ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ

МАТЕМАТИКА 2017. Т. 27. Вып. 1

УДК 517.95, 517.977

© *Ф. А. Кутерин, М. И. Сумин*

РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЙ ИТЕРАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА В ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ. II. ОПТИМИЗАЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ СИСТЕМЫ[1]

Для задачи оптимального управления линейным параболическим уравнением с распределенным, начальным и граничным управлениями и с операторным полуфазовым ограничением типа равенства формулируется устойчивый секвенциальный, или, другими словами, регуляризованный, принцип максимума Понтрягина в итерационной форме. Его главное отличие от классического принципа максимума Понтрягина заключается в том, что он, во-первых, формулируется в терминах минимизирующих последовательностей, во-вторых, имеет форму итерационного процесса в пространстве двойственных переменных и, наконец, в-третьих, устойчиво к ошибкам исходных данных оптимизационной задачи порождает в ней минимизирующее приближенное решение в смысле Дж. Варги, т. е. представляет собой регуляризирующий алгоритм. Доказательство регуляризованного принципа максимума Понтрягина в итерационной форме опирается на методы двойственной регуляризации и итеративной двойственной регуляризации. Приводятся результаты модельных расчетов при решении конкретной задачи оптимального управления, иллюстрирующих работу алгоритма, основанного на регляризованном итерационном принципе максимума Понтрягина. В качестве конкретной оптимизационной задачи рассмотрена задача поиска минимальной по норме тройки управлений при операторном ограничении-равенстве в финальный момент времени, или, другими словами, обратная задача финального наблюдения по поиску ее нормального решения.

Ключевые слова: оптимальное управление, неустойчивость, итеративная двойственная регуляризация, регуляризованный итерационный принцип Лагранжа, регуляризованный итерационный принцип максимума Понтрягина.

DOI: 10.20537/vm170103

Введение

В данной работе продолжается исследование регуляризованных принципа Лагранжа (ПЛ) и принципа максимума Понтрягина (ПМП) в итерационной форме, начатое в ее первой части [1]. В ней регуляризованные ПЛ и ПМП в итерационной форме доказываются для задачи оптимального управления линейным параболическим уравнением с распределенным, начальным и граничным управлениями, с операторным полуфазовым ограничением типа равенства и с сильно выпуклым функционалом качества. Частным случаем этой задачи является задача поиска минимальной по норме тройки управлений при операторном ограничении-равенстве в финальный момент времени, или, другими словами, классическая неустойчивая обратная задача финального наблюдения по нахождению ее нормального решения.

Во введении к первой части работы [1] было отмечено, что неустойчивость ПМП (как и неустойчивость любых других классических условий оптимальности) является естественным свойством задач оптимального управления. Там же было указано, что в работе [2] может быть найден пример неустойчивости ПМП в задаче оптимального управления для простейшего линейного обыкновенного дифференциального уравнения с фазовым ограничением типа равенства. В задаче этого примера оптимальный элемент удовлетворяет регулярному ПМП, однако

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 15–47–02294-р_поволжье_а), Минобрнауки РФ в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности в 2014–2016 гг. (код проекта 1727), а также при поддержке гранта в рамках соглашения от 27 августа 2013 г. № 02.B.49.21.0003 между Минобрнауки РФ и Нижегородским госуниверситетом им. Н.И. Лобачевского.

«в каждой сколь угодно малой ее окрестности» существуют близкие (возмущенные) задачи, в каждой из которых оптимальный элемент также удовлетворяет регулярному ПМП. При этом значения этих близких задач при стремлении к нулю возмущения не стремятся к значению исходной (невозмущенной) задачи. Приведем здесь другой пример «патологической» ситуации, связанной с теорией ПМП. Задача приводимого ниже примера представляет собой частный случай рассматриваемой в настоящей второй части статьи оптимизационной задачи.

Пример 1. Рассмотрим задачу оптимального управления с полуфазовым ограничением типа равенства в финальный момент времени:

$$(P_q) \qquad \int_0^1 v^2(x)\,dx \to \inf, \quad z[v](\cdot,T) = q \in L_2(0,1),$$

по нахождению начального управления в третьей краевой задаче для уравнения теплопроводности

$$z_t - z_{xx} = 0, \quad z(x,0) = v(x), \quad x \in \Omega \equiv (0,1),$$
$$z_x(0,t) - z(0,t) = 0, \quad z_x(1,t) + z(1,t) = 0, \quad t \in [0,T], \quad v(x) \in V \equiv [-1,1].$$

В терминах теории обратных задач сформулированная оптимизационная задача представляет собой классическую обратную задачу наблюдения, в которой требуется найти начальное условие $v(x)$, $x \in \Omega$, по известному приближенно в финальный момент времени T решению $z[v](\cdot,T)$ третьей краевой задачи для уравнения теплопроводности.

Обозначим через $I^*\colon L_2(0,1) \to L_2(0,1)$ оператор, задаваемый равенством $I^*[p](\cdot) \equiv \eta[p](\cdot,0)$, $p \in L_2(0,1)$, являющийся, очевидно, сопряженным к оператору $I : L_2(0,1) \to L_2(0,1)$, задаваемому равенством $I[v](\cdot) \equiv z[v](\cdot,T)$, где $\eta[p]$ — решение сопряженной задачи

$$\eta_t + \eta_{xx} = 0, \quad \eta(x,1) = p(x), \quad x \in (0,1),$$
$$\eta_x(0,t) - \eta(0,t) = 0, \quad \eta_x(1,t) + \eta(1,t) = 0, \quad t \in [0,T].$$

Решения сопряженной задачи, как хорошо известно (см., например, [3, гл. III]), являются достаточно гладкими функциями. В силу простоты примера (и, в частности, в силу инъективности оператора I, которая легко может быть установлена, например, на основе результатов [4, 5]), очевидно, допустимое множество в задаче (P_q) при любом $q \in L_2(\Omega)$, при котором оно не пусто, состоит ровно из одного элемента, то есть, другими словами, множество решений обратной задачи состоит ровно из одного элемента, если оно не пусто.

Пусть $\overline{v} \in \mathcal{D} \equiv \{v \in L_2(0,1) : v(x) \in V \text{ п. в. на } [0,1]\}$ — такое произвольное управление, которое является разрывной кусочно-непрерывной функцией, принимающей свои значения в открытом интервале $(-1,1)$, и $q = q_{\overline{v}} = z[\overline{v}](\cdot,T)$. Покажем, что управление $\overline{v}$, являющееся единственным допустимым, а значит и оптимальным в задаче $(P_{q_{\overline{v}}})$, не удовлетворяет ПМП, а следовательно, ввиду выпуклости задачи, и ПЛ в ней.

Действительно, если бы это было не так, то существовала бы пара множителей $(\mu_0, y) \in \mathbb{R}^1 \times L_2(\Omega)$, $i = 1,2,\ldots$, $\mu_0 \geqslant 0$, $(\mu_0, y) \neq 0$, такая, что

$$\mu_0(v^2 - \overline{v}^2(x)) + \eta[y](x,0)(v - \overline{v}(x)) \geqslant 0 \quad \forall\, v \in [-1,1] \text{ при п. в. } x \in \Omega.$$

Очевидно, следствием этого поточечного ПМП является неравенство

$$2\mu_0\overline{v}(x)(v - \overline{v}(x)) + \eta[y](x,0)(v - \overline{v}(x)) \geqslant 0 \quad \forall\, v \in [-1,1] \text{ при п. в. } x \in \Omega,$$

то есть элемент $2\mu_0\overline{v}(\cdot) + \eta[y](\cdot,0)$ является опорным к выпуклому множеству $\mathcal{D}$ в точке $\overline{v}$. Но это означает в данном случае, что $2\mu_0\overline{v}(\cdot) + \eta[y](\cdot,0) = 0$, так как конус нормалей к множеству $\mathcal{D}$ в выбранной точке v состоит лишь из нулевого элемента. При этом в последнем равенстве $\mu_0 = 0$, так как, благодаря «заглаженности» решений сопряженной задачи, $\overline{v} \notin \operatorname{Im} I^*$. Таким образом, можно утверждать, что $(\mu_0, \eta[y]) = 0$, что, в свою очередь, на основании инъективности оператора I^* влечет равенство $(\mu_0, y) = 0$. Таким образом показано, что управление $\overline{v}$, являющееся единственным допустимым, а значит, и оптимальным в задаче $(P_{q_{\overline{v}}})$, не удовлетворяет ПМП. Очевидно, при этом управления указанного вида лежат всюду плотно в $\mathcal{D}$, и, как следствие, всюду плотно в множестве всех q, для которых задача (P_q) разрешима, лежат точки вида $q_{\overline{v}}$, для которых оптимальные элементы в задачах $(P_{q_{\overline{v}}})$ не удовлетворяют ПМП.

Итак, в рассмотренном примере мы встречаемся с задачей, в которой оптимальный элемент не удовлетворяет ПМП, причем в «любой окрестности» задачи существуют другие «подобные» задачи, в каждой из которых имеет место то же самое обстоятельство. Конечно, непосредственное применение ПМП при практическом решении оптимизационных задач, в которых имеют место эффекты как из упомянутого выше примера в [2], так и примера 1, сопряжено с трудностями фундаментального характера. Однако ситуация принципиально меняется, если при практическом решении таких задач применять регуляризованные версии ПЛ и ПМП. В частности, в настоящей второй части статьи мы показываем посредством численного моделирования при решении задачи примера 1, как регуляризованный ПМП в итерационной форме позволяет устойчиво находить приближенные решения этой задачи и тогда, когда классический принцип максимума в ней выполняется, и тогда, когда это не так (последняя ситуация соответствует случаю неразрешимости двойственной задачи). Аналогичные результаты, связанные с применением регуляризованного ПЛ при решении неустойчивых операторных уравнений первого рода, были получены в работах [6–8].

