ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ

МАТЕМАТИКА 2017. Т. 27. Вып. 1

УДК 517.518

© *О. Е. Галкин, С. Ю. Галкина*

ГЛОБАЛЬНЫЕ ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИИ КОБАЯШИ–ГРЕЯ–ТАКАГИ И ДВОИЧНЫЕ ЦИФРОВЫЕ СУММЫ[1]

Функция Кобаяши–Грея–Такаги $\widetilde{T}(x)$ введена Кобаяши в 2002 году для вычисления цифровых сумм в кодировке Грея. Эта функция по конструкции аналогична описанной в 1903 году функции Такаги. Как и функция Такаги, функция Кобаяши–Грея–Такаги всюду непрерывна, но нигде не дифференцируема на числовой оси. В работе доказано, что глобальный максимум функции Кобаяши–Грея–Такаги равен $8/15$, причем на отрезке $[0;2]$ он достигается в тех и только тех точках интервала $(0;1)$, 16-ричная запись которых содержит лишь цифры 4 или 8. Показано также, что глобальный минимум $\widetilde{T}(x)$ равен $-8/15$ и на отрезке $[0;2]$ достигается в тех и только тех точках интервала $(1;2)$, 16-ричная запись которых содержит лишь цифры 7 или $\langle 11\rangle$. Кроме того, на отрезке $[1/2;1]$ вычислен глобальный минимум функции Кобаяши–Грея–Такаги, равный $-2/15$. Найдены глобальные экстремумы и точки экстремума функции $\log_2 x+\widetilde{T}(x)/x$. С помощью полученных результатов из формулы Кобаяши для цифровых сумм в кодировке Грея выведена точная оценка для этих сумм.

Ключевые слова: непрерывная нигде не дифференцируемая функция Кобаяши–Грея–Такаги, глобальный максимум, глобальный экстремум, двоичные цифровые суммы в кодировке Грея.

DOI: 10.20537/vm170102

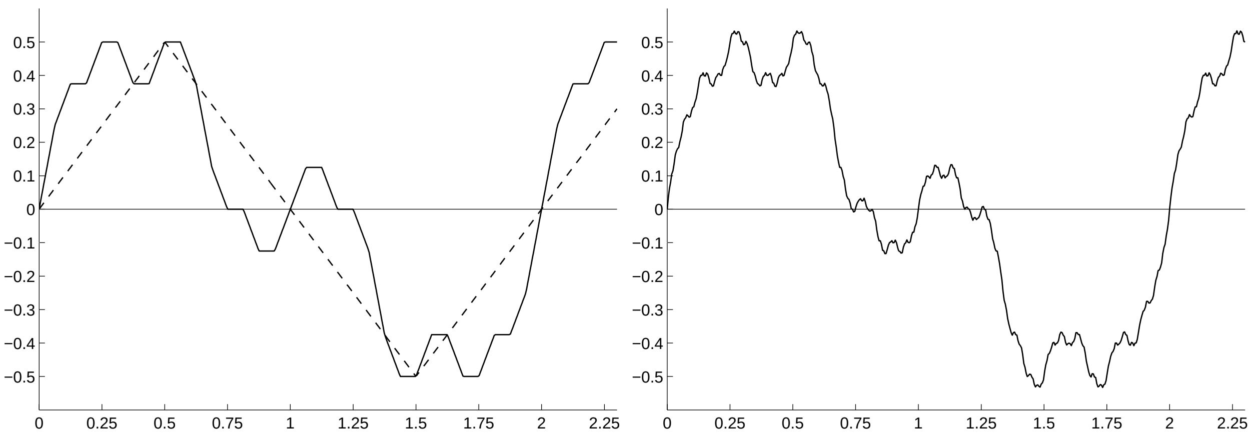
Введение

Работа преследует две цели: 1) поиск глобальных экстремумов и точек, где они достигаются, для функции Кобаяши–Грея–Такаги $\widetilde{T}(x)$, введенной Кобаяши в 2002 году (см. [6]) для вычисления цифровых сумм в кодировке Грея; 2) применение полученных результатов для вывода из формулы Кобаяши точных оценок этих цифровых сумм.

Для сравнения параллельно с результатами для функции $\widetilde{T}(x)$ приведены соответствующие результаты для непрерывной нигде не дифференцируемой функции Такаги, описанной в 1903 году (см. [10]).

Статья состоит из четырех параграфов. В § 1 даны различные определения функции Кобаяши–Грея–Такаги, помещен ее график, а также приведено определение функции Такаги. В § 2 мы напоминаем конструкцию кодировки Грея для натуральных чисел (см. [4]), а также приводим формулу Кобаяши для вычисления двоичных цифровых сумм в этой кодировке, использующую функцию Кобаяши–Грея–Такаги. Кроме того, приведена аналогичная формула Троллопа–Деланжа для вычисления цифровых сумм незакодированных чисел, использующая функцию Такаги (см. [2,11]). В § 3 сначала мы формулируем результат Кахана 1959 года о глобальном максимуме функции Такаги (см. [5]). Далее в теореме 1 мы доказываем аналогичный результат для функции Кобаяши–Грея–Такаги, описывая ее глобальные экстремумы и точки, где они достигаются. В качестве следствия найдены глобальные экстремумы функции $\widetilde{T}(x)$ на отрезке $[1/2;1]$. В теореме 2 вычислены глобальные экстремумы и точки экстремума для функции $\log_2 x+\widetilde{T}(x)/x$. В § 4 с помощью полученных результатов из формулы Кобаяши выведена точная оценка для двоичных цифровых сумм в кодировке Грея.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 15–47–02294-р_поволжье_а; 17-07-00488 А).



