

УДК 519.6

© А. Г. Ченцов, А. А. Ченцов

**МАРШРУТИЗАЦИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПРИ ДИНАМИЧЕСКИХ
ОГРАНИЧЕНИЯХ: ЗАДАЧА «НА УЗКИЕ МЕСТА»¹**

Рассматривается усложненный вариант задачи маршрутизации «на узкие места», а именно: исследуется задача последовательного обхода мегаполисов с условиями предшествования. Предполагается, что функции стоимости, а также «текущие» ограничения на выбор перемещений зависят от списка заданий, не выполненных на данный момент времени. Предложен вариант широко понимаемого динамического программирования, в рамках которого не предусматривается (при наличии условий предшествования) построение всего массива значений функции Беллмана; конструируются специальные слои упомянутой функции, реализующие в своей совокупности частичный (это способствует снижению вычислительной сложности) массив ее значений. На этой основе предлагается алгоритм определения значения задачи (глобального экстремума), при компьютерной реализации которого в памяти всякий раз находится только один слой функции Беллмана; найденное значение может использоваться при тестировании эвристик. Построен и реализован на ПЭВМ также оптимальный алгоритм «полного» решения маршрутной задачи, в рамках которого на этапе построения маршрута и трассы используются уже все слои функции Беллмана.

Ключевые слова: маршрут, трасса, условия предшествования, динамическое программирование.

DOI: 10.20537/vm160110

Введение

Задачи маршрутизации возникают в самых различных областях практической деятельности: морские и авиационные перевозки, ядерная энергетика, машиностроение. Типичной особенностью соответствующих прикладных задач упомянутого типа является большое число разнообразных ограничений и (нередко) достаточно сложный характер функций стоимости. Так, в некоторых постановках, возникающих в ядерной энергетике и связанных со снижением облучаемости персонала АЭС при последовательном демонтаже излучающих элементов (это касается как задачи о демонтаже энергоблока, выведенного из эксплуатации, так и задачи утилизации источников излучения при аварийных ситуациях типа Чернобыля и Фукусимы), исполнитель находится под воздействием тех и только тех элементов, которые не демонтированы (не утилизированы) на текущий момент; состав же таких элементов зависит, в свою очередь, от конкретного выбора маршрута. В итоге возникает зависимость функций стоимости, определяющих дозовую нагрузку работника, от списка заданий, не выполненных на текущий момент времени. Более того, влияние упомянутого списка может проявляться и в прямом запрете на некоторые типы перемещений в связи с недопустимо большой радиацией; в то же время после проведения ряда работ, связанных с демонтажом источников, данные направления могут уже стать допустимыми. Следовательно, и сами текущие ограничения на возможный выбор перемещений могут зависеть от списка заданий (в данном случае невыполненных).

В инженерных задачах, связанных с листовой резкой на машинах с числовым программным управлением (ЧПУ), возникает зависимость функций стоимости и «текущих» ограничений от списка уже выполненных заданий. Эта зависимость связана с необходимостью учета технологических ограничений на прочность листа и деталей, тепловых допусков и других условий. Надо отметить, однако, что несложными преобразованиями и здесь можно свести дело к зависимости от списка невыполненных (на текущий момент) заданий. Маршрутные задачи с упомянутой зависимостью (и с другими осложняющими обстоятельствами) рассматривались в [1–3], где

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант №14-11-00109).

была построена нестандартная версия динамического программирования (ДП), ориентированная прежде всего на инженерные приложения, связанные с листовой резкой на машинах с ЧПУ (см., в частности, [4–6]). Точнее, в [1–3] построено решение «аддитивной» задачи последовательного обхода мегаполисов с ограничениями различных типов: рассматривались условия предшествования и ограничения на перемещения, зависящие от списка заданий, не выполненных на момент перемещения. Данное решение доведено до компьютерных программ (см. [2]). Источниками постановки [1–3] являются актуальные инженерные задачи. В частности, это касается проблемы маршрутизации движения (режущего) инструмента при листовой резке на машинах с ЧПУ (см. [4–6]). Заметим, что для упомянутых приложений наиболее естественной представляется «аддитивная» версия задачи (имеется в виду аддитивное агрегирование затрат, возникающих на этапах перемещений).