§ 1. Постановка задачи

Пусть $U \subset \mathbb{R}^1$, $V \subset \mathbb{R}^1$, $W \subset \mathbb{R}^1$ — выпуклые компакты, Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $Q_T \equiv \Omega \times (0,T)$, $S \equiv \partial\Omega$, $S_T \equiv \{(x,t) : x \in S,\ t \in (0,T)\}$, $H \equiv L_2(\Omega)$, $\mathcal{D}_1 \equiv \{u \in L_2(Q_T) : u(x,t) \in U$ п. в. на $Q_T\}$, $\mathcal{D}_2 \equiv \{v \in L_2(\Omega) : v(x) \in V$ п. в. на $\Omega\}$, $\mathcal{D}_3 \equiv \{w \in L_2(S_T) : w(x,t) \in W$ п. в. на $S_T\}$, $\mathcal{D} \equiv \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2 \times \mathcal{D}_3 \subset L_2(Q_T) \times L_2(\Omega) \times L_2(S_T) \equiv \mathcal{H}$. Элементы (тройки управлений) гильбертова пространства $\mathcal{H}$ будем обозначать через $\pi \equiv (u, v, w)$.

Рассмотрим параметрическую задачу оптимального управления с фиксированным временем и с операторным полуфазовым ограничением типа равенства

$$(OC_q^\delta) \qquad \begin{gathered} f^\delta(\pi) \equiv \Big\langle A_1^\delta(\cdot,\cdot) z[\pi](\cdot,\cdot), z^\delta[\pi](\cdot,\cdot)\Big\rangle_{L_2(Q_T)} + \Big\langle A_2^\delta(\cdot) z^\delta[\pi](\cdot,T), z^\delta[\pi](\cdot,T)\Big\rangle_{L_2(\Omega)} + \\ + \Big\langle A_3^\delta(\cdot,\cdot) z^\delta[\pi](\cdot,\cdot), z^\delta[\pi](\cdot,\cdot)\Big\rangle_{L_2(S_T)} + \Big\langle B_1^\delta(\cdot,\cdot) u(\cdot,\cdot), u(\cdot,\cdot)\Big\rangle_{L_2(Q_T)} + \\ + \Big\langle B_2^\delta(\cdot) v(\cdot), v(\cdot)\Big\rangle_{L_2(\Omega)} + \Big\langle B_3^\delta(\cdot,\cdot) w(\cdot,\cdot), w(\cdot,\cdot)\Big\rangle_{L_2(S_T)} \to \inf, \\ g^\delta(\pi) \equiv z^\delta[\pi](\cdot,T) = h^\delta + q, \quad \pi \in \mathcal{D} \subset \mathcal{H}. \end{gathered}$$

Здесь $q \in H = L_2(\Omega)$ — параметр, $h^\delta \in H$ — заданная функция, $z^\delta[\pi]$ — соответствующее тройке управлений $\pi \equiv (u, v, w)$ слабое решение класса $V_2^{1,0}(Q_T)$ в смысле [3] третьей начально-краевой задачи для линейного параболического уравнения дивергентного вида:

$$\begin{gathered} z_t - \frac{\partial}{\partial x_i}\big(a_{i,j}(x,t) z_{x_j}\big) + b_i^\delta(x,t) z_{x_i} + a^\delta(x,t) z = u(x,t), \\ z(x,0) = v(x), \quad x \in \Omega, \qquad \frac{\partial z}{\partial \mathcal{N}} + \sigma^\delta(x,t) z = w(x,t), \quad (x,t) \in S_T, \end{gathered} \tag{1.1}$$

где, как и в [3], $\dfrac{\partial z(x,t)}{\partial \mathcal{N}} \equiv a_{i,j}(x,t) z_{x_j}(x,t) \cos\alpha_i(x,t)$, $\alpha_i(x,t)$ — угол, образованный внешней нормалью к S с осью x_i.

Верхний индекс δ в исходных данных задачи (OC_q^δ) означает, что эти данные либо соответствуют ситуации их точного задания ($\delta = 0$), либо являются возмущенными ($\delta > 0$), то есть задаются с ошибкой, $\delta \in [0, \delta_0]$, $\delta_0 > 0$ — некоторое фиксированное число.

Решение задачи с точными исходными данными (OC_q^0) (единственное), если оно существует (существует хотя бы одна допустимая тройка π, удовлетворяющая равенству $g^0(\pi) = h^0 + q$), будем обозначать через π_q^0.

Считаем, что выполняются следующие условия на исходные данные задачи (OC_q^δ):

а) функции $a_{i,j}, b_i^\delta, a^\delta : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^1$, $i,j = 1,\ldots,n$, $A_1^\delta : Q_T \to \mathbb{R}^1$, $A_2^\delta : \Omega \to \mathbb{R}^1$, $A_3^\delta : S_T \to \mathbb{R}^1$, $B_1^\delta : Q_T \to \mathbb{R}^1$, $B_2^\delta : \Omega \to \mathbb{R}^1$, $B_3^\delta : S_T \to \mathbb{R}^1$ являются измеримыми по Лебегу;

б) справедливы оценки

$$\nu|\xi|^2 \leqslant a_{i,j}(x,t)\xi_i\xi_j \leqslant \mu|\xi|^2 \quad \forall (x,t) \in Q_T, \quad \nu,\mu > 0,$$
$$|b_i^\delta(x,t)|,\ |a^\delta(x,t)| \leqslant K \text{ при п. в. } (x,t) \in Q_T, \quad |\sigma^\delta(x,t)| \leqslant K \text{ при п. в. } (x,t) \in S_T,$$

где $K > 0$ — некоторая не зависящая от δ постоянная;

в) выполняются оценки

$$0 \leqslant A_1^\delta(x,t) \leqslant L \text{ при п. в. } (x,t) \in Q_T,\ \ 0 \leqslant A_2^\delta(x) \leqslant L \text{ при п. в. } x \in \Omega,$$
$$0 \leqslant A_3^\delta(x,t) \leqslant L \text{ при п. в. } (x,t) \in S_T,\ \ \kappa < B_1^\delta(x,t) \leqslant L \text{ при п. в. } (x,t) \in Q_T,$$
$$\kappa < B_2^\delta(x) \leqslant L \text{ при п. в. } x \in \Omega,\ \ \kappa < B_3^\delta(x,t) \leqslant L \text{ при п. в. } (x,t) \in S_T,$$

где κ, L — некоторые положительные не зависящие от δ постоянные;

г) граница S является кусочно-гладкой.

Центральную роль при изучении задачи (OC_q^0), как и в [1], будет играть понятие минимизирующего приближенного решения в смысле Дж. Варги [9]. Напомним, что под минимизирующим приближенным решением в задаче (OC_q^0) понимается последовательность элементов $\pi^i \in \mathcal{D}$, $i = 1,2,\ldots$, такая, что $f^0(\pi^i) \leqslant \beta(q) + \delta^i$, $\pi^i \in \mathcal{D}_q^{0\epsilon^i}$, для некоторых последовательностей сходящихся к нулю неотрицательных чисел δ^i, ϵ^i, $i = 1,2,\ldots$, где

$$\mathcal{D}_q^{\delta\epsilon} \equiv \{\pi \in \mathcal{D} : \|g^\delta(\pi) - h^\delta - q\| \leqslant \epsilon\}, \quad \epsilon \geqslant 0,$$
$$\beta(q) \equiv \beta_{+0}(q) \equiv \lim_{\epsilon\to+0} \beta_\epsilon(q), \quad \beta_\epsilon(q) \equiv \inf_{\pi\in\mathcal{D}_q^{0\epsilon}} f(\pi), \quad \beta_\epsilon(q) \equiv +\infty, \text{ если } \mathcal{D}_q^{0\epsilon} = \varnothing.$$

Будем считать, что выполняются следующие оценки для отклонений возмущенных исходных данных от точных:

$$\begin{gathered}
\|b_i^\delta - b_i^0\|_{\infty,Q_T} \leqslant \delta, \qquad \|a^\delta - a^0\|_{\infty,Q_T} \leqslant \delta, \qquad \|\sigma^\delta - \sigma^0\|_{\infty,S_T} \leqslant \delta,\\
\|A_1^\delta - A_1^0\|_{\infty,Q_T} \leqslant \delta, \qquad |A_2^\delta - A_2^0|_{\infty,\Omega} \leqslant \delta, \qquad \|A_3^\delta - A_3^0\|_{\infty,S_T} \leqslant \delta,\\
\|B_1^\delta - B_1^0\|_{\infty,Q_T} \leqslant \delta, \qquad \|B_2^\delta - B_2^0\|_{\infty,\Omega} \leqslant \delta, \qquad \|B_3^\delta - B_3^0\|_{\infty,S_T} \leqslant \delta,\\
\|h^\delta - h^0\|_{2,\Omega} \leqslant \delta.
\end{gathered} \tag{1.2}$$

Задача (OC_q^δ) формально может быть записана как параметрическая задача выпуклого программирования:

$$(P_q^\delta) \qquad f^\delta(\pi) \to \inf, \quad g^\delta(\pi) = h^\delta + q, \quad \pi \in \mathcal{D} \subset \mathcal{H},$$

которая совпадает по форме с задачей выпуклого программирования с операторным ограничением типа равенства, рассмотренной в [1], и в которой $Z = \mathcal{H}$, $H = L_2(\Omega)$, $A^\delta : Z \to H$ — линейный ограниченный оператор, задаваемый равенством $A^\delta\pi = g^\delta(\pi) \equiv z^\delta[\pi](\cdot,T)$. Покажем далее, что ее исходные данные удовлетворяют всем условиям, необходимым для применения в этой задаче процедуры двойственной регуляризации работы [1] (см. также [2, 10–12]) и, как следствие, получения соответствующих регуляризованных форм ПЛ и ПМП [1] (см.