(a) (b)

Рис. 1. Графики функций: (a) $y = \widetilde{T}_0(x)$ (- - -), $y = \widetilde{T}_3(x)$ (—) ; (b) $y = \widetilde{T}(x)$

§ 1. Определения функций Кобаяши–Грея–Такаги и Такаги

Функцией Кобаяши–Грея–Такаги $\widetilde{T}(x)$ мы называем функцию, определяемую функциональным рядом

$$\widetilde{T}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \widetilde{T}_0(2^n x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

где $\widetilde{T}_0(x) = 2\rho(x/2 + 1/4, \mathbb{Z}) - 1/2$, величина $\rho(y, \mathbb{Z}) = |\{y + 1/2\} - 1/2|$ — это расстояние между точкой $y \in \mathbb{R}$ и ближайшей к ней целой точкой, $\{y\}$ — дробная часть числа y. При $0 \leqslant x \leqslant 2$ функцию $\widetilde{T}_0(x)$ можно задать также следующими формулами:

$$\widetilde{T}_0(x) = \begin{cases} x & \text{при} \quad x \in [0; 1/2], \\ 1 - x & \text{при} \quad x \in [1/2; 3/2], \\ x - 2 & \text{при} \quad x \in [3/2; 2]. \end{cases} \tag{2}$$

Частичные суммы ряда (1) будем обозначать через $\widetilde{T}_m(x)$:

$$\widetilde{T}_m(x) = \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{2^n} \widetilde{T}_0(2^n x), \quad m = 0, 1, 2, 3, \ldots. \tag{3}$$

Функция $\widetilde{T}(x)$ при любом $m = 1, 2, \ldots$ подчиняется равенству

$$\widetilde{T}(x) = \widetilde{T}_{m-1}(x) + \frac{1}{2^m} \widetilde{T}(2^m x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

которое можно доказать простой проверкой с использованием формул (1) и (3).

Очевидно, функции $\widetilde{T}(x)$ и $\widetilde{T}_m(x)$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, *периодичны с периодом* 2. Кроме того, в обзоре [1, p. 43] указано, что *функция Кобаяши–Грея–Такаги всюду непрерывна, но нигде не дифференцируема на* $\mathbb{R}$.

На рис. 1 приведены графики функций $y = \widetilde{T}_0(x)$ (слева пунктиром), $y = \widetilde{T}_3(x)$ (слева сплошной линией) и функции $y = \widetilde{T}(x)$ (справа).

Отметим, что исходно в [6, p. 170] функцию $\widetilde{T}(x)$ Кобаяши назвал *“Gray Takagi function”*. Она была задана лишь на отрезке $[0; 1]$, причем в сумме (1) величины $\widetilde{T}_0(2^n x)$, которые мы обозначим через $K_n(x)$, определялись с помощью рекуррентных соотношений

$$K_0(x) = T_0(x), \quad K_{n+1}(x) = \operatorname{sign}(x - 1/2) \cdot K_n(2T_0(x)), \ n = 0, 1, \ldots,$$

где $T_0(x) = \rho(x, \mathbb{Z})$.

МАТЕМАТИКА 2017. Т. 27. Вып. 1

Укажем также еще одну формулу для $\widetilde{T}(x)$, приведенную в [1, p. 35–36]:

$$\widetilde{T}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\varepsilon_n(x)}}{2^n}T_0(2^nx),\quad x\in\mathbb{R},$$

где $\varepsilon_n(x)$ — это n-я цифра после запятой в двоичном разложении числа x.

Функция Кобаяши–Грея–Такаги по конструкции аналогична описанной еще в 1903 году *функции Такаги* $T(x)$ (см. [10]), которая, как и $\widetilde{T}(x)$, всюду непрерывна, но нигде не дифференцируема на $\mathbb{R}$:

$$T(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}T_0(2^nx),\quad x\in\mathbb{R}.$$

Свойствам функции Такаги и ее обобщений посвящены обзоры [1, 8] (см. также [3]).

§ 2. Двоичные цифровые суммы и функции Кобаяши–Грея–Такаги и Такаги

Функция Кобаяши–Грея–Такаги $\widetilde{T}(x)$ использовалась в [6] для вычисления цифровых сумм в кодировке Грея.

