УДК 519.858

© *М. И. Высокос, В. И. Жуковский, М. М. Кириченко, С. П. Самсонов*

НОВЫЙ ПОДХОД К МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫМ ЗАДАЧАМ ПРИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ[1]

Новизна в том, что лицо, принимающее решение (ЛПР) в многокритериальной задаче при неопределенности, стремится не только по возможности увеличить гарантированные значения каждого из своих критериев, но и одновременно уменьшить гарантированные риски, сопровождающие такое увеличение. Предлагаемое исследование выполнено на стыке теории многокритериальных задач (МЗ) и принципа минимаксного сожаления (риска) (ПМС) Сэвиджа–Ниханса: из теории МЗ использованы понятие слабо эффективной оценки и сопровождающая теорема Ю. Б. Гермейера, а из ПМС — оценка значения функции сожаления в качестве риска по Сэвиджу–Нихансу. Рассмотрение ограничено интервальными неопределенностями: о них ЛПР известны лишь границы изменения, а какие-либо вероятностные характеристики отсутствуют (по тем или иным причинам). Введено новое понятие — *сильно гарантированного по исходам и рискам решения* (СГИР), максимального по Слейтеру; установлено его существование при «привычных» для математического программирования ограничениях (непрерывность критериев, компактность множеств стратегий и неопределенностей). В качестве приложения найден явный вид СГИР в задаче диверсификации вклада по рублевому и валютному депозитам.

Ключевые слова: многокритериальные задачи, сильная гарантия, максимум по Слейтеру и Парето, минимаксное сожаление, диверсификация вкладов.

DOI: 10.20537/vm170101

Введение

Рассматривается многокритериальная задача при неопределенности (МЗН)

$$\Gamma = \big\langle \mathbb{N}, X, Y, f(x,y) \big\rangle, \tag{0.1}$$

где $\mathbb{N} = \{1, \ldots, N\}$ — множество порядковых номеров ($N \geqslant 2$) компонент $f_i(x,y)$ векторного критерия $f(x,y) = (f_1(x,y), \ldots, f_N(x,y))$; $X \subset \mathbb{R}^n$ — множество стратегий x, $Y \subset \mathbb{R}^m$ — множество *интервальных* неопределенностей y; при построении функции риска по Сэвиджу–Нихансу используются также так называемые *стратегические* неопределенности $y(x) : X \to Y$, множество которых обозначается как Y^X.

На содержательном уровне задачей ЛПР в (0.1) до сих пор был выбор такой стратегии $x \in X$, при которой значение всех критериев (исходов) становилось бы возможно большим, учитывая при этом неизбежную реализацию любой неопределенности $y \in Y$. В настоящей же статье будем учитывать дополнительно N новых критериев: риски, возникающие при указанном увеличении исходов. Точнее, в статье будем дополнительно учитывать также и N новых критериев, а именно функции риска Сэвиджа–Ниханса (возникающие при указанном увеличении).

Итак, настоящая статья посвящена математическому обоснованию способа построения стратегии в МЗН, «стреляющей» одновременно по двум целям: увеличению гарантий всех исходов и при этом уменьшению рисков (сопровождающих такое увеличение).

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке конкурсного РФФИ (грант 14–01–90408 Укр_а) и НАН Украины (грант 03–01–14).

§ 1. Принцип минимаксного сожаления (по Сэвиджу–Нихансу)

В 1939 году румынский математик Абрахам Вальд (1902–1950), эмигрировавший в 1938 году в Америку, ввел [1] принцип максимина (гарантированного результата), позволяющего находить гарантированный исход в однокритериальной задаче при неопределенности (ОЗН). Почти через 10 лет немецкий математик Ю. Ниханс (в 1948 году) и американский математик, экономист и статистик Леонард Сэвидж (в 1951) году предложили [2, 3] принцип минимаксного сожаления (ПМС), позволяющий для ОЗН строить гарантированный риск, получивший в литературе название «риск по Сэвиджу» (позднее назван критерием Ниханса–Сэвиджа). Заметим, что Леонард Сэвидж во время Второй мировой войны работал ассистентом по статистике у самого Джона фон Неймана, что, несомненно, сказалось на появлении ПМС. С 1977 года в США утверждена премия Сэвиджа, которая ежегодно присуждается авторам двух самых выдающихся докторских диссертаций в области экономики и статистики.

Для однокритериальной задачи $\Gamma_1 = \langle X, Y, \phi(x, y)\rangle$ ПМС заключается в построении пары $(x^r, R^r_\phi) \in X \times \mathbb{R}$, удовлетворяющей цепочке равенств

$$R^r_\phi = \max_{y\in Y} R_\phi(x^r, y) = \min_{x\in X}\max_{y\in Y} R_\phi(x, y), \tag{1.1}$$

где *функция риска* (по Сэвиджу–Нихансу) [2, 3] имеет вид

$$R_\phi(x, y) = \max_{z\in X} \phi(z, y) - \phi(x, y). \tag{1.2}$$

Само значение R^r_ϕ из (1.1) называют *риском* (по Сэвиджу–Нихансу) в задаче Γ_1. Функция риска $R_\phi(x, y)$ оценивает, насколько реализовавшееся значение критерия $\phi(x, y)$ «не доставляет самого лучшего» (для ЛПР в задаче Γ_1) значения $\max\limits_{z\in X} \phi(z, y)$. Очевидно, что ЛПР стремится (за счет выбора своей стратегии $x \in X$) по возможности уменьшить $R_\phi(x, y)$, естественно рассчитывая (по принципу гарантированного результата) на наибольшее противодействие со стороны неопределенности (см. (1.1)). Поэтому, следуя (1.1), (1.2), ЛПР является *оптимистом* (стремится к «самому хорошему для себя» значению $\max\limits_{x\in X} \phi(x, y)$) в отличие от ЛПР-пессимиста, ориентированного на «самый плохой для него» случай: на максиминные решения

$$\big(x^0, \phi^0 = \max_{x\in X}\min_{y\in Y} \phi(x, y) = \min_{y\in Y} \phi(x^0, y)\big)$$

Далее будем считать, что ЛПР в задаче (0.1) выступает как оптимист: он при принятии решения формирует для каждой компоненты $f_i(x, y)$ $(i \in \mathbb{N})$ векторного критерия $f(x, y)$ свою функцию риска (по Сэвиджу–Нихансу):

$$R_i(x, y) = \max_{z\in X} f_i(z, y) - f_i(x, y) \quad (i \in \mathbb{N}), \tag{1.3}$$

значение которой, напомним, принято называть *риском* (по Сэвиджу–Нихансу). Отметим два обстоятельства: во-первых, каждому критерию $f_i(x, y)$ из (0.1) будет отвечать «свой» риск $R_i(x, y)$ (см. (1.3)); во-вторых, ЛПР стремится выбрать стратегии $x \in X$ таким образом, чтобы по возможности уменьшить все риски $R_i(x, y)$, одновременно (подчеркнем еще раз) ориентируясь на реализацию любой стратегической неопределенности $y(\cdot) \in Y^X$, $y(x) : X \to Y$.