также [2, 10–12]). Получим с этой целью оценки отклонения возмущенных исходных данных ($\delta > 0$) задачи (P_q^δ) от невозмущенных ($\delta = 0$).

Для этого нам понадобится следующая лемма, доказательство которой проводится по аналогии с доказательствами соответствующих результатов работ [13, 14] (см. также теорему 8.1 в [3, гл. III]).

Лемма 1. *Для любой тройки $(u, v, w) \in \mathcal{H}$ при любом $T > 0$ и любом $\delta \in [0, \delta_0]$ исходная (прямая) задача (1.1) однозначно разрешима в $V_2^{1,0}(Q_T)$ и справедлива априорная оценка*

$$|z^\delta[\pi]|_{Q_T} + \|z^\delta[\pi]\|_{2,S_T} \leqslant C_T(\|u\|_{2,Q_T} + \|v\|_{2,\Omega} + \|w\|_{2,S_T}),$$

в которой постоянная C_T не зависит от δ и от тройки управляющих параметров $\pi \equiv \equiv (u, v, w) \in \mathcal{H}$. Для любых двух троек π^1, $\pi^2 \in \mathcal{D}$, и любого $\delta \in [0, \delta_0]$ справедлива оценка

$$|z^\delta[\pi^1] - z^0[\pi^2]|_{Q_T} + \|z^\delta[\pi^1] - z^0[\pi^2]\|_{2,S_T} \leqslant$$
$$\leqslant C_T^2\Bigg(\sum_{i=1}^n \|b_i^\delta(\cdot,\cdot) - b_i^0(\cdot,\cdot)\|_{\infty,Q_T} + \|a^\delta(\cdot,\cdot) - a^0(\cdot,\cdot)\|_{\infty,Q_T} + \tag{1.3}$$
$$+ \|u^1 - u^2\|_{2,Q_T} + \|v^1 - v^2\|_{2,\Omega} + \|w^1 - w^2\|_{2,S_T} + \|\sigma^\delta - \sigma^0\|_{\infty,S_T}\Bigg),$$

в которой постоянная C_T^2 не зависит от δ и от тройки управляющих параметров $\pi \equiv \equiv (u, v, w) \in \mathcal{D}$.

Кроме того, однозначно разрешима в $V_2^{1,0}(Q_T)$ для любых функций $\chi \in L_2(Q_T)$, $\psi \in L_2(\Omega)$, $\omega \in L_2(S_T)$ при любом $T > 0$ и любом $\delta \in [0, \delta_0]$ также и сопряженная задача

$$-\eta_t - \frac{\partial}{\partial x_j}\big(a_{i,j}(x,t)\eta_{x_i} + b_j^\delta(x,t)\eta\big) + a^\delta(x,t)\eta = \chi(x,t),$$
$$\eta(x,T) = \psi(x), \quad x \in \Omega, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial \mathcal{N}} + \sigma^\delta(x,t)\eta = \omega(x,t), \quad (x,t) \in S_T,$$

для решения $\eta^\delta[\chi, \psi, \omega]$ которой справедлива оценка

$$|\eta^\delta[\chi,\psi,\omega]|_{Q_T} + \|\eta^\delta[\chi,\psi,\omega]\|_{2,S_T} \leqslant C_T^1(\|\chi\|_{2,Q_T} + \|\psi\|_{2,\Omega} + \|\omega\|_{2,S_T})$$

с не зависящей от δ и от тройки $(\chi, \psi, \omega) \in \mathcal{H}$ постоянной C_T^1.

Из оценки (1.3) леммы 1 следует, что оператор $g^\delta : \mathcal{H} \to L_2(\Omega) = H$, задаваемый равенством $g^\delta(\pi) \equiv z^\delta[\pi](\cdot, T)$, является линейным ограниченным оператором. Кроме того, в силу оценки (1.3) леммы 1 можно записать и оценку

$$|z^\delta[\pi] - z^0[\pi]|_{Q_T} + \|z^\delta[\pi] - z^0[\pi]\|_{2,Q_T} \leqslant C\delta \quad \forall \pi \in \mathcal{D} \tag{1.4}$$

с не зависящей от $\pi \in \mathcal{D}$ и от δ постоянной $C > 0$. Тогда оценки (1.2) в совокупности с оценкой (1.4) дают следующие оценки отклонений возмущенных исходных данных от невозмущенных в задаче выпуклого программирования (P_q^δ):

$$|f^\delta(\pi) - f^0(\pi)| \leqslant C\delta \quad \forall \pi \in \mathcal{D},$$
$$\|A^\delta \pi - A^0 \pi\| = \|g^\delta(\pi) - g^0(\pi)\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C_1\delta(1 + \|\pi\|) \quad \forall \pi \in \mathcal{H},$$

где постоянные C, $C_1 > 0$ не зависят от $\pi \in \mathcal{H}$ и от $\delta \in [0, \delta_0]$. Более того, на самом деле для отклонения оператора, задающего ограничение-равенство справедлива более сильная оценка:

$$\|g^\delta(\pi) - g^0(\pi)\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C\delta \quad \forall \pi \in \mathcal{H},$$

и, значит, $\|g^\delta - g^0\| \leqslant C\delta$. Итак, искомые оценки отклонения возмущенных исходных данных ($\delta > 0$) задачи выпуклого программирования (P_q^δ) от невозмущенных ($\delta = 0$) получены.

Таким образом, исходная задача оптимального управления (OC_q^δ) записана в форме задачи выпуклого программирования (P_q^δ), для которой получены нужные оценки отклонения возмущенных исходных данных от невозмущенных.

Определим функционал Лагранжа задачи (P_q^δ):

$$L_q^\delta(\pi,\lambda) \equiv f^\delta(\pi) + \left\langle \lambda, g^\delta[\pi] - (h^\delta + q) \right\rangle, \quad \pi \in \mathcal{D},\ \lambda \in H,$$

и двойственную задачу:

$$V_q^\delta(\lambda) \to \sup, \quad \lambda \in H, \quad V_q^\delta(\lambda) \equiv \min_{\pi\in\mathcal{D}} L_q^\delta(\pi,\lambda).$$

Заметим сразу, что операция min в определении целевой функции двойственной задачи законна, так как функционал L_q^δ является сильно выпуклым на выпуклом замкнутом множестве $\mathcal{D}$ гильбертова пространства $\mathcal{H}$. При этом минимум достигается для каждых $\delta \geqslant 0$, $\lambda \in H$ в единственной точке $\pi^\delta[\lambda] \in \mathcal{D}$.

§ 2. Регуляризованные принципы Лагранжа в задаче оптимального управления параболическим уравнением

В данном параграфе мы сформулируем устойчивые секвенциальные, или, другими словами, регуляризованные, ПЛ в задаче оптимального управления (OC_q^0), являющиеся следствиями соответствующих результатов первой части работы [1]. В свою очередь, в следующем параграфе следствием регуляризованного ПЛ в итерационной форме будет являться соответственно регуляризованный ПМП в итерационной форме в задаче (OC_q^0).

Прежде чем сформулировать указанные результаты, заметим, что благодаря специфике задачи (OC_q^δ) и целевого функционала f^δ (он является выпуклым и квадратичным) легко показать его дифференцируемость по Фреше для любой точки $\pi \in \mathcal{H} = Z$. Это обстоятельство, как можно показать, обеспечивает сильную сходимость в метрике $\mathcal{H}$ любого минимизирующего приближенного решения задачи (OC_q^0) к ее оптимальной тройке π_q^0.

Следствием теоремы 5 в [1] является следующая

Теорема 1 (регуляризованный принцип Лагранжа в задаче оптимального управления). *Пусть δ^k, $k = 1,2,\ldots,$ — произвольная последовательность сходящихся к нулю положительных чисел, $\alpha(\delta^k)$, $k = 1,2,\ldots,$ — последовательность сходящихся к нулю положительных чисел такая, что $\delta^k/\alpha(\delta^k) \to 0$. Тогда для того, чтобы в задаче (P_q^0) существовало минимизирующее приближенное решение (и, следовательно, сильно сходилось к π_q^0), необходимо, чтобы существовала последовательность двойственных переменных $\lambda^k \in H$, $k = 1,2,\ldots,$ такая, что $\delta^k\|\lambda^k\| \to 0$, $k \to \infty$, и выполнялись соотношения*

$$\pi^{\delta^k}[\lambda^k] \in \mathcal{D}_q^{\delta^k\epsilon^k}, \quad \epsilon^k \to 0, \quad \left\langle \lambda^k, g^{\delta^k}(\pi^{\delta^k}[\lambda^k]) - (h^{\delta^k} + q) \right\rangle \to 0, \quad k \to \infty. \tag{2.1}$$

Последовательность $\pi^{\delta_k}[\lambda^k]$, $k = 1,2,\ldots,$ является искомым минимизирующим приближенным решением в задаче (P_q^0), и имеет место сходимость $\pi^{\delta^k}[\lambda^k] \to \pi_q^0$, $k \to \infty$. Одновременно имеет место и предельное соотношение

$$V_q^0(\lambda^k) \to \sup_{\lambda\in H} V_q^0(\lambda). \tag{2.2}$$

В качестве последовательности $\lambda^k \in H$, $k = 1,2,\ldots,$ может быть взята последовательность $\lambda_q^{\delta^k,\alpha(\delta^k)}$, $k = 1,2,\ldots,$ где $\lambda_q^{\delta,\alpha}$ — единственная в H точка максимума функционала $R_q^{\delta,\alpha}(\lambda) \equiv V_q^\delta(\lambda) - \alpha\|\lambda\|^2$.