В то же время, с точки зрения разработки адекватной теории, столь же естественным представляется вопрос, а насколько важен именно такой вариант агрегирования? В настоящей работе, продолжающей [7], показано, что конструкция [1–3] в полной мере сохраняет свое значение и для агрегирования, отвечающего задаче «на узкие места». Рассматривается вариант данной задачи при условиях предшествования и динамических ограничениях (имеется в виду случай, когда текущие ограничения формируются в зависимости от списка заданий, не выполненных на момент перемещения). К этой постановке легко сводится, как уже отмечалось, случай, когда возникает аналогичная зависимость от списка заданий, которые уже выполнены, что как раз и имеет место в содержательных задачах, связанных с листовой резкой на машинах с ЧПУ. Итак, целью настоящей работы является распространение конструкций [1–3] на «неаддитивный» вариант маршрутной задачи с условиями предшествования и динамическими ограничениями.

§ 1. Обозначения общего характера

Используется стандартная теоретико-множественная символика (кванторы, связи; \emptyset — пустое множество, \triangleq — равенство по определению). Семейством называем множество, все элементы которого — множества. Для всякого множества H полагаем, что $\mathcal{P}(H)$ и $\mathcal{P}'(H)$ — семейства всех и всех непустых подмножеств (п/м) H соответственно; через $\text{Fin}(H)$ обозначаем семейство всех конечных множеств из $\mathcal{P}'(H)$, то есть семейство всех непустых конечных п/м H . Если p и q — какие-либо объекты, то через $\{p; q\}$ обозначаем (единственное) множество, содержащее в качестве своих элементов p, q и не содержащее никаких других элементов: $\{p; q\}$ — неупорядоченная пара объектов p, q (двоеточие). Если x — объект, то в виде $\{x\} \triangleq \{x; x\}$ получаем синглетон, содержащий x . Следуя [8, с. 87], полагаем для любых двух объектов a и b , что $(a, b) \triangleq \{\{a\}; \{a; b\}\}$; получаем упорядоченную пару (УП) упомянутых объектов. Если же z есть УП (каких-либо объектов), то через $\text{pr}_1(z)$ и $\text{pr}_2(z)$ обозначаем первый и второй элементы z соответственно, однозначно определяемые условием $z = (\text{pr}_1(z), \text{pr}_2(z))$. Если a, b и c — объекты, то [9, с. 17] определяем триплет $(a, b, c) \triangleq ((a, b), c)$ как УП с первым элементом (a, b) и вторым элементом c . Следуя [9, с. 17], используем стандартное соглашение: если A, B и C — непустые множества, то $A \times B \times C \triangleq (A \times B) \times C$; если, к тому же, D — непустое множество, $\varphi: A \times B \times C \rightarrow D$, $x \in A \times B$ и $y \in C$, то определено значение $\varphi(x, y) \in D$ отображения φ , обозначаемое также через $\varphi(x_1, x_2, y)$ при $x_1 \triangleq \text{pr}_1(x)$ и $x_2 \triangleq \text{pr}_2(x)$.

Как обычно, полагаем, что \mathbb{R} — вещественная прямая, $\mathbb{N} \triangleq \{1; 2; \dots\}$, $\mathbb{N}_o \triangleq \{0\} \cup \mathbb{N} = \{0; 1; 2; \dots\}$ и

$$\overline{p, q} \triangleq \{i \in \mathbb{N}_o \mid (p \leq i) \& (i \leq q)\} \quad \forall p \in \mathbb{N}_o \quad \forall q \in \mathbb{N}_o$$

(ясно, что $\overline{1, 0} = \emptyset$ и $\overline{1, k} = \{s \in \mathbb{N} \mid s \leq k\}$ при $k \in \mathbb{N}$). Всякому непустому конечному множеству K сопоставляем его мощность $|K| \in \mathbb{N}$ (количество элементов) и непустое множество $(\text{bi})[K]$ всех биекций [10, с. 87] «промежутка» $\overline{1, |K|}$ на K ; если $K = \overline{1, s}$ при $s \in \mathbb{N}$, то $(\text{bi})[K] = (\text{bi})[\overline{1, s}]$ есть множество всех перестановок в $\overline{1, s}$. Полагаем, что $|\emptyset| \triangleq 0$.