Замечание 1. Модели вида (0.1) появляются, например, на рынке, когда продавец в условиях непредвиденного импорта пытается максимизировать свою прибыль.

Обзор возможных неопределенностей можно найти в книгах [4, с. 102–106; 5, с. 19–32] и других публикациях.

Присутствие неопределенностей приводит к появлению в Γ_1 множеств

$$\phi(x, Y) = \{\phi(x, y) |\, y \in Y\},$$

«порожденных» $x \in X$. Множество $\phi(x, Y)$ можно «сузить», используя риски. Что же такое риск? Известный российский специалист по теории оптимизации Т.К. Сиразетдинов считает, что в настоящее время не существует строгого математического определения риска [6, с. 31]. В монографии [7, с. 15] приведено шестнадцать возможных определений риска. Большинство из них требуют статистических данных о неопределенности. Однако зачастую ЛПР не обладает подобной информацией (по тем или иным причинам). Именно такие ситуации и рассматриваются в настоящей статье.

Поэтому под *риском* будем далее понимать *возможность отклонения реализующихся значений от желаемых*. Заметим, что это определение перекликается с «обычными» микроэкономическими рисками, описанными, например, в [8, с. 40–50], ему полностью соответствует указанный выше риск (по Сэвиджу–Нихансу).

Наконец, учет рисков является актуальной задачей в экономике, что подтверждает Нобелевская премия 1990 года, присужденная Гарри Максу Марковицу [9] за новый подход к исследованию риска распределения инвестиций и диверсификации ожидаемых инвестиционных доходов. В настоящей статье идея этого подхода распространяется на многокритериальный случай. Также в публикациях по макроэкономике [4, с. 103; 8, с. 5] всех лиц, принимающих решения, делят на три категории. К первой относятся те, кто не любит рисковать (*рискофобы*: греч. «phobos», означает «боязнь» чего-либо), вторые — любители риска (*рискофилы*: греч. «philia», означает «любовь» к чему-либо) и, наконец, третьи, кто решил одновременно учитывать как исходы, так и риски (*рисконейтралы*). В настоящей статье будем считать ЛПР рисконейтралом (и, конечно, как подчеркнуто выше, оптимистом).

§ 2. Сильные гарантии и переход от (0.1) к $2N$-критериальной задаче

Итак, формируя для каждого из N критериев $f_i(x, y)$ $(i \in \mathbb{N})$ его функцию риска $R_i(x, y)$ по формулам (1.3), приходим к следующему расширению МЗН (0.1) до $2N$-критериальной задачи:

$$\langle \mathbb{N}, X, Y, \{f_i(x, y), -R_i(x, y)\}_{i \in \mathbb{N}} \rangle. \tag{2.1}$$

В (2.1) $\mathbb{N}$, X и Y те же, что и в (0.1), а к векторному критерию $f(x, y)$ добавился N-вектор $-R(x, y) = \big(-R_1(x, y), \ldots, -R_N(x, y)\big)$, причем последний специально взят со знаком минус для «единообразия действия» стратегии $x \in X$ на каждый из $2N$ критериев $f_i(x, y)$, $-R_i(x, y)$ $(i \in \in \mathbb{N})$. А именно, в (2.1) ЛПР формирует уже такую свою стратегию $x \in X$, чтобы по возможности *увеличить* значение каждой компоненты $f_i(x, y)$, $-R_i(x, y)$ $(i \in \mathbb{N})$ двух N-векторов $f(x, y)$ и $-R(x, y)$. При этом ЛПР должен учесть возможность реализации любой неопределенности $y \in Y$ (заметим, что увеличение $-R_i(x, y)$ эквивалентно уменьшению $R_i(x, y)$ за счет знака минус и $R_i(x, y) \geqslant 0$).

Перейдем к *сильным гарантиям* для критериев. Второй автор настоящей статьи в серии работ [10, 11] предложил три способа учета «действий» неопределенностей: аналог седловой точки [10] и два аналога максимина [11] — сильная и векторная гарантии. Отметим, что сильная гарантия используется в настоящей работе, а векторная гарантия применялась в [12].

Определение 1. Скалярная функция $f_i[x]$ называется *сильной гарантией* критерия $f_i(x, y)$: $X \to Y$, если при каждом $x \in X$ имеют место неравенства

$$f_i[x] \leqslant f_i(x, y) \quad \forall y \in Y \quad (i \in \mathbb{N}).$$

Замечание 2. Очевидно, что функции $f_i[x] = \min_{y \in Y} f_i(x, y)$ $\forall x \in X$ являются сильной гарантией $f_i(x, y)$. Тем самым проясняется способ построения сильных гарантий для всех $2N$ критериев из (2.1).

Перейдем к нахождению сильных гарантий $R_i[x]$ для функций риска $R_i(x, y)$ из (1.3). Осуществим его в три этапа. Во-первых, определим

$$\psi_i(y) = \max_{z \in X} f_i(z, y) \quad \forall y \in Y \quad (i \in \mathbb{N}).$$

Во-вторых, строится функция риска (по Сэвиджу–Нихансу)

$$R_i(x, y) = \psi_i(y) - f_i(x, y) \quad (i \in \mathbb{N}).$$

В-третьих, определяется сильная гарантия $\min\limits_{y \in Y}[-R_i(x, y)]$, то есть

$$R_i[x] = \max_{y \in Y} R_i(x, y) \quad (i \in \mathbb{N}).$$

Заметим, что ЛПР стремится по возможности уменьшить риск $R_i(x, y)$ за счет подходящего выбора $x \in X$, ориентируясь при этом на реализацию $\forall y \in Y$.

Если приведенные в этом замечании функции $f_i[x]$, $-R_i[x]$ существуют, то тогда они являются сильными гарантиями $f_i(x, y)$ и $-R_i(x, y)$ соответственно. В самом деле, для каждого $x \in X$ справедливы импликации

$$\big[f_i[x] = \min_{y \in Y} f_i(x, y)\big] \Rightarrow \big[f_i[x] \leqslant f_i(x, y) \quad \forall y \in Y\big],$$
$$\big[-R_i[x] = \min_{y \in Y}(-R_i(x, y))\big] \Rightarrow \big[-R_i[x] \leqslant -R_i(x, y) \quad \forall y \in Y\big].$$

Существование $f_i[x]$ и $R_i[x]$ следует из известного в теории исследования операций следующего утверждения.

Лемма 1 (см. [13, с. 54]). *Если множества X и Y суть компакты, а $f_i(x, y)$ непрерывна на $X \times Y$, то функции $f_i[x] = \min\limits_{y \in Y} f_i(x, y)$ и $\psi_i[y] = \max\limits_{z \in X} f_i(z, y)$ непрерывны на X и Y соответственно.*

Далее, через $\operatorname{comp}\mathbb{R}^n$ обозначается множество компактов из $\mathbb{R}^n$, а непрерывность $f_i(x, y)$ на $X \times Y$ обозначаем как $f_i(x, y) \in C(X \times Y)$.