Обратно, для существования минимизирующего приближенного решения в задаче (P_q^0) достаточно, чтобы существовала последовательность двойственных переменных $\lambda^k \in H$, $k = 1,2,\ldots,$ такая, что $\delta^k\|\lambda^k\| \to 0$, $k \to \infty$, и выполнялись предельные соотношения (2.1).

Более того, эта последовательность является искомым минимизирующим приближенным решением в задаче (P_q^0), *и имеет место сходимость* $\pi^{\delta^k}[\lambda^k] \to \pi_q^0$, $k \to \infty$. *Одновременно выполняется и предельное соотношение* (2.2), *а каждая слабая предельная точка последовательности* $\lambda^k \in H$, $k = 1, 2, \ldots$, *является точкой максимума в двойственной задаче* $V_q^0(\lambda) \to \max$, $\lambda \in H$.

Следствием теоремы 6 в [1] является следующая

Теорема 2 (регуляризованный принцип Лагранжа в итерационной форме в задаче оптимального управления). *Пусть* δ^k, $k = 1, 2, \ldots$, *— произвольная последовательность сходящихся к нулю положительных чисел. Для того чтобы в задаче* (P_q^0) *существовало минимизирующее приближенное решение, необходимо, чтобы для последовательности двойственных переменных* $\overline{\lambda}^k \in H$, $k = 1, 2, \ldots$, *порождаемой итерационным процессом*

$$\overline{\lambda}^{k+1} = \overline{\lambda}^k + \beta^k \partial V_q^{\delta^k}(\overline{\lambda}^k) - 2\beta^k \alpha^k \overline{\lambda}^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad \overline{\lambda}^0 \in H, \tag{2.3}$$

$$\partial V_q^{\delta}(\lambda) = g^{\delta}(\pi^{\delta}[\lambda]) - (h^{\delta} + q) \equiv z^{\delta}[\pi^{\delta}[\lambda]](\cdot, T) - (h^{\delta} + q)$$

с условиями согласования

$$\begin{gathered}\delta^k \geqslant 0, \ \alpha^k > 0, \ \beta^k > 0, \ \lim_{k\to\infty} (\delta^k + \alpha^k + \beta^k) = 0, \\ \frac{\alpha^k}{\alpha^{k+1}} \leqslant C_0, \ \frac{|\alpha^{k+1} - \alpha^k|}{(\alpha^k)^3 \beta^k} \to 0, \ \frac{\beta^k}{(\alpha^k)^3} \to 0, \ \frac{\delta^k}{(\alpha^k)^6} \to 0, \ \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k \beta^k = +\infty,\end{gathered} \tag{2.4}$$

выполнялись предельные соотношения

$$\pi^{\delta^k}[\overline{\lambda}^k] \in \mathcal{D}_q^{\delta^k \epsilon^k}, \quad \epsilon^k \to 0, \quad \left\langle \overline{\lambda}^k, g^{\delta^k}(\pi^{\delta^k}[\overline{\lambda}^k]) - (h^{\delta^k} + q) \right\rangle \to 0, \quad k \to \infty. \tag{2.5}$$

В этом случае последовательность $\pi^{\delta^k}[\overline{\lambda}^k]$, $k = 1, 2, \ldots$, *представляет собой искомое минимизирующее приближенное решение в задаче* (P_q^0), *и имеет место сходимость* $\pi^{\delta^k}[\overline{\lambda}^k] \to \pi_q^0$, $k \to \infty$. *Одновременно выполняется и предельное соотношение*

$$V_q^0(\overline{\lambda}^k) \to \sup_{\lambda \in H} V_q^0(\lambda). \tag{2.6}$$

Обратно, для того, чтобы в задаче (P_q^0) *существовало минимизирующее приближенное решение, достаточно, чтобы для последовательности двойственных переменных* $\overline{\lambda}^k \in H$, $k = 1, 2, \ldots$, *порождаемой итерационным процессом* (2.3) *с условиями согласования* (2.4), *выполнялись предельные соотношения* (2.5). *В этом случае последовательность* $\pi^{\delta^k}[\overline{\lambda}^k]$, $k = 1, 2, \ldots$, *является искомым минимизирующим приближенным решением в задаче* (P_q^0), *и имеет место сходимость* $\pi^{\delta^k}[\overline{\lambda}^k] \to \pi_q^0$, $k \to \infty$. *Одновременно является справедливым и предельное соотношение* (2.6).

Пусть последовательности чисел δ^k, α^k, β^k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, удовлетворяют условиям (2.4). Зафиксируем следующее правило останова процесса:

$$\overline{\lambda}^{k+1} = \overline{\lambda}^k + \beta^k \partial V_q^{\delta}(\overline{\lambda}^k) - 2\beta^k \alpha^k \overline{\lambda}^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad \overline{\lambda}^0 \in H, \tag{2.7}$$

где $\overline{\lambda}^0 \in H$, при фиксированном конечном уровне погрешности $\delta > 0$, $\delta \leqslant \delta^1$. При каждом $\delta > 0$ итерации продолжаются до такого наибольшего номера $k = k(\delta)$, при котором выполняются неравенства $\delta^i \geqslant \delta$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

В этом случае следствием теоремы 4 в [1] является следующая

Теорема 3 (правило останова итерационного процесса регуляризованного принципа Лагранжа в итерационной форме). *В случае задания исходных данных с ошибкой фиксированного конечного уровня $\delta > 0$ в качестве приближенного решения задачи (OC_q^0) может быть взят элемент $\pi^\delta[\overline{\lambda}^{k(\delta)}]$, где $\overline{\lambda}^{k(\delta)}$ — результат $k(\delta)$ итераций итерационного процесса (2.7). В этом случае имеют место предельные соотношения*

$$\pi^\delta[\overline{\lambda}^{k(\delta)}] \to \pi_q^0, \quad V_q^0(\overline{\lambda}^{k(\delta)}) \to \sup_{\lambda \in H} V_q^0(\lambda), \quad \delta \to 0.$$

§ 3. Регуляризованный принцип максимума Понтрягина в итерационной форме в задаче оптимального управления для параболического уравнения

В данном параграфе мы перейдем от регуляризованного ПЛ в итерационной форме теоремы 2 к регуляризованному ПМП в итерационной форме. Для этого запишем ПМП в простейшей задаче оптимального управления с сильно выпуклым функционалом Лагранжа:

$$\begin{gathered} L^\delta(\pi,\lambda) \equiv f^\delta(\pi) + \Big\langle \lambda, z^\delta[\pi](\cdot,T) - (h^\delta + q)\Big\rangle \equiv \Big\langle A_1^\delta(\cdot,\cdot) z^\delta[\pi](\cdot,\cdot), z^\delta[\pi](\cdot,\cdot)\Big\rangle_{L_2(Q_T)} + \\ + \Big\langle A_2^\delta(\cdot) z^\delta[\pi](\cdot,T), z^\delta[\pi](\cdot,T)\Big\rangle_{L_2(\Omega)} + \Big\langle A_3^\delta(\cdot,\cdot) z^\delta[\pi](\cdot,\cdot), z^\delta[\pi](\cdot,\cdot)\Big\rangle_{L_2(S_T)} + \\ + \Big\langle B_1^\delta(\cdot,\cdot) u(\cdot,\cdot), u(\cdot,\cdot)\Big\rangle_{L_2(Q_T)} + \Big\langle B_2^\delta(\cdot) v(\cdot), v(\cdot)\Big\rangle_{L_2(\Omega)} + \Big\langle B_3^\delta(\cdot,\cdot) w(\cdot,\cdot), w(\cdot,\cdot)\Big\rangle_{L_2(S_T)} + \\ + \Big\langle \lambda, z^\delta[\pi](\cdot,T) - (h^\delta+q)\Big\rangle_{L_2(\Omega)} \to \min, \quad \pi \in \mathcal{D}, \end{gathered} \tag{3.1}$$

при произвольном $\lambda \in H$. Очевидно, в силу выпуклости задачи (3.1) приводимый ниже ПМП для нее будет являться критерием оптимальности.

