry of two sets of rank $(n+1,n+2)$ in the phenomenologically symmetric geometry of two sets of rank $(n+1,n+3)$. At the end of the paper, we complete the classification using the mathematical induction method and taking account of the symmetry of a metric function with respect to the first and the second argument. To solve the problem, we write special functional equations, which reduce to the well-known differential equations.

МАТЕМАТИКА 2017. Т. 27. Вып. 1

REFERENCES

1. Kulakov Yu.I. The one principle underlying classical physics, *Soviet Physics Doklady*, 1971, vol. 15, no. 7, pp. 666–668.
2. Mikhailichenko G.G. Two-dimensional geometry, *Soviet Mathematics. Doklady*, 1981, vol. 24, no. 2, pp. 346–348.
3. Mikhailichenko G.G. The solution of functional equations in the theory of physical structures, *Soviet Mathematics. Doklady*, 1972, vol. 13, no. 5, pp. 1377–1380.
4. Kyrov V.A. Embedding of phenomenologically symmetric geometries of two sets of the rank $(N, 2)$ into phenomenologically symmetric geometries of two sets of the rank $(N + 1, 2)$, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2016, vol. 26, issue 3, pp. 312–323 (in Russian). DOI: 10.20537/vm160302
5. Kyrov V.A. Functional equations in pseudo-Euclidean geometry, *Sib. Zh. Ind. Mat.*, 2010, vol. 13, no. 4, pp. 38–51 (in Russian).
6. Kyrov V.A. Functional equations in symplectic geometry, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2010, vol. 16, no. 2, pp. 149–153 (in Russian).
7. Kyrov V.A. On some class of functional-differential equation, *Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2012, vol. 26, no. 1, pp. 31–38 (in Russian). DOI: 10.14498/vsgtu986
8. Mikhailichenko G.G. *Gruppovaya simmetriya fizicheskikh struktur* (The group symmetry of physical structures), Barnaul: Barnaul State Pedagogical University, 2003, 204 p.
9. Elsgolts L.E. *Differentsial'nye uravneniya i variatsionnoe ischislenie* (Differential equations and the calculus of variations), Moscow: Nauka, 1969, 424 p.
10. Mikhailichenko G.G. Functional equations in geometry of two sets, *Russian Mathematics*, 2010, vol. 54, issue 7, pp. 56–63. DOI: 10.3103/S1066369X10070066

Received 31.10.2016

Kyrov Vladimir Aleksandrovich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Gorno-Altaisk State University, ul. Lenkina, 1, Gorno-Altaisk, 649000, Russia.
E-mail: kyrovVA@yandex.ru