Напомним, что *код Грея*, запатентованный в 1953 году (см. [4]), каждому натуральному числу n с двоичным разложением $n=n_k2^k+n_{k-1}2^{k-1}+\ldots+n_12^1+n_0$, где $n_k,n_{k-1},\ldots n_0\in\{0;1\}$, сопоставляет последовательность двоичных цифр $g(n)=\{n_k,n_k\oplus n_{k-1},\ldots,n_2\oplus n_1,n_1\oplus n_0\}$ (здесь знак $\oplus$ означает сложение по модулю 2). Одним из важнейших свойств этого кода является то, что *кодировки любых двух последовательных натуральных чисел отличаются ровно на одну цифру.*

Обозначим через $s(n)$ сумму $n_k+n_{k-1}+\ldots+n_0$ двоичных цифр числа n, через $\widetilde{s}(n)$ — сумму цифр в кодировке Грея числа n, то есть в последовательности $g(n)$. Введем также цифровые суммы $S_1(N)=\sum\limits_{n=0}^{N-1}s(n)$ и $\widetilde{S}_1(N)=\sum\limits_{n=0}^{N-1}\widetilde{s}(n)$. Из результатов [6, p. 171–172] вытекает формула для $\widetilde{S}_1(N)$, использующая функцию Кобаяши–Грея–Такаги $\widetilde{T}(x)$:

$$\widetilde{S}_1(N)=\frac{N\log_2N}{2}+\frac{N}{2}\cdot\Big(1-\{\log_2N\}-2^{1-\{\log_2N\}}\cdot\widetilde{T}(2^{\{\log_2N\}-1})\Big).\tag{5}$$

Аналогичная формула для сумм $S_1(N)$ также существует, но вместо $\widetilde{T}(x)$ в ней используется функция Такаги $T(x)$. Эта формула была получена Троллопом в 1968 году (см. [11]), Деланж обобщил ее и придал ей несколько иной вид (см. [2]):

$$S_1(N)=\frac{N\log_2N}{2}+\frac{N}{2}\cdot\Big(1-\{\log_2N\}-2^{1-\{\log_2N\}}\cdot T(2^{\{\log_2N\}-1})\Big).$$

§ 3. Глобальные экстремумы функции Такаги и функции Кобаяши–Грея–Такаги

Глобальные и локальные экстремумы функции Такаги нашел Кахан. В частности, для глобального максимума он доказал следующий результат ([5, p. 54], см. также [9]).

Теорема (Кахан, 1959). *Множество точек, в которых функция Такаги достигает своего глобального максимума, равного* $2/3$, *есть множество точек, имеющих двоичную запись* $x=\ldots,x_1x_2\ldots x_n\ldots$, *удовлетворяющую условию* $x_{2k+1}+x_{2k+2}=1$ *для* $k=0,1,\ldots$.

Из этой теоремы следует, что *функция Такаги достигает своего глобального максимума в тех и только тех точках* x, *которые в системе счисления с основанием* 4 *имеют запись лишь из цифр* 1 *или* 2 *после запятой*:

$$x=\ldots,\left[\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right.\left[\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right.\ldots.$$

Перейдем к изучению глобальных экстремумов функции Кобаяши–Грея–Такаги $\widetilde{T}(x)$. Поскольку $\widetilde{T}(x)$ имеет период 2, то достаточно рассмотреть лишь ее экстремумы на отрезке $[0;2]$. Для доказательства теоремы 1 нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. 1. *Глобальный максимум на отрезке* $[0;1]$ *частичной суммы* $\widetilde{T}_3(x)$, *определенной в* (3), *равен* $1/2$. *Он достигается во всех точках объединения отрезков* $[4/16;5/16]\cup[8/16;9/16]$ *и только в них.*

2. *Глобальный минимум функции* $\widetilde{T}_3(x)$ *на отрезке* $[1/2;1]$ *равен* $-1/8$. *Он достигается во всех точках отрезка* $[14/16;15/16]$ *и только в них.*

Доказательство. Как показывают вычисления, функция $\widetilde{T}_3(x)$ в точках $x_k = k/16$, $k = 0,\ldots,16$, принимает значения, представленные ниже в таблице.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$\widetilde{T}_3(x_k)$	0	1/4	3/8	3/8	1/2	1/2	3/8	3/8	1/2	1/2	3/8	1/8	0	0	−1/8	−1/8	0

Кроме того, функция $\widetilde{T}_3(x)$ непрерывна на $[0;1]$ и является линейной на каждом из отрезков $[(k-1)/16;k/16]$, $k=1,\ldots,16$. Отсюда и из данных, приведенных в таблице, следуют утверждения пунктов 1 и 2 леммы. □

В следующей теореме найдены глобальные экстремумы функции Кобаяши–Грея–Такаги.

Теорема 1. 1. *На отрезке* $[0;2]$ *глобальный максимум функции Кобаяши–Грея–Такаги* $\widetilde{T}(x)$ *равен* $8/15$. *Множество точек ее глобального максимума на* $[0;2]$ *состоит из всех точек интервала* $(0;1)$, *запись которых в системе счисления с основанием* 16 *содержит лишь цифры* 4 *или* 8:

$$x = 0,\left[\begin{array}{l}4\\8\end{array}\right.\left[\begin{array}{l}4\\8\end{array}\right.\ldots .$$

Наименьшая точка максимума — это $0{,}444\ldots = 4/15$, *наибольшая точка максимума — это* $0{,}888\ldots = 8/15$.