Введем стандартные обозначения:

$$H_u^\delta(x,t,u,\eta) \equiv \eta u - B_1^\delta(x,t)u^2, \quad H_v^\delta(x,v,\eta) \equiv \eta v - B_2^\delta(x)v^2, \quad H_w^\delta(x,t,w,\eta) \equiv \eta w - B_3^\delta(x,t)w^2.$$

Лемма 2. *Тройка $\pi^\delta[\lambda]$ при $\lambda \in H$, доставляющая минимальное значение в задаче (3.1), удовлетворяет принципу максимума Понтрягина, то есть удовлетворяет при $\pi \equiv (u,v,w) = \pi^\delta[\lambda] \equiv (u^\delta[\lambda], v^\delta[\lambda], w^\delta[\lambda])$ соотношениям максимума*

$$\begin{gathered} \max_{r \in U} H_u^\delta(x,t,r,\eta^\delta[\pi](x,t)) = H_u(x,t,u(x,t),\eta^\delta[\pi](x,t)) \ \text{ при п. в. } (x,t) \in Q_T, \\ \max_{r \in V} H_v^\delta(x,r,\eta^\delta[\pi](x,0)) = H_v(x,v(x),\eta^\delta[\pi](x,0)) \ \text{ при п. в. } x \in \Omega, \\ \max_{r \in \mathcal{D}_3} \int_{S_T} \nabla_w H_w^\delta(s,t,w(s,t),\eta^\delta[\pi](s,t)) r(s,t)\, ds\, dt = \\ = \int_{S_T} \nabla_w H_w^\delta(s,t,w(s,t),\eta^\delta[\pi](s,t)) w(s,t)\, ds\, dt, \end{gathered} \tag{3.2}$$

где $\eta^\delta[\pi] \in V_2^{1,0}(Q_T)$ — решение сопряженной задачи (см. лемму 1)

$$\begin{gathered} -\eta_t - \frac{\partial}{\partial x_j}\big(a_{i,j}(x,t)\eta_{x_i} + b_j^\delta(x,t)\eta\big) + a^\delta(x,t)\eta = 2A_1^\delta(x,t) z^\delta[\pi](x,t), \\ \eta(x,T) = 2A_2^\delta(x) z^\delta[\pi](x,T) + \lambda(x), \quad x \in \Omega, \\ \frac{\partial \eta}{\partial \mathcal{N}} + \sigma^\delta(x,t)\eta = 2A_3^\delta(x,t) z^\delta[\pi](x,t), \quad (x,t) \in S_T \end{gathered} \tag{3.3}$$

при $\pi = \pi^\delta[\lambda]$. И наоборот, очевидно, в силу выпуклости задачи (OC_q^0) любой элемент $\pi \in \mathcal{D}$, удовлетворяющий вместе с некоторыми $\lambda \in \mathcal{H}$ соотношениям (3.2), (3.3), доставляет минимум в задаче (3.1).

Доказательство этой теоремы можно найти в [15] (см. также [16]).

Обозначим через $\pi^\delta_{\max}[\lambda]$ тройку, удовлетворяющую ПМП леммы 2. Очевидно, $\pi^\delta_{\max}[\lambda] = \pi^\delta[\lambda]$. Объединение результатов теоремы 1 и леммы 2 с учетом введенного обозначения приводит нас к следующему утверждению.

Теорема 4 (регуляризованный принцип максимума Понтрягина). *Для того чтобы в задаче* (OC^0_q) *существовало минимизирующее приближенное решение, необходимо, чтобы существовала последовательность двойственных переменных* $\lambda^k \in H$, $k = 1, 2, \ldots$, *такая, что* $\delta^k\|\lambda^k\| \to 0$, $k \to \infty$, *и выполнялись соотношения*

$$\pi^{\delta^k}_{\max}[\lambda^k] \in \mathcal{D}^{\delta^k\epsilon^k}_q, \quad \epsilon^k \to 0, \quad \left\langle \lambda^k, g^{\delta^k}(\pi^{\delta^k}_{\max}[\lambda^k]) - (h^{\delta^k} + q) \right\rangle \to 0, \quad k \to \infty. \tag{3.4}$$

В этом случае последовательность $\pi^{\delta^k}_{\max}[\lambda^k]$, $k = 1, 2, \ldots$, *представляет собой искомое минимизирующее приближенное решение в задаче* (OC^0_q), *и имеет место сходимость* $\pi^{\delta^k}[\lambda^k] \to \pi^0_q$, $k \to \infty$. *Одновременно выполняется и предельное соотношение* (2.2).

Обратно, для того, чтобы в задаче (OC^0_q) *существовало минимизирующее приближенное решение, достаточно, чтобы для последовательности двойственных переменных* $\lambda^k \in H$, $k = 1, 2, \ldots$, *такой, что* $\delta^k\|\lambda^k\| \to 0$, $k \to \infty$, *выполнялись предельные соотношения* (3.4). *В этом случае последовательность* $\pi^{\delta^k}_{\max}[\lambda^k]$, $k = 1, 2, \ldots$, *является искомым минимизирующим приближенным решением в задаче* (OC^0_q), *и имеет место сходимость* $\pi^{\delta^k}_{\max}[\lambda^k] \to \pi^0_q$, $k \to \infty$. *Одновременно выполняется и предельное соотношение* (2.2), *а каждая слабая предельная точка последовательности* $\lambda^k \in H$, $k = 1, 2, \ldots$, *является точкой максимума в двойственной задаче* $V^0_q(\lambda) \to \max$, $\lambda \in H$.

В качестве последовательности $\lambda^k \in H$, $k = 1, 2, \ldots$, *может быть взята последовательность* $\lambda^{\delta^k, \alpha(\delta^k)}$, $k = 1, 2, \ldots$, *где* $\lambda^{\delta,\alpha}$ — *единственная в* H *точка максимума функционала* $R^{\delta,\alpha}_q(\lambda) \equiv V^\delta_q(\lambda) - \alpha\|\lambda\|^2$.

В свою очередь, с учетом леммы 2 утверждение теоремы 2 может быть переписано в форме регуляризованного ПМП в итерационной форме.

Теорема 5 (регуляризованный итерационный принцип максимума Понтрягина). *Для того чтобы в задаче* (OC^0_q) *существовало минимизирующее приближенное решение, необходимо, чтобы для последовательности двойственных переменных* $\overline{\lambda}^k \in H$, $k = 1, 2, \ldots$, *порождаемой итерационным процессом*

$$\overline{\lambda}^{k+1} = \overline{\lambda}^k + \beta^k\left(g^{\delta_k}(\pi^{\delta_k}_{\max}[\overline{\lambda}^k]) - (h^{\delta_k} + q)\right) - 2\beta^k\alpha^k\overline{\lambda}^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad \overline{\lambda}^0 \in H, \tag{3.5}$$

с условиями согласования (2.4), *выполнялись соотношения*

$$\pi^{\delta^k}_{\max}[\overline{\lambda}^k] \in \mathcal{D}^{\delta^k\epsilon^k}_q, \quad \epsilon^k \to 0, \quad \left\langle \overline{\lambda}^k, g^{\delta^k}(\pi^{\delta^k}_{\max}[\overline{\lambda}^k]) - (h^{\delta^k} + q) \right\rangle \to 0, \quad k \to \infty. \tag{3.6}$$

В этом случае последовательность $\pi^{\delta^k}_{\max}[\overline{\lambda}^k]$, $k = 1, 2, \ldots$, *представляет собой искомое минимизирующее приближенное решение в задаче* (OC^0_q), *и имеет место сходимость* $\pi^{\delta^k}_{\max}[\overline{\lambda}^k] \to \pi^0_q$, $k \to \infty$. *Одновременно выполняется и предельное соотношение* (2.6).

Обратно, для того, чтобы в задаче (OC^0_q) *существовало минимизирующее приближенное решение, достаточно, чтобы для последовательности двойственных переменных* $\overline{\lambda}^k \in H$, $k = 1, 2, \ldots$, *порождаемой итерационным процессом* (3.5) *с условиями согласования* (2.4), *выполнялись предельные соотношения* (3.6). *В этом случае последовательность* $\pi^{\delta^k}_{\max}[\overline{\lambda}^k]$, $k = 1, 2, \ldots$, *является искомым минимизирующим приближенным решением в задаче* (OC^0_q), *и имеет место сходимость* $\pi^{\delta^k}_{\max}[\overline{\lambda}^k] \to \pi^0_q$, $k \to \infty$. *Одновременно является справедливым и предельное соотношение* (2.6).

Существенной особенностью регуляризованного итерационного ПМП теоремы 5, является то, что он, как и регуляризованный ПЛ теоремы 2, предполагает что величина δ^k, характеризующая ошибку исходных данных, стремится к нулю при $k \to \infty$. Однако, как и теорема 2, теорема 5 снабжается соответствующим регуляризирующим правилом останова итерационного процесса практически дословно совпадающим с правилом останова, сформулированным после теоремы 2 (см. теорему 3). Оно может быть использовано при практическом решении неустойчивых задач на основе устойчивого итерационного ПМП теоремы 5, так как является устойчивым алгоритмом построения минимизирующих приближенных решений в задаче (OC_q^0).