Замечание 3. Если в МЗН (0.1) критерий $f_i(x, y) \in C(X \times Y)$ и $X \in \operatorname{comp}\mathbb{R}^n$, $Y \in \operatorname{comp}\mathbb{R}^m$, то функция риска (по Сэвиджу–Нихансу) $R_i(x, y)$ $(i \in \mathbb{N})$ из (1.3) непрерывна на $X \times Y$. Действительно, из леммы 1 следует непрерывность $\psi_i[y] = \max\limits_{z \in X} f_i(z, y)$, и поэтому сразу получаем из (1.3) непрерывность разности непрерывных функций $R_i(x, y) = \psi[y] - f_i(x, y)$ $(i \in \mathbb{N})$.

Замечание 4. Функция риска (по Сэвиджу–Нихансу) из (1.3) характеризует отклонение критерия $f_i(x, y)$ от самого «желаемого» для него $\max\limits_{z \in X} f_i(z, y)$. Этот факт побуждает ЛПР при выборе стратегии $x \in X$ стремиться по возможности *уменьшить* разность $R_i(x, y)$ из (1.3), или, что эквивалентно, *увеличить* $-R_i(x, y)$.

Далее исходной задаче МЗН (0.1) поставим в соответствие $2N$-критериальную задачу (2.1). Повторим, что цель ЛПР (на «содержательном уровне») в (2.1) — выбрать стратегию $x \in X$ такую, чтобы все $2N$ критериев $f_i(x, y)$, $-R_i(x, y)$ $(i \in \mathbb{N})$ принимали возможно *большие* значения, при этом ЛПР вынужден рассчитывать на реальность появления любой неопределенности $y \in Y$.

§ 3. Формализация гарантированного по исходам и рискам решения задачи (0.1)

По МЗН имеется довольно обширная литература (в частности, отсылаем к опубликованной в США издательством Academic Press монографии [12]). Особенность же «интервального характера» фигурирующих в (0.1) неопределенностей y (о них известны лишь границы изменений) побуждает ЛПР ориентироваться в (2.1) на доступную в этом случае информацию. В настоящей работе ограничимся сильными гарантиями $f_i[x]$ и $-R_i[x]$ критериев $f_i(x, y)$ и $-R_i(x, y)$ соответственно. Поэтому естественен, на наш взгляд, переход от МЗН (2.1) к многокритериальной «задаче гарантий», в которой неопределенности уже отсутствуют:

$$\Gamma^g = \big\langle X, \{f_i[x], -R_i[x]\}_{i \in \mathbb{N}}\big\rangle.$$

Наконец, критерии $f_i[x]$ и $-R_i[x]$ в Γ^g «тесно связаны» по их «оптимизационному смыслу», ибо $R_i[x]$ оценивает риск ЛПР при формировании исхода $f_i[x]$: увеличение разности $f_i[x] - R_i[x]$ влечет увеличение гарантированного исхода $f_i[x]$ и (либо) уменьшение гарантированного риска $R_i[x]$. Наоборот, уменьшение этой разности влечет уменьшение $f_i[x]$ и (либо) увеличение риска $R_i[x]$. Цель же ЛПР — возможное увеличение $f_i[x]$ и одновременное возможное уменьшение $R_i[x]$ для каждого $i \in \mathbb{N}$. Поэтому $2N$-критериальной задаче Γ^g поставим в соответствие вспомогательную (auxiliary) N-критериальную задачу

$$\Gamma^a = \left\langle X, \{F_i[x] = f_i[x] - R_i[x]\}_{i\in\mathbb{N}} \right\rangle. \tag{3.1}$$

Для формализации решения (0.1) с учетом гарантированных исходов и рисков привлечем одно из понятий векторного максимума в теории многокритериальных задач [14]. Первое такое определение сформулировано в 1909 году итальянским экономистом и социологом Вильфредо Парето (1848–1923) и поэтому получило впоследствии название «максимум по Парето» (эффективное решение).

Мы же будем использовать концепцию максимума по Слейтеру, включающую, как частный случай, максимум по Парето, по-видимому появившийся впервые в отечественной литературе в статье Л. Гурвица, переведенной на русский язык в [15].

Определение 2. Стратегия $x^S \in X$ называется *максимальной по Слейтеру* (иногда говорят *слабо эффективной*) для N-критериальной задачи (3.1), если при любых $x \in X$ несовместна система строгих неравенств

$$F_i[x] > F_i[x^S] \quad (i \in \mathbb{N}).$$

Замечание 5. Из определения 1 следует, что $x^* \in X$ не максимальна по Слейтеру в задаче (3.1), если существует такая стратегия $\overline{x} \in X$, что имеют место N неравенств

$$F_i[\overline{x}] > F_i[x^*] \quad (i \in \mathbb{N}).$$

Утверждение 1 (достаточные условия). *Если*

$$\min_{i\in\mathbb{N}} F_i[x^S] = \max_{x\in X} \min_{i\in\mathbb{N}} F_i[x], \tag{3.2}$$

то стратегия $x^S \in X$ максимальна по Слейтеру в задаче (3.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из равенства (3.2) и замечания 5 следует, что для любой стратегии $x \in X$ существует номер $j \in \mathbb{N}$ такой, что $F_j[x] \leqslant F_j[x^S]$. Таким образом, система неравенств $F_j[x] > F_j[x^S]$ $(i \in \mathbb{N})$ несовместна. Следовательно, x^S максимальна по Слейтеру в (3.1). □

Теорема 1 (существование). *Если $f_i(\cdot) \in C(X \times Y)$ и множества X и Y суть компакты, то в* (3.1) *существует максимальная по Слейтеру стратегия $x^S \in X$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из леммы 1 следует

$$\left[f_i(\cdot) \in C(X \times Y),\ i \in \mathbb{N}\right] \Rightarrow \left[f_i[x] \in C(X),\ i \in \mathbb{N}\right],$$

а из замечания 3 получим, что $R_i(\cdot) \in C(X \times Y)$ $(i \in \mathbb{N})$. Тогда опять-таки, по лемме 1, будет $\min\limits_{i\in\mathbb{N}} F_i[x] = \min\limits_{i\in\mathbb{N}}(f_i[x] - R_i[x]) \in C(X)$ $(i \in \mathbb{N})$. А непрерывная на компакте X функция $\min\limits_{i\in\mathbb{N}} F_i[x]$ достигает своего максимума в некоторой точке $x^S \in X$, то есть имеет место (3.2). Из утверждения 1 тогда следует справедливость теоремы. □

Определение 3. Тройку $(x^S, f[x^S], R[x^S])$ назовем *сильно гарантированным по исходам и рискам решением* МЗН (0.1) (СГИР), если

1) существуют $f_i[x] = \min\limits_{y\in Y} f_i(x, y)$, $R_i[x] = \max\limits_{y\in Y} R_i(x, y)$ $(i \in \mathbb{N})$;

2) стратегия x^S максимальна по Слейтеру в задаче (3.1).