Если T — непустое множество, то через $\mathcal{R}_+[T]$ обозначаем множество всех функций, действующих из T в полуось $[0, \infty[\triangleq \{\xi \in \mathbb{R} \mid 0 \leq \xi\}$ (итак, элементы $\mathcal{R}_+[T]$ — суть неотрицательные вещественнозначные функции на T и только они).

Ниже используется следующее простое свойство ассоциативности: $\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R} \quad \forall c \in \mathbb{R}$

$$\sup(\{\sup(\{a; b\}); c\}) = \sup(\{a; \sup(\{b; c\})\}). \tag{1.1}$$

§ 2. Специальные обозначения; обсуждение задачи

Фиксируем непустое множество X , точку $x^o \in X$ (база процесса), число $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$, множества

$$M_1 \in \text{Fin}(X), \dots, M_N \in \text{Fin}(X), \tag{2.1}$$

именуемые мегаполисами, а также (конечные) отношения

$$\mathbb{M}_1 \in \mathcal{P}'(M_1 \times M_1), \dots, \mathbb{M}_N \in \mathcal{P}'(M_N \times M_N). \tag{2.2}$$

Всюду в дальнейшем предполагается, что

$$(x^o \notin M_j \quad \forall j \in \overline{1, N}) \& (M_p \cap M_q = \emptyset \quad \forall p \in \overline{1, N} \quad \forall q \in \overline{1, N} \setminus \{p\}).$$

При $j \in \overline{1, N}$ элементы \mathbb{M}_j (а это УП) определяют возможные варианты выполнения работ, связанных с посещением M_j ; условимся называть такие работы внутренними. Нашей целью будет изучение процессов

$$x^o \rightarrow (x_{1,1} \in M_{\alpha(1)} \rightsquigarrow x_{1,2} \in M_{\alpha(1)}) \rightarrow \dots \rightarrow (x_{N,1} \in M_{\alpha(N)} \rightsquigarrow x_{N,2} \in M_{\alpha(N)}), \tag{2.3}$$

для которых $(x_{1,1}, x_{1,2}) \in \mathbb{M}_{\alpha(1)}, \dots, (x_{N,1}, x_{N,2}) \in \mathbb{M}_{\alpha(N)}$, где α — перестановка в $\overline{1, N}$. В дальнейшем предполагается, что $\mathbb{P} \triangleq (\text{bi})[\overline{1, N}]$. Полагаем, что выбор перестановки $\alpha \in \mathbb{P}$ (маршрута) и траекторий в (2.3) находится в руках исследователя. Перемещения из x^o в $x_{1,1}$ и из $x_{j,2}$ в $x_{j+1,1}$ при $j \in \overline{1, N-1}$ называем внешними. Для оценивания внешних перемещений и внутренних работ будут введены специальные функции стоимости.

С учетом (2.2) получаем следующее свойство: если $j \in \overline{1, N}$, то

$$(\mathfrak{M}_j \triangleq \{\text{pr}_1(z) : z \in \mathbb{M}_j\} \in \mathcal{P}'(M_j)) \& (\mathbf{M}_j \triangleq \{\text{pr}_2(z) : z \in \mathbb{M}_j\} \in \mathcal{P}'(M_j)). \tag{2.4}$$

Из (2.1), (2.2) и (2.4), в свою очередь, следует, что

$$\left(\mathbf{X} \triangleq \{x^o\} \cup \left(\bigcup_{i=1}^N \mathfrak{M}_i \right) \in \text{Fin}(X) \right) \& \left(\mathbf{X} \triangleq \{x^o\} \cup \left(\bigcup_{i=1}^N \mathbf{M}_i \right) \in \text{Fin}(X) \right). \tag{2.5}$$

Введем в рассмотрение набор мультифункций (м/ф), которые далее будут использоваться для описания динамических ограничений.