Пусть последовательности чисел δ^k, α^k, β^k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, удовлетворяют условиям (2.4). Зафиксируем следующее правило останова процесса

$$\overline{\lambda}^{k+1} = \overline{\lambda}^k + \beta^k \left(g^{\delta_k}(\pi^\delta_{\max}[\overline{\lambda}^k]) - (h^\delta + q) \right) - 2\beta^k\alpha^k\overline{\lambda}^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3.7}$$

где $\overline{\lambda}^0 \in H$, при фиксированном конечном уровне погрешности $\delta > 0$, $\delta \leqslant \delta^1$. При каждом $\delta > 0$ итерации продолжаются до такого наибольшего номера $k = k(\delta)$, при котором выполняются неравенства $\delta^i \geqslant \delta$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

В этом случае следствием теоремы 4 в [1] является следующая

Теорема 6 (правило останова итерационного процесса регуляризованного принципа Лагранжа в итерационной форме). *В случае задания исходных данных с ошибкой фиксированного конечного уровня $\delta > 0$ в качестве приближенного решения задачи (OC_q^0) может быть взят элемент $\pi^\delta[\overline{\lambda}^{k(\delta)}]$, где $\overline{\lambda}^{k(\delta)}$ — результат $k(\delta)$ итераций итерационного процесса (3.7). В этом случае имеют место предельные соотношения*

$$\pi^\delta_{\max}[\overline{\lambda}^{k(\delta)}] \to \pi_q^0, \quad V_q^0(\overline{\lambda}^{k(\delta)}) \to \sup_{\lambda \in H} V_q^0(\lambda), \quad \delta \to 0.$$

§ 4. Применение регуляризованного итерационного принципа максимума Понтрягина для решения обратной задачи финального наблюдения

Проиллюстрируем возможности алгоритма устойчивого итерационного ПМП, сформулированного в теореме 5, на примере решения задачи оптимального управления с полуфазовым ограничением в финальный момент времени:

$$(OC^\delta) \qquad \|v\|^2 \to \min, \quad z[v](\cdot, T) = h^\delta, \quad v \in \mathcal{D},$$

по нахождению начального условия в третьей краевой задаче для пространственно-одномерного уравнения теплопроводности

$$\begin{gathered} z_t(x,t) - a z_{xx}(x,t) = 0, \quad z(x,0) = v(x), \quad v \in \mathcal{D}, \quad x \in (0,L), \quad t \in (0,T), \\ z_x(0,t) - z(0,t) = 0, \quad z_x(L,t) + z(L,t) = 0, \quad t \in (0,T). \end{gathered} \tag{4.1}$$

Считаем при этом, что справедлива оценка $\|h^\delta - h^0\| \leqslant \delta$, где $h^0 = z[v^0](\cdot, T)$ — точное значение правой части уравнения в задаче (OC^δ), v^0 — точное (искомое) решение задачи (OC^δ) с точной правой частью h^0 в уравнении, h^δ — возмущенная правая часть уравнения в задаче (OC^δ) (результат наблюдения (измерения) точной правой части h^0). Таким образом, $\delta \in [0, \delta_0]$ — величина, характеризующая уровень задания ошибки финального наблюдения, $\delta_0 > 0$ — некоторое число.

Задача (4.1) рассматривалась при значениях параметров $L = 1$, $T = 1$, $a = 0{,}001$ с допустимым множеством $\mathcal{D} \equiv \{u \in L_2(0,L) : u(x) \in [v_1, v_2]$ п. в. на $(0,L)\}$, где $v_1 = -3$, $v_2 = 3$. Последовательности в итерационной формуле (3.5) α^k, β^k, δ^k, удовлетворяющие условиям согласования (2.4), выбирались в виде

$$\alpha_k = \alpha_0 k^{-1/15}, \quad \beta_k = \beta_0 k^{-9/10}, \quad \delta_k = \delta_0 k^{\delta_p}, \tag{4.2}$$

где константы α_0, β_0, δ_0 не влияют на асимптотику условий согласования, но важны при практическом применении итерационного ПМП в численных экспериментах. Их значения были подобраны экспериментально, чтобы сходимость была «достаточно быстрой».

Демонстрационные численные эксперименты проводились по так называемой замкнутой схеме. Поясним этот термин на примере задачи (4.1). Прежде всего, выбирается и фиксируется некоторый элемент — «точное решение» $v^0 \in Z = \mathcal{H} \equiv L_2(0,L)$ в пространстве решений. Затем решается задача (4.1) с начальным условием $v \equiv v^0$ и вычисляется ее точное решение в финальный момент времени $h^0 = z[v^0](\cdot,T)$ (точная правая часть). Далее точная правая часть возмущается в соответствии с оценкой $\|h^\delta - h^0\| \leqslant \delta$ и для приближенного решения задачи (OC^δ) с приближенно известным финальным наблюдением h^δ применяется регуляризованный итерационный ПМП с условием останова теоремы 6. Полученное приближенное решение $v^\delta[\lambda^{k(\delta)}]$ задачи (OC^δ) сравнивается с исходным точным решением (начальным условием) v^0. Так происходит процесс численного моделирования и обеспечивается исследование поведения описанных выше алгоритмов теорем 5 и 6. В случае реального численного эксперимента функция h^δ представляет собой реальное измерение решения краевой задачи в финальный момент времени.

Будем обозначать k-й член последовательности (3.5) в численном эксперименте по замкнутой схеме с точным решением v^0 как $\overline{\lambda}^k\{v^0\}$.

Основные цели указанных численных экспериментов следующие:

1) демонстрация принципиальной возможности приближенного решения неустойчивых задач вида (OC^0) на основе алгоритма регуляризованного итерационного ПМП;

2) демонстрация того факта, что алгоритм регуляризованного итерационного ПМП теоремы 5 для задачи оптимального управления (OC^δ) эффективно работает без каких-либо априорных предположений о выполнимости (или невыполнимости) классического ПМП в точной задаче, о существовании решения двойственной к (OC^0) задачи; последним обстоятельством этот алгоритм принципиально отличается от классического алгоритма Удзавы [17, 18];

3) демонстрация того факта, что алгоритм теоремы 5 теряет устойчивость в отсутствие регуляризирующего «рычага» в виде стабилизирующего слагаемого в двойственной задаче; в этом случае будем обозначать k-й член последовательности (3.5) при всех $\alpha_k \equiv 0$, $k = 1,2,\ldots$, в численном эксперименте по замкнутой схеме с точным решением v^0 как $\widetilde{\lambda}^k\{v^0\}$.

Для конечно-разностной аппроксимации уравнения теплопроводности (4.1) использовался метод Кранка–Николсон [19], имеющий второй порядок точности по пространственной переменной. При этом использовались сеточные функции на равномерных сетках с одинаковым числом точек разбиения по переменным x и t. Значения сеточных функций равны значениям соответствующих функций в узлах сетки. Будем обозначать сеточную функцию, соответствующую решению уравнения z, через $\widehat{z}$. В качестве сеточных аналогов норм в пространствах L_2, C и W_2^1 использовались следующие:

$$\|\widehat{z}\|_{L_2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \xi z_i^2}, \quad \|\widehat{z}\|_C = \max_{i=1,\ldots,n} |z_i|, \quad \|\widehat{z}\|_{W_2^1} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \xi z_i^2 + \sum_{i=2}^{n} (z_i - z_{i-1})^2/\xi}, \quad \xi = \frac{L}{n-1},$$

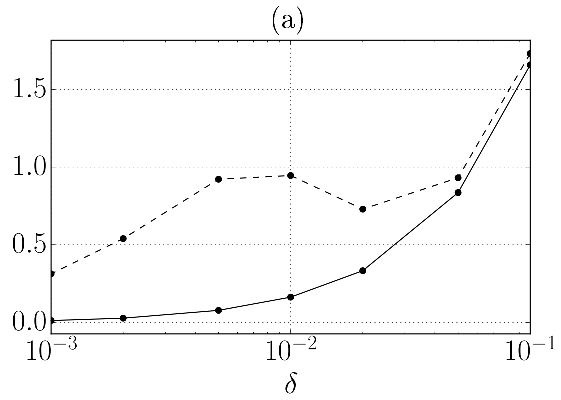
где n — число точек разбиения на отрезке $[0,L]$, ξ — шаг равномерной сетки, z_i — значения сеточной функции в узлах сетки.

Ошибка в пространстве сеточных приближений задавалась следующим образом. В численном эксперименте с точной начальной функцией v^0 бралась функция $\widehat{t}^0 \equiv \sin^2(10{,}5\pi x)$, вычислялась ее норма $\|\widehat{t}^0\|$, а также «собственно погрешность» по формуле $\widehat{t}^\delta = \delta\left(\widehat{t}^0/\|\widehat{t}^0\|\right)$.

В первой серии экспериментов в качестве точного решения была использована гладкая функция $v_1^0 = \sin^2(2\pi x)$. Параметры последовательностей (4.2) были взяты следующими: $\alpha_0 = 0{,}01$, $\beta_0 = 1000$, $\delta_0 = 1$, $\delta_p = -0{,}6$. Задача решалась на равномерной сетке с количеством узлов 481 по переменным x и t. Оценивались нормы разности между численным решением и точным начальным условием $\overline{\Delta}_P^k \equiv \|\widehat{v}_1^0 - \widehat{v}[\overline{\lambda}^k\{v_1^0\}]\|_P$ и $\widetilde{\Delta}_P^k \equiv \|\widehat{v}_1^0 - \widehat{v}[\widetilde{\lambda}^k\{v_1^0\}]\|_P$, где $P \in \{L_2, C, W_2^1\}$. Результаты представлены в таблице 1 и на рис. 1, 2, 3. На рис. 2, *a* и 3, *a*

Таблица 1. Результаты расчетов для v_1^0

№	δ	$k(\delta)$	$\bar{\Delta}_{L_2}^{k(\delta)}$	$\widetilde{\Delta}_{L_2}^{k(\delta)}$	$\bar{\Delta}_{C}^{k(\delta)}$	$\widetilde{\Delta}_{C}^{k(\delta)}$	$\bar{\Delta}_{W_2^1}^{k(\delta)}$	$\widetilde{\Delta}_{W_2^1}^{k(\delta)}$
1	0,1	46	1,6578	1,7309	1,9176	2,0583	11,1798	15,1045
2	0,05	147	0,8356	0,9311	1,0651	1,3826	10,5784	23,8258
3	0,02	678	0,3327	0,7291	0,4540	1,2655	5,5076	42,4051
4	0,01	2154	0,1626	0,9456	0,2325	1,4985	2,9908	61,3046
5	0,005	6839	0,0775	0,9215	0,1190	1,3899	1,6142	60,4905
6	0,002	31498	0,0272	0,5394	0,0493	0,7960	0,7148	35,4890
7	0,001	100000	0,0119	0,3125	0,0254	0,4602	0,3871	20,5746