Здесь напомним, что

$$f[x] = (f_1[x], \ldots, f_N[x]), \quad R[x] = (R_1[x], \ldots, R_N[x]),$$
$$R_i[x] = \max_{y \in Y} R_i(x, y), \quad R_i(x, y) = \max_{z \in X} f_i(z, y) - f_i(x, y) \quad (i \in \mathbb{N}).$$

Почему же в качестве «хорошего» решения МЗН (0.1) предлагается сильно гарантированное по исходам и рискам решение (СГИР)?

Во-первых, оно отвечает на исконный русский вопрос «что делать?». Лицу, принимающему решение, предлагается следовать стратегии x^S из тройки $(x^S, f[x^S], R[x^S])$.

Во-вторых, эта стратегия x^S «обеспечит» для всех $i \in \mathbb{N}$ исходы $f_i(x^S, y)$, не меньшие $f_i[x^S]$, с риском $R_i(x^S, y)$, не большим $R_i[x^S]$, при реализации любой неопределенности $y \in Y$ (то есть x^S устанавливает нижние границы для реализующихся при $x = x^S$ исходов и верхние границы для рисков, сопровождающих эту реализацию).

В-третьих, ситуация x^S реализует «самые большие» (в «векторном смысле») — максимальные по Слейтеру — исходы и соответствующие им минус-риски; иначе говоря, не существует другой ситуации $x \neq x^S$, при которой увеличивались бы все гарантии $f_i[x^S]$ по исходам и *одновременно* уменьшились бы все гарантии $R_i[x^S]$ по рискам.

Заметим, что объединение «во-вторых» и «в-третьих» является некоторым аналогом «действия» максиминной стратегии в ОЗН Γ_1. Только внутренний минимум в максимине заменяется для Γ_1 на $\min\limits_{y \in Y} F_i(x, y)$ $(i \in \mathbb{N})$, а внешний максимум — на максимум по Слейтеру. Здесь возможны *два направления* для дальнейших исследований. Первое из них — заменить оптимум по Слейтеру на оптимум по Парето, по Борвейну, по Джоффрину, конусную оптимальность и установить связи между такими разными решениями. Второе направление основывается на стремлении ЛПР к большим исходам, а взятые нами в определении 2 гарантии — «самые маленькие». Поэтому можно заменить скалярные минимумы (из внутреннего минимума в максимине) на векторные (перечислены выше), тем самым увеличив для некоторых $i \in \mathbb{N}$ гарантии.

Также интересны связи между такими решениями (некоторые попытки такого плана проведены в монографии [12]).

Замечание 6. Определение 2 позволяет предложить следующий конструктивный способ построения СГИР. Он сводится к четырем этапам.

Этап 1. По $f_i(x, y)$ найти $\max\limits_{z \in X} f_i(z, y) = \psi_i[y]$ и построить функцию риска (по Сэвиджу–Нихансу) для критерия $f_i(x, y)$, а именно $R_i(x, y) = \psi_i[y] - f_i(x, y)$ $(i \in \mathbb{N})$.

Этап 2. Построить гарантии исходов $f_i[x] = \min\limits_{y \in Y} f_i(x, y)$ и рисков $R_i[x] = \max\limits_{y \in Y} R_i(x, y)$ $(i \in \in \mathbb{N})$.

Этап 3. Для N-критериальной вспомогательной задачи гарантий Γ^a вычислить максимальную по Слейтеру стратегию x^S. Здесь можно применить утверждение 1 или также следующий переход к использованию концепции Парето-максимальности. Напомним это понятие.

Определение 4. Стратегия $x^P \in X$ называется *максимальной по Парето* (*эффективной*) в задаче (3.1), если для любых стратегий $x \in X$ несовместна система неравенств

$$F_i[x] \geqslant F_i[x^P] \quad (i \in \mathbb{N}),$$

из которых хотя бы одно строгое.

Заметим, что, во-первых, из определений 2 и 3 следует, что любая максимальная по Парето стратегия является одновременно максимальной по Слейтеру; обратное, вообще говоря, неверно; во-вторых, согласно лемме Карлина [14, с. 71] стратегия $x^P \in X$, удовлетворяющая условию

$$\max_{x \in X} \sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i F_i[x] = \sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i F_i[x^P] \tag{3.3}$$

при каких-либо $\alpha_i = \text{const} > 0$, будет максимальной по Парето для задачи (3.1).

Положив в (3.3) для двухкритериальной задачи уже постоянные $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, получим для построения максимальной по Парето (а значит, и по Слейтеру) стратегии x^S равенство

$$\max_{x \in X}(F_1[x] + F_2[x]) = F_1[x^S] + F_2[x^S].$$

Этап 4. По x^S определить значения гарантий $f_i[x^S]$ и $R_i[x^S]$ ($i \in \mathbb{N}$) и составить два N-вектора $f[x^S] = (f_1[x^S], \ldots, f_N[x^S])$, $R[x^S] = (R_1[x^S], \ldots, R_N[x^S])$.

Полученная в результате тройка $(x^S, f[x^S], R[x^S])$ как раз и образует искомое СГИР, удовлетворяющее определению 3, то есть в результате применения стратегии x^S порождается для каждого i-го критерия $f_i(x, y)$ гарантированный исход $f_i[x^S]$ с гарантированным риском (по Сэвиджу–Нихансу) $R_i[x^S]$ ($i \in \mathbb{N}$).

§ 4. Риски и исходы при диверсификации вклада по рублевому и валютному депозитам

Как уже ранее упоминалось, всех лиц, принимающих решение, делят на три категории. К первой относят тех, кто не любит рисковать (рискофобы), вторые — любители риска (рискофилы), и, наконец, третьи — кто решил одновременно учитывать как оценки критериев (исходы), так и риски (рисконейтралы). В настоящем разделе статьи как раз и будет найдено решение задачи о диверсификации (за год) вклада по рублевому и валютному депозитам с точки зрения *рисконейтрала*. Заметим, что подобной задаче была посвящена статья [16, p. 9], где получены результаты, отличные от приведенных ниже. Дело в том, что слейтеровские решения образуют множество, элементы которого, вообще говоря, различны. И как в [16], так и в настоящей статье фигурируют разные элементы одного и того же множества.