2. *На отрезке* $[0;2]$ *глобальный минимум функции Кобаяши–Грея–Такаги равен* $-8/15$. *Множество точек ее глобального минимума на* $[0;2]$ *состоит из всех точек интервала* $(1;2)$, *запись которых в системе счисления с основанием* 16 *содержит лишь цифры* 7 *или* $\langle 11\rangle$:

$$x = 1,\left[\begin{array}{l}7\\\langle 11\rangle\end{array}\right.\left[\begin{array}{l}7\\\langle 11\rangle\end{array}\right.\ldots .$$

Наименьшая точка минимума — это $0{,}777\ldots = 7/15$, *наибольшая точка минимума — это* $0{,}\langle 11\rangle\langle 11\rangle\langle 11\rangle\ldots = 11/15$.

Доказательство.

(a) Так функция $\widetilde{T}(x)$ нечетна и периодична на $\mathbb{R}$, то утверждение пункта 2 теоремы следует из утверждения пункта 1.

(b) Докажем утверждение пункта 1 теоремы. Для этого сначала отметим, что, в силу нечетности и периодичности функции $\widetilde{T}(x)$, в точках $x=0$ и $x=2$ экстремумов нет.

Далее, используя формулу (1), запишем $\widetilde{T}(x)$ в виде $\widetilde{T}(x) = \widetilde{T}_0(x) + R_1(x)$, где

$$R_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\widetilde{T}_0(2^n x), \quad x\in\mathbb{R}.$$

Функция $R_1(x)$ имеет период 1. Кроме того, очевидно, при любом x из интервала $(1;2)$ выполнено неравенство $\widetilde{T}_0(x) < \widetilde{T}_0(x-1)$. Следовательно, при всех $x\in(1;2)$ имеем:

$$\widetilde{T}(x) = \widetilde{T}_0(x) + R_1(x) < \widetilde{T}_0(x-1) + R_1(x-1) = \widetilde{T}(x-1).$$

Поэтому интервал $(1;2)$ не содержит точек глобального максимума функции Кобаяши–Грея–Такаги на $[0;2]$, то есть все такие точки лежат в интервале $(0;1)$.

Еще раз используя формулу (1), выразим $\widetilde{T}(x)$ через частичную сумму $\widetilde{T}_3(x)$:

$$\widetilde{T}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{16^n}\widetilde{T}_3(16^n x),\quad x\in\mathbb{R}. \tag{6}$$

Из пункта 1 леммы 1 следует, что $\max_{x\in[0;1]}\widetilde{T}_3(x)=1/2$, а точки глобального максимума функции $\widetilde{T}_3(x)$ на отрезке $[0;1]$ в 16-ричной системе счисления имеют следующую запись:

$$x=0{,}x_1x_2x_3\ldots,\quad \text{где } x_1=4 \text{ или } x_1=8, \tag{7}$$

причем допустима цифра $\langle 15\rangle$ в периоде, например: $5/16=0{,}4\langle 15\rangle\langle 15\rangle\ldots$; $9/16=0{,}8\langle 15\rangle\langle 15\rangle\ldots$. Отсюда и из формулы (6) для всех $x\in[0;2]$ вытекают соотношения

$$\widetilde{T}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{16^n}\widetilde{T}_3(16^n x)\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{16^n}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1/2}{1-1/16}=\frac{8}{15}. \tag{8}$$

Следовательно, для доказательства равенства $\max_{x\in[0;2]}\widetilde{T}(x)=8/15$ достаточно привести пример точек $x\in(0;1)$, в которых неравенство в (8) становится равенством. Эти точки и будут точками глобального максимума функции $\widetilde{T}(x)$.

Очевидно, неравенство в (8) будет равенством тогда и только тогда, когда $\widetilde{T}_3(16^n x)=1/2$ (то есть $16^n x$ — точка глобального максимума функции $\widetilde{T}_3$) для любого $n=0,1,2,\ldots$. Отсюда и из (7) вытекает, что при любом $n=0,1,2,\ldots$ число $16^n x$ должно иметь 16-ричную запись вида $16^n x=\ldots,y_n\ldots$, где $y_n=4$ или $y_n=8$. Далее, рассуждая по индукции, получаем, что в 16-ричной записи числа x должны присутствовать только цифры 4 или 8, то есть

$$x=0,\left[\begin{matrix}4\\8\end{matrix}\right.\left[\begin{matrix}4\\8\end{matrix}\right.\ldots.$$

Что и требовалось доказать. $\square$

Из доказанной теоремы вытекает ряд следствий.

Следствие 1. *Множество точек глобального максимума функции Кобаяши–Грея–Такаги на отрезке* $[0;2]$ *обладает следующими свойствами:*

1) *является множеством канторовского типа и может быть получено из отрезка* $[0;1]$ *в результате счетного числа шагов, на каждом из которых каждый имеющийся отрезок делится на* 16 *равных частей, и из этих частей берутся лишь* 5*-й и* 9*-й отрезки (остальные удаляются)*;

2) *имеет хаусдорфову размерность* $1/4$.