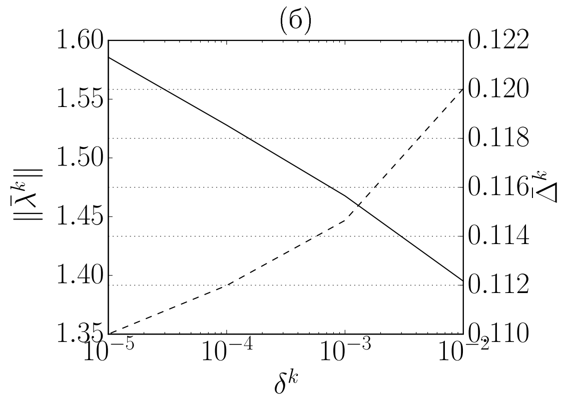


Рис. 1. а) Зависимость $\overline{\Delta}_{L_2}^{k(\delta)}$ (сплошная линия) и $\widetilde{\Delta}_{L_2}^{k(\delta)}$ (штриховая) от уровня ошибки δ;
б) зависимость $\|\overline{\lambda}^k\|$ (сплошная линия) и $\overline{\Delta}_{L_2}^k$ (штриховая) от ошибки δ_k

штриховой линией показано точное начальное условие задачи v_1^0, а сплошной — найденное приближенное решение задачи оптимального управления. Можно видеть, что приближенные решения в первой серии численных экспериментов устойчиво «тяготеют» к точным решениям. В то же время, в отсутствие регуляризирующего «рычага», норма разности точного и приближенного решений устойчиво растет во всех трех случаях: $P = L_2$, C, W_2^1, несмотря на повышение точности наблюдения.

Таблица 2. Результаты расчетов для v_b^0

№	δ_k	k	$\|\overline{\lambda}^k\|_{L_2}$	$\overline{\Delta}_{L_2}^k$
1	10^{-2}	65	1,3951	0,1200
2	10^{-3}	533	1,4677	0,1146
3	10^{-4}	4328	1,5279	0,1120
4	10^{-5}	35111	1,5857	0,1100

Для демонстрации работы алгоритма теоремы 5 в случае невыполнимости классического ПМП в точной ($\delta = 0$) оптимизационной задаче (OC^δ) в соответствии с анализом примера 1 была взята разрывная функция $v_b^0 = \{1,\ 0{,}3 \leqslant s \leqslant 0{,}7;\ \ 0,\ \ s < 0{,}3,\ s > 0{,}7\}$. Как показано в работе [16], в этом случае соответствующая двойственная задача не имеет решения в $L_2(0, L)$. В качестве параметров последовательностей (4.2) использовались величины $\alpha_0 = 10^{-6}$, $\beta_0 = 10$,

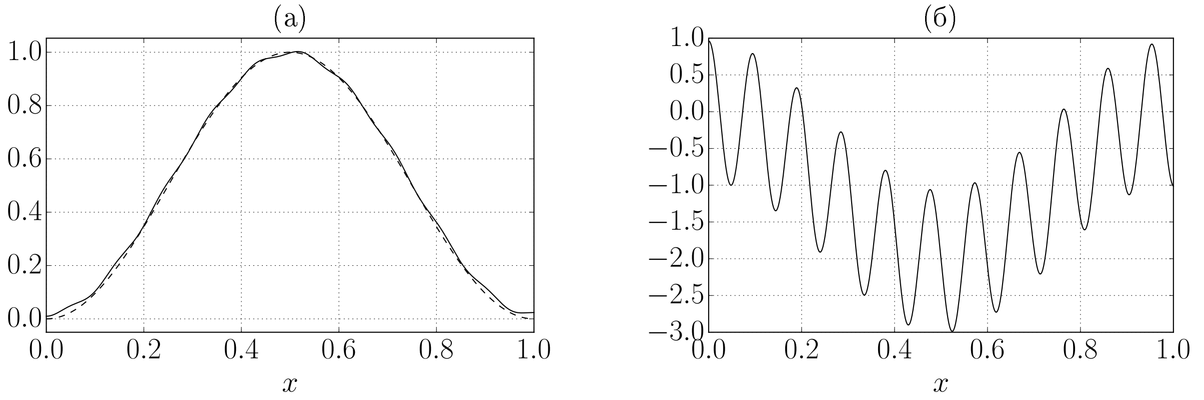


Рис. 2. При $\delta = 0{,}001$: а) v_1^0 и $v[\overline{\lambda}^{k(\delta)}\{v_1^0\}]$; б) $\overline{\lambda}^{k(\delta)}\{v_1^0\}$

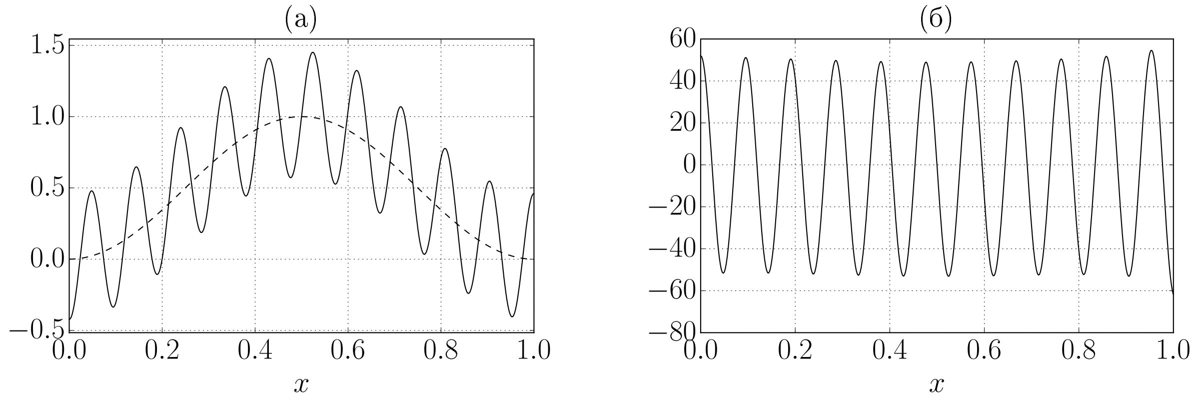


Рис. 3. При $\delta = 0{,}001$: а) v_1^0 и $v[\widetilde{\lambda}^{k(\delta)}\{v_1^0\}]$; б) $\widetilde{\lambda}^{k(\delta)}\{v_1^0\}$

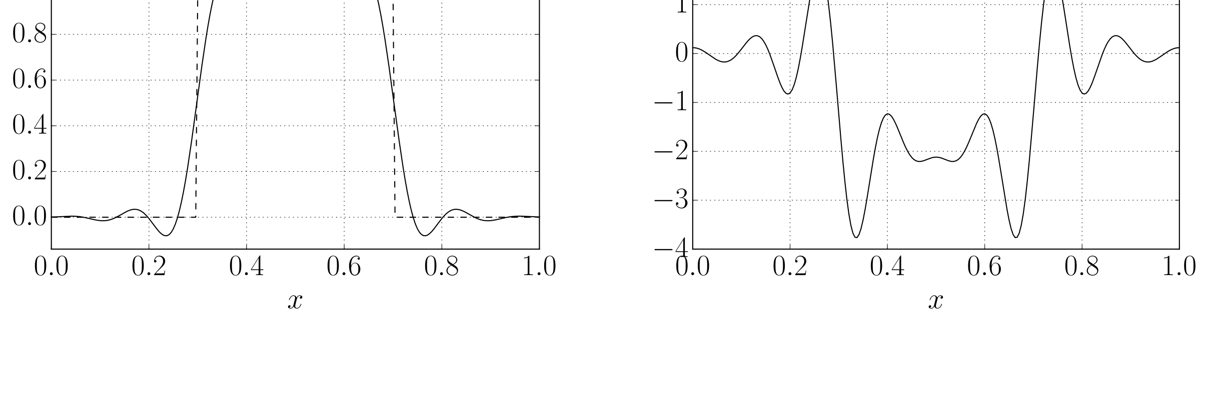


Рис. 4. При $\delta_k = 10^{-5}$, $k = 35111$: а) v_b^0 и $v[\overline{\lambda}^k\{v_b^0\}]$; б) $\overline{\lambda}^k\{v_b^0\}$