Перейдем непосредственно к задаче диверсификации. Наращенную за год сумму единичного вклада можно [17, с. 58–60] представить в виде $\phi(x, y) = x(1 + r) + \dfrac{(1 - x)}{k}(1 + d)y$ (далее подробно объясняется почему), и при этом возникает однокритериальная задача $\Gamma_1 = \langle X, Y, \phi(x, y)\rangle$. Исследованию именно такой задачи и посвящена статья [16]. Там найдено гарантированное решение с точки зрения рискофила, рискофоба и рисконейтрала. Отличие настоящей работы от [16] в том, что в [16] исследована задача *однокритериальная* (с одним критерием $\phi(x, y)$), а здесь будем рассматривать *двухкритериальный* аналог Γ_1 с критериями

$$f_1(x) = x(1 + r), \quad f_2(x, y) = \frac{(1 - x)}{k}(1 + d)y. \tag{4.1}$$

Первый критерий означает доход (через год) от вложенной в рублевый депозит суммы x, второй — доход от вложения оставшейся суммы $(1 - x)$ в валютный депозит. В (4.1) r и d — процентные ставки по рублевому и валютному депозитам соответственно; k и y — курсы валюты в начале и в конце года соответственно; $x \in [0; 1]$ — дробь, которая вклад одного рубля распределяет на рублевую и валютную части. Дело в том, что если знаем, как распределить один рубль по депозитам, то становится ясно, как распределить и любую сумму. Тогда x есть доля вложения рубля, а остаток $(1 - x)$ вкладчик конвертирует в валюту $\dfrac{1 - x}{k}$ и помещает ее на валютный депозит. В конце года с помощью обратной конвертации $\dfrac{(1 - x)}{k}(1 + d)y$ валютный вклад по курсу y переводится в рубли и итоговая наличность определяется суммой $f_1(x) + f_2(x, y)$. Для вкладчика требуется определить долю x, при которой такая итоговая наличность будет как можно большей. При этом следует учесть, что будущий курс валюты y, как правило, неизвестен. Но все-таки будем полагать, что он задан коридором возможных значений, а именно $y \in [a, b]$, где постоянные $b > a > 0$ заданы или каким-то образом получены априори.

Итак, математическую модель рассматриваемой двухкритериальной задачи о диверсификации можно представить упорядоченной тройкой

$$\Gamma_2 = \langle X = [0, 1],\ Y = [a, b],\ \{f_i(x, y)\}_{i=1,2}\rangle, \tag{4.2}$$

где функции $f_i(x, y)$ определены в (4.1), в (4.2) — множество $X = [0, 1]$ стратегий x у ЛПР (вкладчика), $Y = [a, b]$ — множество неопределенностей y, наконец, $f_i(x, y)$ — функции полезности (критерии) вкладчика, значения которых называются *исходами*. С точки зрения теории исследования операций Γ_2 есть двухкритериальная задача принятия решений при неопределенности. Наличие неопределенности, а также желание ее учесть тесно связаны с риском — «возможностью отклонения каких-либо величин от желаемых значений» [7, с. 18]. Для этого, как уже упоминалось, будем использовать риски по Сэвиджу–Нихансу. Рассмотрим для (4.2) три случая (см. рис. 1):

$$1)\ \ k\,\frac{1+r}{1+d} \leqslant a; \qquad 2)\ \ k\,\frac{1+r}{1+d} \geqslant b; \qquad 3)\ \ a < k\,\frac{1+r}{1+d} < b.$$

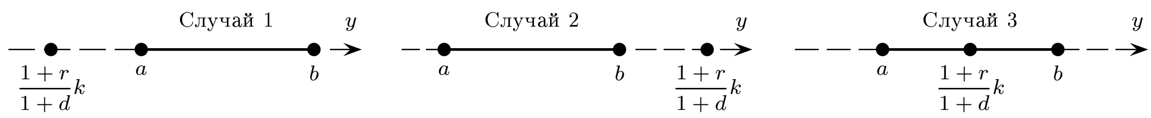

Рис. 1. Три возможности взаимных расположений точки $k\,\dfrac{1+r}{1+d}$ и отрезка $[a, b]$ на оси y

Случаи 1 и 2. Как было упомянуто, Γ_2 — двухкритериальная задача при неопределенности. Решение[2] будем искать на основе определения 4, базирующегося на концепции *оптимальности по Парето*.

Утверждение 2. *Явный вид СГИР в задаче* Γ_2 *в случаях* 1 *и* 2 *будет следующий:*

$$(x^S, f[x^S], R[x^S]) = (x^S; f_1[x^S], f_2[x^S]; R_1[x^S], R_2[x^S]) = \begin{cases} \left(0; 0, \dfrac{1+d}{k}a; 1+r, 0\right), & \dfrac{1+r}{1+d}k \leqslant a, \\ \left(1; 1+r, 0; 0, \dfrac{1+d}{k}b\right), & \dfrac{1+r}{1+d}k \geqslant b, \end{cases}$$

то есть в первом случае (*рис.* 1) *ЛПР вкладывает весь рубль в валютный депозит и в конце года с нулевым риском* (*наверняка!*) *получает сумму не меньше* $\dfrac{1+d}{k}a$*, а во втором — вкладывает рубль в рублевый депозит и через год получает с нулевым риском не меньше* $(1+r)$ *при любых курсах валюты* y *в течение всего года* (*которая в обоих случаях может принимать любые значения от* a *до* b).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проведем в два шага. На первом шаге, следуя этапам из замечания 6, построим итоговую $2N$-критериальную задачу гарантий Γ^g, а затем с ее помощью N-критериальную задачу (3.1). На втором шаге для этой задачи (3.1), используя утверждение 1, найдем максимальную по Слейтеру стратегию x^S, с помощью которой и построим явный вид СГИР для двухкритериальной задачи (4.2).

П е р в ы й ш а г. В (4.2) явный вид критериев следующий:

$$f_1(x, y) = f_1(x) = x(1+r), \quad f_2(x, y) = \frac{(1-x)}{k}(1+d)y.$$

Этап 1. С помощью (1.3) определим функции риска по Сэвиджу–Нихансу:

$$R_1(x, y) = \left[\max_{z\in[0,1]} f_1(z)\right] - (1+r)x = (1+r) - x(1+r) = (1-x)(1+r),$$

$$R_2(x, y) = \left[\max_{z\in[0,1]} f_2(z, y)\right] - (1-x)\frac{1+d}{k}y = \frac{1+d}{k}y - (1-x)\frac{1+d}{k}y = xy\frac{1+d}{k}.$$

[2] Далее первый и второй случаи рассматриваем с помощью концепции максимальности по Парето, к исследованию третьего случая привлекаем утверждение 1.

Этап 2. Построим теперь сильные гарантии исходов и рисков:

$$f_1[x] = \min_{y\in[a,b]} x(1+r) = x(1+r), \qquad f_2[x] = \min_{y\in[a,b]} (1-x)\frac{1+d}{k}y = (1-x)\frac{1+d}{k}a,$$

$$R_1[x] = \max_{y\in[a,b]} R_1(x,y) = (1-x)(1+r), \qquad R_2[x] = \max_{y\in[a,b]} R_2(x,y) = x\frac{1+d}{k}b.$$

Этап 3. Тогда четырехкритериальная задача гарантий будет иметь вид

$$\Gamma^g = \big\langle X = [0,1],\ \{f_i[x],\ -R_i[x]\}_{i=1,2}\big\rangle.$$

Из этапа 2 также следует возможность определить критерии

$$F_1[x] = f_1[x] - R_1[x] = x(1+r) - (1-x)(1+r) = (2x-1)(1+r),$$
$$F_2[x] = f_2[x] - R_2[x] = (1-x)\frac{1+d}{k}a - x\frac{1+d}{k}b = \frac{1+d}{k}a - \frac{1+d}{k}(a+b)x$$