Итак, полагаем $\mathfrak{N} \triangleq \mathcal{P}'(\overline{1, N})$ и фиксируем следующие м/ф:

$$A_1 : \mathbf{X} \times \mathfrak{N} \longrightarrow \mathcal{P}'(M_1), \dots, A_N : \mathbf{X} \times \mathfrak{N} \longrightarrow \mathcal{P}'(M_N). \tag{2.6}$$

Мы полагаем, что при $j \in \overline{1, N}, x \in \mathbf{X}$ и $K \in \mathfrak{N}$ непустое множество $A_j(x, K)$ исчерпывает возможности перемещения из x в мегаполис M_j в условиях, когда K есть список заданий (включающих каждую процедуру перемещения и выполнения внутренних работ), не выполненных на момент данного перемещения. Всюду в дальнейшем полагаем, что

$$A_j(x, K) \cap \mathfrak{M}_j \neq \emptyset \quad \forall x \in \mathbf{X} \quad \forall K \in \mathfrak{N} \quad \forall j \in K \tag{2.7}$$

((2.7) обеспечивает возможность стыковки внешних перемещений и внутренних работ). Теперь мы полагаем, что система условий в (2.3) дополняется следующими требованиями: $x_{1,1} \in A_{\alpha(1)}(x^o, \overline{1, N})$ и $x_{j,1} \in A_{\alpha(j)}(x_{j-1,2}, \{\alpha(t) : t \in \overline{j, N}\})$ при $j \in \overline{2, N}$. Эти требования можно трактовать как динамические ограничения (ДО).

Замечание 1. В связи с (2.7) отметим «нежесткий» характер рассматриваемых ДО. В уже упоминавшейся инженерной задаче, связанной с листовой резкой на машинах с ЧПУ, имеется целый ряд ограничений на выбор очередной точки врезки, зависящих от уже проделанной работы. В принципе, здесь возможна ситуация (при неудачном раскрое), когда, с точки зрения соблюдения всех условий, выбор очередной точки врезки для некоторого контура невозможен. Постулируя (2.7), мы все же полагаем возможным для таких случаев определенное «смягчение» первоначальных условий с целью избежания «тупикиков». Здесь же заметим, что и определение м/ф (2.6), и требования (2.7) включают некоторую избыточность с точки зрения содержательной задачи. Так, например, постулируя непустоту множества $A_j(x, K) \cap \mathfrak{M}_j$ при $x \in \mathbf{X}, K \in \mathfrak{N}$ и $j \in K$, мы допускаем случай $x \in \mathbf{M}_j$, а тогда при $y \in A_j(x, K) \cap \mathfrak{M}_j$ перемещение $x \rightarrow y$ означает выполнение «петли», что не соответствует (2.3). Мы полагаем, однако, что условие стыковки (см. (2.7)) содержательно на тех п/м областях определения м/ф (2.6), которые только и могут реализоваться в схеме (2.3), а доопределение таких «естественных» м/ф с целью получения (2.6), (2.7) выбрано тем или иным «удобным» способом, не влияющим (см. схему (2.3)) на последующие результаты. \square

Пусть $\tilde{\mathbf{X}} \triangleq \mathbf{X} \cup \mathbf{X}$; тогда $\tilde{\mathbf{X}} \in \text{Fin}(X)$. Пусть теперь \mathbb{Z} есть def множество всех кортежей

$$(z_i)_{i \in \overline{0, N}} : \overline{0, N} \longrightarrow \tilde{\mathbf{X}} \times \mathbf{X}. \quad (2.8)$$

Среди кортежей (2.8) мы выделяем траектории, отвечающие (2.3): если $\alpha \in \mathbb{P}$, то

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_\alpha \triangleq & \left\{ (z_i)_{i \in \overline{0, N}} \in \mathbb{Z} \mid (z_0 = (x^o, x^o)) \& \right. \\ & \left. \& (z_t \in \mathbb{M}_{\alpha(t)} \quad \forall t \in \overline{1, N}) \& \left(\text{pr}_1(z_s) \in A_{\alpha(s)}(\text{pr}_2(z_{s-1}), \{\alpha(t) : t \in \overline{s, N}\}) \quad \forall s \in \overline{1, N} \right) \right\} \end{aligned} \quad (2.9)$$

используется в качестве множества всех траекторий, согласованных с маршрутом α . В [2, раздел 4] установлено, что каждое из множеств (2.9) непусто, а тогда

$$\mathcal{Z}_\alpha \in \text{Fin}(\mathbb{Z}) \quad \forall \alpha \in \mathbb{P}. \quad (2.10)$$