$\delta_0 = 1$, $\delta_p = -1{,}1$, а правая часть уравнения не возмущалась. Задача решалась на равномерной сетке с количеством узлов 241 по переменным x и t. Оценивалась норма $\|\overline{\lambda}^k\|$ в пространстве L_2. Результаты второй серии численных экспериментов можно видеть в таблице 2 и на рис. 1, *б* и 4. На рис. 4, *а* штриховой линией показано точное начальное условие задачи v_b^0, а сплошной — найденное приближенное решение задачи оптимального управления. Анализируя их, можно заметить монотонный рост нормы двойственной переменной при формальном уменьшении ошибки и увеличении числа итераций алгоритма теоремы 5, являющийся следствием несуществования решения двойственной задачи. При этом приближенные решения задачи (OC^0), как видно из рис. 1, *б*, устойчиво «тяготеют» к ее точному решению.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кутерин Ф.А., Сумин М.И. Регуляризованный итерационный принцип максимума Понтрягина в оптимальном управлении. I. Оптимизация сосредоточенной системы // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26. Вып. 4. С. 474–489. DOI: 10.20537/vm160403
2. Сумин М.И. Устойчивое секвенциальное выпуклое программирование в гильбертовом пространстве и его приложение к решению неустойчивых задач // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2014. Т. 54. № 1. С. 25–49. DOI: 10.7868/S0044466914010141
3. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.
4. Плотников В.И. О сходимости конечномерных приближений (в задаче об оптимальном нагреве неоднородного тела произвольной формы) // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1968. Т. 8. № 1. С. 136–157.
5. Плотников В.И. Энергетическое неравенство и свойство переопределенности системы собственных функций // Известия АН СССР. Серия математическая. 1968. Т. 32. № 4. С. 743–755.
6. Кутерин Ф.А. Об устойчивом принципе Лагранжа в итерационной форме в выпуклом программировании и его применении при решении неустойчивых операторных уравнений первого рода // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2015. Т. 20. № 5. С. 1239–1246.
7. Кутерин Ф.А., Сумин М.И. О регуляризованном принципе Лагранжа в итерационной форме и его применении для решения неустойчивых задач // Математическое моделирование. 2016. Т. 28. № 11. С. 3–18.
8. Кутерин Ф.А., Сумин М.И. Устойчивый итерационный принцип Лагранжа в выпуклом программировании как инструмент для решения неустойчивых задач // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2017. Т. 57. № 1. С. 55–68. DOI: 10.7868/S0044466917010100
9. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 624 с.
10. Сумин М.И. Регуляризованная параметрическая теорема Куна–Таккера в гильбертовом пространстве // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2011. Т. 51. № 9. С. 1594–1615.
11. Sumin M.I. On the stable sequential Kuhn–Tucker theorem and its applications // Applied Mathematics. 2012. Vol. 3. P. 1334–1350. DOI: 10.4236/am.2012.330190
12. Сумин М.И. Об устойчивом секвенциальном принципе Лагранжа в выпуклом программировании и его применении при решении неустойчивых задач // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19. № 4. С. 231–240.
13. Плотников В.И. Теоремы единственности, существования и априорные свойства обобщенных решений // Доклады АН СССР. 1965. Т. 165. № 1. С. 33–35.
14. Кузенков О.А., Плотников В.И. Существование и единственность обобщенного решения линейного векторного уравнения параболического типа в третьей краевой задаче // Математическое моделирование и методы оптимизации // Межвуз. сб. научн. тр. Горький: Изд-во ГГУ, 1989. С. 132–144.
15. Сумин М.И. Принцип максимума в теории субоптимального управления распределенными системами с операторными ограничениями в гильбертовом пространстве // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 1999. Т. 66. С. 193–235.
16. Сумин М.И. Регуляризованный градиентный двойственный метод решения обратной задачи финального наблюдения для параболического уравнения // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2004. Т. 44. № 11. С. 2001–2019.

17. Эрроу К.Дж., Гурвиц Л., Удзава Х. Исследования по линейному и нелинейному программированию. М.: ИЛ, 1962. 336 с.
18. Мину М. Математическое программирование. Теория и алгоритмы. М.: Наука, 1990. 488 с.
19. Crank J., Nicolson P. A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat-conduction type // Proc. Camb. Phil. Soc. 1947. Vol. 43. P. 50–67. DOI: 10.1007/BF02127704

Поступила в редакцию 05.11.2016

Кутерин Фёдор Алексеевич, ассистент, кафедра математической физики и оптимального управления, Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, 603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.
E-mail: kuterin.f@yandex.ru

Сумин Михаил Иосифович, д. ф.-м. н., профессор, кафедра математической физики и оптимального управления, Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, 603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.
E-mail: m.sumin@mail.ru

F. A. Kuterin, M. I. Sumin

The regularized iterative Pontryagin maximum principle in optimal control. II. Optimization of a distributed system

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2017, vol. 27, issue 1, pp. 26–41 (in Russian).

Keywords: optimal control, instability, iterative dual regularization, regularized iterative Lagrange principle, regularized iterative Pontryagin's maximum principle.

MSC2010: 47A52, 93C20

DOI: 10.20537/vm170103

The stable sequential Pontryagin maximum principle or, in other words, the regularized Pontryagin maximum principle in iterative form is formulated for the optimal control problem of a linear parabolic equation with distributed, initial and boundary controls and operator semiphase equality constraint. The main difference between it and the classical Pontryagin maximum principle is that, firstly, it is formulated in terms of minimizing sequences, secondly, the iterative process occurs in dual space, and thirdly, it is resistant to error of raw data and gives a minimizing approximate solution in the sense of J. Warga. So it is a regularizing algorithm. The proof of the regularized Pontryagin maximum principle in iterative form is based on the dual regularization methods and iterative dual regularization. The results of model calculations of the concrete optimal control problem illustrating the work of the algorithm based on the regularized iterative Pontryagin maximum principle are presented. The problem of finding a control triple with minimal norm under a given equality constraint at the final instant of time or, in other words, the inverse final observation problem of finding a normal solution is used as a concrete model optimal control problem.

REFERENCES

1. Kuterin F.A., Sumin M.I. The regularized iterative Pontryagin maximum principle in optimal control. I. Optimization of a lumped system, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2016, vol. 26, issue 4, pp. 474–489 (in Russian). DOI: 10.20537/vm160403
2. Sumin M.I. Stable sequential convex programming in a Hilbert space and its application for solving unstable problems, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2014, vol. 54, issue 1, pp. 22–44. DOI: 10.1134/S0965542514010138
3. Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ural'tseva N.N. *Linear and quasilinear equations of parabolic type*, Providence, R.I.: AMS, 1968, 648 p.

МАТЕМАТИКА 2017. Т. 27. Вып. 1

4. Plotnikov V.I. The convergence of finite-dimensional approximations (in the problem of the optimal heating of an inhomogeneous body of arbitrary shape), *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1968, vol. 8, issue 1, pp. 182–211. DOI: 10.1016/0041-5553(68)90011-6
5. Plotnikov V.I. An energy inequality and the overdeterminacy property of a system of eigenfunctions, *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 1968, vol. 2, no. 4, pp. 695–707. DOI: 10.1070/IM1968v002n04ABEH000656
6. Kuterin F.A. On stable Lagrange principle in iterative form in convex programming and its application for solving unstable operator equations of the first kind, *Vestn. Tambov. Univ. Ser. Estestv. Tekh. Nauki*, 2015, vol. 20, issue 5, pp. 1239–1246 (in Russian).
7. Kuterin F.A., Sumin M.I. On the regularized Lagrange principle in the iterative form and its application for solving unstable problems, *Matematicheskoe Modelirovanie*, 2016, vol. 28, no. 11, pp. 3–18 (in Russian).
8. Kuterin F.A., Sumin M.I. Stable iterative Lagrange principle in convex programming as a tool for solving unstable problems, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2017, vol. 57, issue 1, pp. 71–82. DOI: 10.1134/S0965542517010092
9. Warga J. *Optimal control of differential and functional equations*, Academic Press, New York, 1972, 531 p. Translated under the title *Optimal'noe upravlenie differentsial'nymi i funktsional'nymi uravneniyami*, Moscow: Nauka, 1977, 624 p.
10. Sumin M.I. Regularized parametric Kuhn–Tucker theorem in a Hilbert space, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2011, vol. 51, issue 9, pp. 1489–1509. DOI: 10.1134/S0965542511090156
11. Sumin M.I. On the stable sequential Kuhn–Tucker theorem and its applications, *Applied Mathematics*, 2012, vol. 3, pp. 1334–1350. DOI: 10.4236/am.2012.330190
12. Sumin M.I. On the stable sequential Lagrange principle in convex programming and its application for solving unstable problems, *Trudy Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2013, vol. 19, no. 4, pp. 231–240 (in Russian).
13. Plotnikov V.I. Uniqueness and existence theorems and apriori properties of generalized solutions, *Soviet Mathematics. Doklady*, 1965, vol. 6, pp. 1405–1407.
14. Kuzenkov O.A., Plotnikov V.I. The existence and uniqueness of generalized solution of linear vector equation of parabolic type in third boundary value problem, *Matematicheskoe modelirovanie i metody optimizatsii*, Gorkii: Gorkii State University, 1989, pp. 132–144 (in Russian).
15. Sumin M.I. Maximum principle in suboptimal control theory of distributed-parameter systems with operator constraints in a Hilbert space, *Journal of Mathematical Sciences*, 2001, vol. 104, issue 2, pp. 1060–1086. DOI: 10.1023/A:1009535725511
16. Sumin M.I. A regularized gradient dual method for the inverse problem of a final observation for a parabolic equation, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2004, vol. 44, issue 11, pp. 1903–1921.
17. Arrow K.J., Hurwicz L., Uzawa H. *Studies in linear and nonlinear programming*, Stanford: Stanford University Press, 1958. Translated under the title *Issledovaniya po lineinomu i nelineinomu programmirovaniyu*, Moscow: Inostr. Lit., 1962, 336 p.
18. Minoux M. *Programation mathematique. Theorie et algorithmes*, Paris: Dunod, 1983, tome 1: 294 p., tome 2: 236 p. Translated under the title *Matematicheskoe programmirovanie. Teoriya i algoritmy*, Moscow: Nauka, 1990, 488 p.
19. Crank J., Nicolson P. A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat-conduction type, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 1947, vol. 43, pp. 50–67. DOI: 10.1007/BF02127704

Received 05.11.2016

Kuterin Fedor Alekseevich, Assistant Lecturer, Department of Mathematical Physics and Optimal Control, Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, pr. Gagarina, 23, Nizhni Novgorod, 603950, Russia.
E-mail: kuterin.f@yandex.ru

Sumin Mikhail Iosifovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Mathematical Physics and Optimal Control, Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, pr. Gagarina, 23, Nizhni Novgorod, 603950, Russia.
E-mail: m.sumin@mail.ru