во вспомогательной двухкритериальной задаче (3.1):

$$\Gamma^a = \big\langle X = [0,1],\ \{F_i[x]\}_{i=1,2}\big\rangle.$$

В т о р о й ш а г.
Этап 4. Максимизируем сумму критериев:

$$\max_{[0,1]}(F_1[x] + F_2[x]) = F_1[x^S] + F_2[x^S].$$

В результате построим максимальную по Парето и, следовательно, по Слейтеру стратегию x^S согласно равенству

$$F[x^S] = \max_{[0,1]} F[x]; \tag{4.3}$$

здесь

$$F[x] = F_1[x] + F_2[x] = (2x-1)(1+r) + \frac{1+d}{k}a - \frac{1+d}{k}(a+b)x =$$
$$= x\Big[2(1+r) - \frac{1+d}{k}(a+b)\Big] - (1+r) + \frac{1+d}{k}a = \frac{1+d}{k}\big\{[2\gamma - (a+b)]x - \gamma + a\big\},$$

где постоянная $\gamma = \dfrac{1+r}{1+d}k$. Максимизируемая функция $F[x]$ линейна по x, определена на отрезке $[0,1]$ и поэтому может достигать максимума лишь в граничных точках отрезка $[0,1]$, то есть при $x=0$ и (либо) при $x=1$. При $x=0$ будет $F[0] = \dfrac{1+d}{k}(a-\gamma)$, а при $x=1$ имеем $F[1] = \dfrac{1+d}{k}(\gamma - b)$.

Если $a \geqslant \gamma$, то $a-\gamma \geqslant 0 \geqslant \gamma - a > \gamma - b$. Поэтому $F[0] = \dfrac{1+d}{k}(a-\gamma) > F[1] = \dfrac{1+d}{k}(\gamma-b)$.

Если $\gamma \geqslant b$, то $\gamma - b \geqslant 0 \geqslant b - \gamma > a - \gamma$. Поэтому $F[1] = \dfrac{1+d}{k}(\gamma-b) > F[0] = \dfrac{1+d}{k}(a-\gamma)$.

Таким образом, максимум в (4.3):
а) при $a \geqslant \gamma$ реализуется при $x^S = 0$; б) при $\gamma \geqslant b$ реализуется при $x^S = 1$.
Соответствующие гарантии получим отсюда и из этапа 2: $f_1[0] = 0$, $f_2[0] = \dfrac{1+d}{k}a$, $R_1[0] = 1+r$, $R_2[0] = 0$; $f_1[1] = 1+r$, $f_2[1] = 0$, $R_1[1] = 1$, $R_2[1] = \dfrac{1+d}{k}b$. Итак, с учетом обозначения $\gamma = \dfrac{1+r}{1+d}k$ получили справедливость утверждения 2.

Заметим, что, во-первых, $R_1[0] = 1+r$ означает риск, с которым $f_1[0] = 0$ «не дотягивает» до самого большего исхода $f_1[1] = 1+r$ (в этом смысл риска по Сэвиджу–Нихансу). Аналогичный смысл имеет $R_2[1] = \dfrac{1+d}{k}b$. Во-вторых, результаты утверждения 2 получены в статье [18] способом, отличным от используемого в доказательстве утверждения 2. □

Перейдем к случаю 3. При этом будем применять, во-первых, результаты этапа 3 доказательства предыдущего утверждения 2, в частности двухкритериальную задачу

$$\Gamma^a = \langle X = [0,1],\ \{F_i[x]\}_{i=1,2}\rangle,$$

где

$$F_1[x] = (2x-1)(1+r), \qquad F_2[x] = \frac{1+d}{k}a - \frac{1+d}{k}(a+b)x; \tag{4.4}$$

во-вторых, достаточные условия (3.2) существования x^S из утверждения 1, которые для задачи диверсификации (4.2) примут вид

$$\min_{i=1,2} F_i[x^S] = \max_{x\in[0,1]}\min_{i=1,2} F_i[x].$$

Утверждение 3. *При $a < \dfrac{1+r}{1+d}k < b$ СГИР в задаче Γ_2 имеет вид*

$$\begin{gathered}(x^S,\ f[x^S],\ R[x^S]) = (x^S;\ f_1[x^S],\ f_2[x^S];\ R_1[x^S],\ R_2[x^S]) = \\ = \left(\frac{\gamma+a}{2\gamma+a+b};\ \frac{(\gamma+a)(1+r)}{2\gamma+a+b},\ \frac{\gamma+b}{2\gamma+a+b}\frac{1+d}{k}a;\ (1+r)\frac{\gamma+b}{2\gamma+a+b},\ b\frac{1+d}{k}\frac{\gamma+a}{2\gamma+a+b}\right).\end{gathered} \tag{4.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Построим графики функций $F_1[x]$ и $F_2[x]$ из (4.4). Эти функции линейны по x, определены на компакте $[0,1]$, а графики представлены на рис. 2

Функция $\min\limits_{i=1,2}\{F_1[x], F_2[x]\}$ выделена на рисунке 2 жирной линией, это угол ABC. Точка B определяется для $\max\limits_{x\in[0,1]}\min\limits_{i=1,2}\{F_1[x], F_2[x]\}$ равенством (см. рис. 2)

$$F_1[x^S] = F_2[x^S]$$

или, с учетом (4.4),

$$x^S\big[2(1+r) + \frac{1+d}{k}(a+b)\big] = 1+r+\frac{1+d}{k}a.$$

С учетом обозначения $\gamma = \dfrac{1+r}{1+d}k$ получаем $x^S\big[2\gamma+a+b\big] = \gamma+a$, откуда

$$x^S = \frac{\gamma+a}{2\gamma+a+b}, \quad 1-x^S = \frac{\gamma+b}{2\gamma+a+b}.$$

Наконец, с помощью формул из этапа 2 (доказательство утверждения 2) находим сильные гарантии исходов и рисков:

$$\begin{aligned} f_1[x^S] &= (1+r)\frac{\gamma+a}{2\gamma+a+b}, & f_2[x^S] &= \frac{1+d}{k}a\frac{\gamma+b}{2\gamma+a+b},\\ R_1[x^S] &= (1+r)\frac{\gamma+b}{2\gamma+a+b}, & R_2[x^S] &= \frac{1+d}{k}b\frac{\gamma+a}{2\gamma+a+b}.\end{aligned}$$

Итак, получен (утверждение 3) следующий результат: при $a < \dfrac{1+r}{1+d}k < b$ сильно гарантированное по исходам и рискам решение задачи диверсификации (определение 2) имеет вид (4.5). Оно рекомендует ЛПР от каждого рубля имеющейся общей суммы денег часть