Следствие 2. *На отрезке* $[1/2;1]$ *глобальный максимум функции Кобаяши–Грея–Такаги* $\widetilde{T}(x)$ *равен* $8/15$*, а глобальный минимум равен* $-2/15$.

Доказательство. (a) Согласно пункту 1 теоремы 1 глобальный максимум функции $\widetilde{T}(x)$ на отрезке $[0;2]$ равен $8/15$ и достигается, в частности, в точке $x=8/15$ с 16-ричной записью $8/15=0{,}888\ldots$. Поскольку $8/15\in[1/2;1]$, то глобальный максимум $\widetilde{T}(x)$ на $[1/2;1]$ также равен $8/15$.

(b) Из уравнения (4) при $m=2$ получаем:

$$\widetilde{T}(x)=\widetilde{T}_1(x)+\frac{1}{4}\widetilde{T}(4x),\quad x\in\mathbb{R}.$$

Легко видеть, что $\widetilde{T}_1(x)\geqslant 0$ при $x\in[1/2;1]$ и $\widetilde{T}_1(x)=0$ при $x\in[3/4;1]$. Поэтому из пункта 2 теоремы 1 при $x\in[1/2;1]$ следуют соотношения

$$\widetilde{T}(x)=\widetilde{T}_1(x)+\frac{1}{4}\widetilde{T}(4x)\geqslant-\frac{1}{4}\cdot\frac{8}{15}=-\frac{2}{15}.$$

Также легко видеть, что эти соотношения превращаются в равенства, например, в точке с 16-ричной записью $0{,}\langle 13\rangle\langle 13\rangle\langle 13\rangle\ldots = 13/15 \in [3/4;1]$. Таким образом, число $-2/15$ является глобальным минимумом функции $\widetilde{T}(x)$ на отрезке $[1/2;1]$. □

Следующая теорема важна как сама по себе, так и для получения оценки цифровых сумм Грея. В ее формулировке и доказательстве использованы некоторые идеи из работы [7].

Теорема 2. *Зададим функцию* $f(x) = \log_2 x + \widetilde{T}(x)/x$, $x > 0$. *Тогда*

1) *при всех* $x \in (0;1/2]$ *выполняется равенство* $f(x) = f(2x)$;

2) *глобальный максимум функции* $f(x)$ *на полуинтервале* $(0;1]$ *равен* $\log_2(16/15)$ *и достигается только в точках вида* $8/(15\cdot 2^n)$, $n = 0,1,2,\ldots$;

3) *глобальный минимум функции* $f(x)$ *на* $(0;1]$ *равен* $\log_2(11/15)$ *и достигается только в точках вида* $11/(15\cdot 2^n)$, $n = 0,1,2,\ldots$.

Доказательство.

1. Используя свойства логарифма и формулу (4) при $m = 1$, получим:

$$f(x) = (\log_2(2x) - 1) + (\widetilde{T}_0(x)/x + \widetilde{T}(2x)/(2x)).$$

Отсюда, ввиду (2), при $x \in (0;1/2]$ следует равенство $f(x) = f(2x)$.

2. В силу пункта 1 теоремы 1 верна оценка $\widetilde{T}(x) \leqslant 8/15$ при $x \in [4/15;8/15]$, причем $\widetilde{T}(4/15) = \widetilde{T}(8/15) = 8/15$. Следовательно, $f(8/15) = \log_2(8/15) + \widetilde{T}(8/15)/(8/15) = \log_2(16/15)$.

Теперь, учитывая равенство $f(x) = f(2x)$ из пункта 1 теоремы 2, нам достаточно доказать, что $f(x) < \log_2(16/15)$ при всех $x \in (4/15;8/15)$. В свою очередь, это неравенство равносильно соотношению $\widetilde{T}(x) < x(\log_2(16/15) - \log_2 x)$. Но это соотношение выполняется, так как левая часть не превосходит $8/15$, а правая часть выпукла вверх и равна $8/15$ при $x = 4/15$ и $x = 8/15$.

3. Сначала вычислим $\widetilde{T}(11/15)$. Используя формулу (4) при $m = 1$, формулу (2) и пункт 2 теоремы 1, получаем: $\widetilde{T}(11/15) = \widetilde{T}_0(11/15) + 1/2\cdot\widetilde{T}(22/15) = (1 - 11/15) + 1/2\cdot(-8/15) = 0$.

Далее находим: $f(11/15) = \log_2(11/15) + \widetilde{T}(11/15)/(11/15) = \log_2(11/15)$. Следовательно, с учетом равенства $f(x) = f(2x)$ достаточно при всех $x \in (1/2;1)$, $x \neq 11/15$ доказать неравенство $f(x) > \log_2(11/15)$. А оно равносильно соотношению $\widetilde{T}(x) > x(\log_2(11/15) - \log_2 x)$, которое мы докажем в два этапа: (a) сначала докажем неравенство $\widetilde{T}(x) > g(x)$, где $g(x) = (1-x)(\log_2(1-x) - \log_2(4/15))$; (b) затем докажем, что $g(x) > x(\log_2(11/15) - \log_2 x)$.