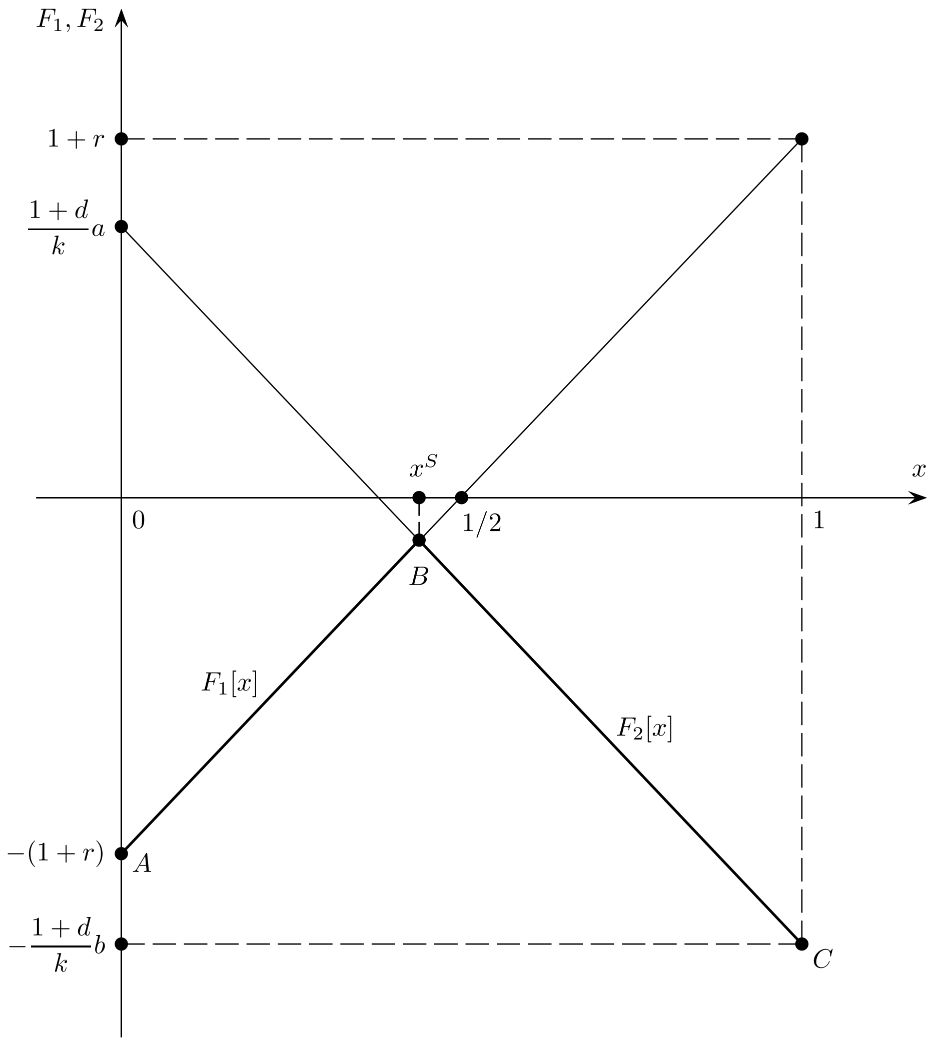

Рис. 2. Графики функций, определенных в (4.4)

$\dfrac{\gamma+a}{2\gamma+a+b}$ вложить в рублевый депозит, а остаток $\dfrac{\gamma+b}{2\gamma+a+b}$ — в валютный. Тогда через год вкладчик получит на рублевом вкладе сумму $(1+r)\dfrac{\gamma+a}{2\gamma+a+b}$ с риском (по Сэвиджу–Нихансу) $(1+r)\dfrac{\gamma+b}{2\gamma+a+b}$, а на валютном «заработает в рублях» $\dfrac{1+d}{k}a\dfrac{\gamma+b}{2\gamma+a+b}$ с риском $\dfrac{1+d}{k}b\dfrac{\gamma+a}{2\gamma+a+b}$, при этом в течение года курс валюты может колебаться в пределах от a до b любым образом. $\square$

Замечание 7. При ограничении $\dfrac{1+r}{1+d}k \leqslant a$ (случай 1) вкладчику рекомендуется все деньги вложить в валютный депозит, ибо через год каждый рубль ему принесет доход не меньше $\dfrac{1+d}{k}a$ с нулевым риском (утверждение 2).

Если же $\dfrac{1+r}{1+d}k \geqslant b$ (случай 2), то вкладчику рекомендуется (утверждение 2) вложить все деньги в рублевый депозит, что принесет ему через год с нулевым риском доход от каждого вложенного рубля не меньше $1+r$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wald A. Contribution to the theory of statistical estimation testing hypothesis // The Annals of Mathematical Statistics. 1939. Vol. 10. P. 299–326. DOI: 10.1214/aoms/1177732144
2. Niehans J. Zur preisbildung bei ungewissen erwartungen // Schweizerische Zeitschrift für Volkswirtschaft und Statistic. 1948. Vol. 84. No. 5. P. 433–456.
3. Savage L.J. The theory of statistical decision // Journal of the American Statistical Association. 1951. Vol. 46. Issue 253. P. 55–67. DOI: 10.2307/2280094
4. Черемных Ю.Н. Микроэкономика. Продвинутый уровень. М.: Инфра-М, 2008. 843 с.
5. Жуковский В.И. Риски в конфликтных ситуациях. М.: URSS, 2011. 330 с.
6. Сиразетдинов Т.К., Сиразетдинов Р.Т. Проблема риска и его моделирование // Проблемы человеческого риска. 2007. № 1. С. 31–43.
7. Шахов В.В. Введение в страхование. Экономический аспект. М.: Финансы и статистика, 2001. 286 с.
8. Цветкова Е.В., Арлюкова Н.О. Риск в экономической деятельности. СПб.: ИВЭСЭП, 2002. 64 с.
9. Markowitz H. Portfolio selection // The Journal of Finance. 1952. Vol. 7. No. 1. P. 77–91. DOI: 10.2307/2975974
10. Жуковский В.И., Кудрявцев К.Н. Уравновешивание конфликтов при неопределенности. I. Аналог седловой точки // Математическая теория игр и ее приложения. 2013. Т. 5. № 1. С. 27–44.
11. Жуковский В.И., Кудрявцев К.Н. Уравновешивание конфликтов при неопределенности. II. Аналог максимина // Математическая теория игр и ее приложения. 2013. Т. 5. № 2. С. 3–45.
12. Zhukovskiy V.I., Salukvadze M.E. The vector-valued maximin. N.Y. etc.: Academic Press. 1994. 404 p. DOI: 10.1016/s0076-5392(08)x6114-4
13. Морозов В.В., Сухарев А.Г., Федоров В.В. Исследование операций в задачах и упражнениях. М.: Высшая школа, 1986. 285 с.
14. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Физматгиз, 2007. 255 с.
15. Эрроу К.Дж., Гурвиц Л., Удзава Х. Исследования по линейному и нелинейному программированию. М.: Изд-во иностранной литературы, 1962. 334 с.
16. Zhukovskiy V.I., Molostvov V.S., Topchisvili A.L. Proplem of multicurrency deposit diversification — three possible approaches to risk accounting // International Journal of Operations and Quantitative Management. 2014. Vol. 20. No. 1. P. 1–15.
17. Капитоненко В.В. Финансовая математика и ее приложения. М.: Приор, 2000. 140 с.
18. Жуковский В.И., Кириченко М.М. Риски и исходы в многокритериальной задаче при неопределенности // Управление риском. 2016. Т. 18. № 2. С. 17–28.

Поступила в редакцию 11.12.2016

Высокос Мария Ивановна, к. ф.-м. н., доцент, кафедра математики и физики, Государственный гуманитарно-технологический университет, 142611, Россия, г. Орехово-Зуево, ул. Зеленая, 22.
E-mail: mvysokos@mail.ru

Жуковский Владислав Иосифович, д. ф.-м. н., профессор, кафедра оптимального управления, факультет вычислительной математики и кибернетики, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119991, Россия, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы.
E-mail: zhkvlad@yandex.ru

Кириченко Михаил Михайлович, студент, кафедра оптимального управления, факультет вычислительной математики и кибернетики, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119991, Россия, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы.
E-mail: moyomylo11@gmail.com

Самсонов Сергей Петрович, к. ф.-м. н., доцент, кафедра оптимального управления, факультет вычислительной математики и кибернетики, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119991, Россия, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы.
E-mail: samsonov@cs.msu.su

МАТЕМАТИКА 2017. Т. 27. Вып. 1

M. I. Vysokos, V. I. Zhukovskii, M. M. Kirichenko, S. P. Samsonov

A new approach to multicriteria problems under uncertainty

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2017, vol. 27, issue 1, pp. 3–16 (in Russian).

Keywords: multicriteria problems, strong guarantee, Slater and Pareto maximum, minimax regret, deposit diversification.

MSC2010: 90C29

DOI: 10.20537/vm170101

The applicability and novelty of this research lies in that the decision-maker in a multicriteria problem aims not only to maximize guaranteed values of each criterion, but also to minimize the guaranteed risks accompanying the said maximization. The topic of the research lies at the interface of the multicriteria problem theory and the Savage–Niehans minimax regret principle: the concept of a weakly effective estimate has been derived from the MP theory, while estimation of risks with values of the Savage–Niehans regret function has been derived from the minimax regret principle. The scope of this research is limited to interval uncertainties: the decision-maker only knows the limits of the interval, and probabilistic characteristics are missing. A new term is introduced, namely, "strongly guaranteed solution under outcomes and risks"; its existence for "regular"-confined-strategies for the mathematical programming is established. As an example of a practical application, the problem of diversification of a multi-currency deposit is suggested and solved.

REFERENCES

1. Wald A. Contribution to the theory of statistical estimation testing hypothesis, *The Annals of Mathematical Statistics*, 1939, vol. 10, pp. 299–326. DOI: 10.1214/aoms/1177732144
2. Niehans J. Zur preisbildung bei ungewissen erwartungen, *Schweizerische Zeitschrift für Volkswirtschaft und Statistik*, 1948, vol. 84, no. 5. pp. 433–456.
3. Savage L.J. The theory of statistical decision, *Journal of the American Statistical Association*, 1951, vol. 46, issue 253, pp. 55–67. DOI: 10.2307/2280094
4. Cheremnykh Yu.N. *Mikroekonomika. Prodvinutyi uroven'* (Microeconomics. Advanced level), Moscow: Infra, 2008, 843 p.
5. Zhukovskii V.I. *Riski v konfliktnykh situatsiyakh* (Risks in conflict situations), Moscow: URSS, 2011, 330 p.
6. Sirazetdinov T.K., Sirazetdinov R.T. Problems of risk and its modeling, *Problemy Chelovecheskogo Riska*, 2007, no. 1, pp. 31–43 (in Russian).
7. Shakhov V.V. *Vvedenie v strakhovanie. Ekonomicheskii aspekt* (Introduction to insurance. Economic aspect), Moscow: Finansy i Statistika, 2001, 286 p.
8. Tsvetkova E.V., Arlyukova N.O. *Risk v ekonomicheskoi deyatel'nosti* (The risk in economic activity), St. Petersburg: Institute of Foreign Economic Relations, Economics and Law, 2002, 64 p.
9. Markowitz H. Portfolio selection, *The Journal of Finance*, 1952, vol. 7, no. 1, pp. 77–91. DOI: 10.2307/2975974
10. Zhukovskiy V.I., Kudryavtsev K.N. Equilibrating conflicts under uncertainty. I. Analogue of a saddle-point, *Mat. Teor. Igr Pril.*, 2013, vol. 5, issue 1, pp. 27–44 (in Russian).
11. Zhukovskiy V.I., Kudryavtsev K.N. Equilibrating conflicts under uncertainty. II. Analogue of a maximin, *Mat. Teor. Igr Pril.*, 2013, vol. 5, issue 2, pp. 3–45 (in Russian).
12. Zhukovskii V.I., Salukvadze M.E. *The vector-valued maximin*, New York etc.: Academic Press, 1994, 404 p. DOI: 10.1016/s0076-5392(08)x6114-4
13. Morozov V.V., Sukharev A.G., Fedorov V.V. *Issledovanie operatsii v zadachakh i uprazhneniyakh* (Operations research in tasks and exercises), Moscow: Vysshaya Shkola, 1986, 285 p.
14. Podinovskii V.V., Nogin V.D. *Pareto-optimal'nye resheniya mnogokriterial'nykh zadach* (Pareto optimal solutions of multicriteria problems), Moscow: Fizmatgiz, 2007, 255 p.
15. Arrow K.J., Hurwicz L., Uzawa H. *Studies in linear and nonlinear programming*, Stanford: Stanford University Press, 1958. Translated under the title *Issledovaniya po lineinomu i nelineinomu programmirovaniyu*, Moscow: Inostr. Lit., 1962, 336 p.
16. Zhukovskii V.I., Molostvov V.S., Topchishvili A.L. Problem of multicurrency deposit diversification — three possible approaches to risk accounting, *International Journal of Operations and Quantitative Management*, 2014, vol. 20, no. 1, pp. 1–15.

17. Kapitonenko V.V. *Finansovaya matematika i ee prilozheniya* (Financial mathematics and its applications), Moscow: Prior, 2000, 140 p.
18. Zhukovskii V.I., Kirichenko M.M. Risks and outcomes in multicriteria problem under uncertainty, *Upravlenie Riskom*, 2016, vol. 18, no. 2, pp. 17–28 (in Russian).

Received 11.12.2016

Vysokos Mariya Ivanovna, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Mathematics and Physics, Moscow State Regional Institute of Humanities, ul. Zelenaya, 22, Orekhovo-Zuevo, 142611, Russia.
E-mail: mvysokos@mail.ru

Zhukovskii Vladislav Iosifovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Optimal Control, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University, GSP-1, Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia.
E-mail: zhkvlad@yandex.ru

Kirichenko Mikhail Mikhailovich, Student, Department of Optimal Control, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University, GSP-1, Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia.
E-mail: moyomylo11@gmail.com

Samsonov Sergei Petrovich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Optimal Control, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University, GSP-1, Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia.
E-mail: samsonov@cs.msu.su