(a) Заметим, что силу пункта 2 данной теоремы во всех точках $x \in (0;1)$, кроме точек вида $8/(15\cdot 2^n)$, $n = 0,1,2,\ldots$, выполнено неравенство

$$\widetilde{T}(x) < x(\log_2(16/15) - \log_2 x). \tag{9}$$

Кроме того, используя уравнение (4) при $m = 1$, нечетность и периодичность функции $\widetilde{T}(x)$, а также формулу (2), для всех $x \in [1/2;1)$ приходим к равенству

$$\widetilde{T}(x) = \widetilde{T}_0(x) + 1/2\cdot\widetilde{T}(2x) = (1-x) - 1/2\cdot\widetilde{T}(2-2x).$$

Отсюда, так как $(2-2x) \in (0;1]$ при $x \in [1/2;1)$, в силу неравенства (9) получаем:

$$\widetilde{T}(x) = (1-x) - 1/2\cdot\widetilde{T}(2-2x) > (1-x) - 1/2\cdot(2-2x)(\log_2(16/15) - \log_2(2-2x)) =$$

$$= (1-x)(\log_2(1-x) - \log_2(4/15)) = g(x),$$

если $2 - 2x \neq 8/(15\cdot 2^n)$, то есть при $x \in [1/2;1)$, $x \neq 1 - 4/(15\cdot 2^n)$, $n = 0,1,2,\ldots$.

(b) Неравенство $g(x) > x(\log_2(11/15) - \log_2 x)$ выполнено при всех $x \in [1/2;1)$, $x \neq 11/15$, так как функция $g(x) = (1-x)(\log_2(1-x) - \log_2(4/15))$ выпукла вниз, функция $x(\log_2(11/15) - \log_2 x)$ выпукла вверх, а в точке $x = 11/15 = 1 - 4/15$ графики этих функций касаются друг друга.

Доказательство пунктов (a) и (b) завершает доказательство теоремы. □

На рис. 2 дана графическая иллюстрация к доказательству теоремы 2. Слева приведены графики функций $y = \widetilde{T}_0(x)$ (график 1), $y = x(\log_2(16/15) - \log_2 x)$ (график 2), $y = x(\log_2(11/15) - \log_2 x)$ (график 3) и $g(x) = (1-x)(\log_2(1-x) - \log_2(4/15))$ (график 4, пунктиром). Справа на рис. 2 приведен график функции $f(x) = \log_2 x + \widetilde{T}(x)/x$.

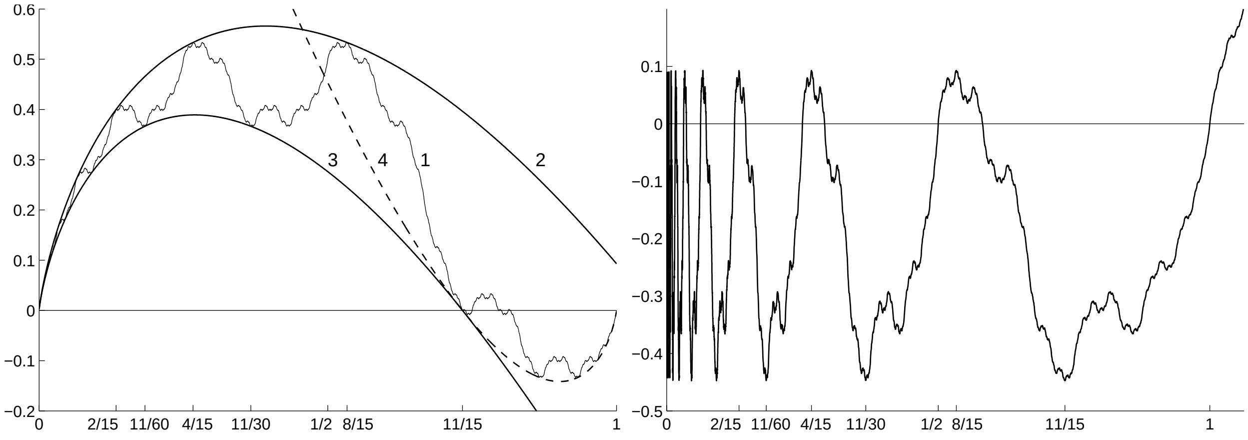


Рис. 2. Иллюстрация к доказательству теоремы 2

§ 4. Оценка двоичных цифровых сумм в кодировке Грея

В этом параграфе мы выводим из формулы (5) оценку для двоичных цифровых сумм в кодировке Грея $\widetilde{S}_1(N)$, не использующую функцию Кобаяши–Грея–Такаги. Она аналогична следующей оценке для сумм $S_1(N)$, доказанной Круппелем (см. [7, p. 43]) и другими авторами (см. ссылки в [7]):

$$-0{,}2075 \approx -\frac{1}{2}\log_2\Big(\frac{4}{3}\Big) \leqslant \frac{S_1(N)}{N} - \frac{\log_2 N}{2} \leqslant 0.$$

Теорема 3. *Для любого натурального числа N выполняются соотношения*

$$-\,0{,}04655 \approx -\frac{1}{2}\log_2\Big(\frac{16}{15}\Big) \leqslant \frac{\widetilde{S}_1(N)}{N} - \frac{\log_2 N}{2} \leqslant \frac{1}{2}\log_2\Big(\frac{15}{11}\Big) \approx 0{,}2237. \tag{10}$$

В этой оценке константы $-1/2 \cdot \log_2(16/15)$ и $1/2 \cdot \log_2(15/11)$ являются наилучшими.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из формулы (5) следует равенство

$$\frac{\widetilde{S}_1(N)}{N} - \frac{\log_2 N}{2} = -\frac{1}{2}\cdot\Big(\log_2(2^{\{\log_2 N\}-1}) + \frac{\widetilde{T}(2^{\{\log_2 N\}-1})}{2^{\{\log_2 N\}-1}}\Big). \tag{11}$$

Поскольку при любом натуральном N число $x = 2^{\{\log_2 N\}-1}$ принадлежит полуинтервалу $[1/2;1)$, из равенства (11) вытекают оценки

$$-\frac{1}{2}\cdot\sup_{x\in[1/2;1]}\Big(\log_2 x + \frac{\widetilde{T}(x)}{x}\Big) \leqslant \frac{\widetilde{S}_1(N)}{N} - \frac{\log_2 N}{2} \leqslant -\frac{1}{2}\cdot\inf_{x\in[1/2;1]}\Big(\log_2 x + \frac{\widetilde{T}(x)}{x}\Big).$$

Отсюда, в силу теоремы 2, получаем доказываемые соотношения (10).

Зададим последовательности натуральных чисел $M_k = (16^k - 1)/15$ и $N_k = 11(16^k - 1)/15$, $k = 1, 2, \ldots$. Тогда из формулы (11) и теоремы 2 получим равенства

$$\lim_{k\to\infty}\Big(\frac{\widetilde{S}_1(M_k)}{M_k} - \frac{\log_2 M_k}{2}\Big) = -\frac{1}{2}\log_2\Big(\frac{16}{15}\Big), \qquad \lim_{k\to\infty}\Big(\frac{\widetilde{S}_1(N_k)}{N_k} - \frac{\log_2 N_k}{2}\Big) = \frac{1}{2}\log_2\Big(\frac{15}{11}\Big).$$

Из них следует, что константы в оценке (10) являются неулучшаемыми. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Allaart P.C., Kawamura K. The Takagi function: a survey // Real Analysis Exchange. 2011. Vol. 37. No. 1. P. 1–54. http://projecteuclid.org/euclid.rae/1335806762
2. Delange H. Sur la fonction sommatoire de la fonction "Somme des Chiffres" // L'Enseignement Mathématique. 1975. Vol. 21. P. 31–47. DOI: 10.5169/seals-47328
3. Галкин О.Е., Галкина С.Ю. О свойствах функций показательного класса Такаги // Уфимский математический журнал. 2015. Т. 7. № 3. С. 29–38. http://matem.anrb.ru/sites/default/files/files/vup27/Galkin.pdf
4. Gray F. Pulse code communication // U.S. Patent № 2632058. 17 march 1953. http://pdfpiw.uspto.gov/.piw?Docid=02632058
5. Kahane J.P. Sur l'exemple, donné par M. de Rham, d'une fonction continue sans dérivée // L'Enseignement Mathématique. 1959. Vol. 5. P. 53–57.
6. Kobayashi Z. Digital sum problems for the Gray code representation of natural numbers // Interdisciplinary Information Sciences. 2002. Vol. 8. No. 2. P. 167–175. DOI: 10.4036/iis.2002.167
7. Krüppel M. Takagi's continuous nowhere differentiable function and binary digital sums // Rostock. Math. Kolloq. 2008. Vol. 63. P. 37–54. http://ftp.math.uni-rostock.de/pub/romako/heft63/kru63.pdf
8. Lagarias J.C. The Takagi function and its properties // RIMS Kôkyûroku Bessatsu B34: Functions in Number Theory and Their Probabilistic Aspects / K. Matsumoto, S. Akiyama, K. Fukuyama, H. Nakada, H. Sugita, A. Tamagawa. Kyoto, 2012. P. 153–189. http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kenkyubu/bessatsu/open/B34/pdf/B34-11.pdf
9. Мартынов Б. О максимумах функции Ван-дер-Вардена // Квант. 1982. № 6. С. 8–14. http://kvant.mccme.ru/1982/06/o_maksimumah_funkcii_van--der-.htm
10. Takagi T. A simple example of a continuous function without derivative // Tokyo Sugaku-Butsurigakkwai Hokoku. 1901. Vol. 1. P. F176–F177. DOI: 10.11429/subutsuhokoku1901.1.F176
11. Trollope J.R. An explicit expression for binary digital sums // Mathematics Magazine. 1968. Vol. 41. No. 1. P. 21–25. DOI: 10.2307/2687954

Поступила в редакцию 01.02.2017

Галкин Олег Евгеньевич, к. ф.-м. н., доцент, кафедра математической физики и оптимального управления, Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, 603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.
E-mail: olegegalkin@ya.ru

Галкина Светлана Юрьевна, к. ф.-м. н., доцент, кафедра математической физики и оптимального управления, Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, 603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.
E-mail: svetlana.u.galkina@mail.ru

O. E. Galkin, S. Yu. Galkina

Global extrema of the Gray Takagi function of Kobayashi and binary digital sums

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2017, vol. 27, issue 1, pp. 17–25 (in Russian).

Keywords: continuous nowhere differentiable Gray Takagi function of Kobayashi, global maximum, global extremum, Gray code binary digital sums.

MSC2010: 26A27, 26A06

DOI: 10.20537/vm170102

The Gray Takagi function $\widetilde{T}(x)$ was defined by Kobayashi in 2002 for calculation of Gray code digital sums. By construction, the Gray Takagi function is similar to the Takagi function, described in 1903. Like the Takagi function, the Gray Takagi function of Kobayashi is continuous, but nowhere differentiable on the real axis. In this paper, we prove that the global maximum for the Gray Takagi function of Kobayashi is equal to 8/15, and on the segment $[0;2]$ it is reached at those and only those points of the interval $(0;1)$, whose hexadecimal record contains only digits 4 or 8. We also show that the global minimum of $\widetilde{T}(x)$ is equal to $-8/15$, and on the segment $[0;2]$ it is reached at those and only those points of the interval $(1;2)$, whose hexadecimal record contains only digits 7 or $\langle 11\rangle$. In addition, we calculate the global minimum of the Gray Takagi function on the segment $[1/2;1]$ and get the value $-2/15$. We find global extrema and extreme points of the function $\log_2 x+\widetilde{T}(x)/x$. By using the results obtained, we get the best estimation of Gray code digital sums from Kobayashi's formula.

REFERENCES

1. Allaart P.C., Kawamura K. The Takagi function: a survey, *Real Analysis Exchange*, 2011, vol. 37, no. 1, pp. 1–54. http://projecteuclid.org/euclid.rae/1335806762
2. Delange H. Sur la fonction sommatoire de la fonction "Somme des Chiffres", *L'Enseignement Mathématique*, 1975, vol. 21, pp. 31–47. DOI: 10.5169/seals-47328
3. Galkin O.E., Galkina S.Yu. On properties of functions in exponential Takagi class, *Ufa Mathematical Journal*, 2015, vol. 7, no. 3, pp. 28–37. DOI: 10.13108/2015-7-3-28
4. Gray F. Pulse code communication. U.S. Patent no. 2632058, 17 march 1953. http://pdfpiw.uspto.gov/.piw?Docid=02632058
5. Kahane J.P. Sur l'exemple, donné par M. de Rham, d'une fonction continue sans dérivée, *L'Enseignement Mathématique*, 1959, vol. 5, pp. 53–57.
6. Kobayashi Z. Digital sum problems for the Gray code representation of natural numbers, *Interdisciplinary Information Sciences*, 2002, vol. 8, no. 2, pp. 167–175. DOI: 10.4036/iis.2002.167
7. Krüppel M. Takagi's continuous nowhere differentiable function and binary digital sums, *Rostock. Math. Kolloq.*, 2008, vol. 63, pp. 37–54. http://ftp.math.uni-rostock.de/pub/romako/heft63/kru63.pdf
8. Lagarias J.C. The Takagi function and its properties, *RIMS Kôkyûroku Bessatsu B34: Functions in Number Theory and Their Probabilistic Aspects*, Eds.: K. Matsumoto, S. Akiyama, K. Fukuyama, H. Nakada, H. Sugita, A. Tamagawa. Kyoto, 2012, pp. 153–189. http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kenkyubu/bessatsu/open/B34/pdf/B34-11.pdf
9. Martynov B. Van der Waerden's pathological function, *Quantum*, 1998, vol. 8, no. 6, pp. 12–19. http://static.nsta.org/pdfs/QuantumV8N6.pdf
10. Takagi T. A simple example of a continuous function without derivative, *Tokyo Sugaku-Butsurigakkwai Hokoku*, 1901, vol. 1, pp. F176–F177. DOI: 10.11429/subutsuhokoku1901.1.F176
11. Trollope J.R. An explicit expression for binary digital sums, *Mathematics Magazine*, 1968, vol. 41, no. 1, pp. 21–25. DOI: 10.2307/2687954

Received 01.02.2017

Galkin Oleg Evgen'evich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Mathematical Physics and Optimal Control, Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, pr. Gagarina, 23, Nizhni Novgorod, 603950, Russia.
E-mail: olegegalkin@ya.ru

Galkina Svetlana Yur'evna, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Mathematical Physics and Optimal Control, Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, pr. Gagarina, 23, Nizhni Novgorod, 603950, Russia.
E-mail: svetlana.u.galkina@mail.ru