Условия предшествования. Введем в рассмотрение отношение $\mathbf{K} \in \mathcal{P}(\overline{1, N} \times \overline{1, N})$. Итак, \mathbf{K} — множество такое, что при $z \in \mathbf{K}$ непременно $z = (i, j)$, где $i \in \overline{1, N}$ и $j \in \overline{1, N}$; называем $i = \text{pr}_1(z)$ и $j = \text{pr}_2(z)$ индексами отправителя и получателя соответственно. Полагаем далее, что

$$\forall \mathbf{K}_o \in \mathcal{P}'(\mathbf{K}) \exists z_o \in \mathbf{K}_o : \text{pr}_1(z_o) \neq \text{pr}_2(z) \quad \forall z \in \mathbf{K}_o. \quad (2.11)$$

В [11, часть 2] указаны конкретные классы задач, для которых (2.11) выполнено. При этом (см. (2.11); [11, часть 2])

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \triangleq & \left\{ \alpha \in \mathbb{P} \mid \forall z \in \mathbf{K} \quad \forall t_1 \in \overline{1, N} \quad \forall t_2 \in \overline{1, N} \left(z = (\alpha(t_1), \alpha(t_2)) \right) \implies (t_1 < t_2) \right\} = \\ & = \left\{ \alpha \in \mathbb{P} \mid \alpha^{-1}(\text{pr}_1(z)) < \alpha^{-1}(\text{pr}_2(z)) \quad \forall z \in \mathbf{K} \right\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{P}). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Как следствие имеем (см. (2.10), (2.11)), что

$$\mathbf{D} \triangleq \left\{ (\alpha, (z_t)_{t \in \overline{0, N}}) \in \mathbf{A} \times \mathbb{Z} \mid (z_t)_{t \in \overline{0, N}} \in \mathcal{Z}_\alpha \right\} \in \text{Fin}(\mathbf{A} \times \mathbb{Z}); \quad (2.13)$$

рассматриваем далее (2.13) как множество допустимых решений (ДР).

Функции стоимости. Фиксируем в дальнейшем кортеж $(\mathbf{c}, c_1, \dots, c_N)$ функций с неотрицательными вещественными значениями:

$$\mathbf{c} \in \mathcal{R}_+[\mathbf{X} \times \mathbf{X} \times \mathfrak{N}], \quad c_1 \in \mathcal{R}_+[\mathbf{X} \times \mathbf{X} \times \mathfrak{N}], \quad \dots, \quad c_N \in \mathcal{R}_+[\mathbf{X} \times \mathbf{X} \times \mathfrak{N}]. \quad (2.14)$$

Полагаем, что \mathbf{c} используется для оценивания внешних перемещений, а c_1, \dots, c_N — для оценивания внутренних работ. Мы рассматриваем функции (2.14) как продолжения зависимостей,

задаваемых в содержательных задачах на п/м $\mathbf{X} \times \mathbb{X} \times \mathfrak{N}$ и $\mathbb{X} \times \mathbf{X} \times \mathfrak{N}$ соответственно. Так, в частности, при $j \in \overline{1, N}$ значения $c_j(z, K)$ функции c_j нам потребуются реально при $z \in \mathbb{M}_j$ и $K \in \mathfrak{N}$ со свойством $j \in K$ (напомним в этой связи, что $\mathbb{M}_j \subset \mathfrak{M}_j \times \mathbf{M}_j$ согласно (2.2), (2.4)).

Заметим, что при $\alpha \in \mathbb{P}$, $(z_i)_{i \in \overline{0, N}} \in \mathcal{Z}_\alpha$ и $s \in \overline{1, N}$ определено значение

$$\mathbf{c}(\text{pr}_2(z_{s-1}), \text{pr}_1(z_s), \{\alpha(l) : l \in \overline{s, N}\}) + c_{\alpha(s)}(z_s, \{\alpha(l) : l \in \overline{s, N}\}) \in [0, \infty[.$$

С учетом этого полагаем теперь, что при $\alpha \in \mathbb{P}$ и $(z_t)_{t \in \overline{0, N}} \in \mathcal{Z}_\alpha$

$$\mathfrak{C}_\alpha[(z_t)_{t \in \overline{0, N}}] \triangleq \max_{s \in \overline{1, N}} [\mathbf{c}(\text{pr}_2(z_{s-1}), \text{pr}_1(z_s), \{\alpha(l) : l \in \overline{s, N}\}) + c_{\alpha(s)}(z_s, \{\alpha(l) : l \in \overline{s, N}\})] \quad (2.15)$$

(в дальнейшем существенны значения (2.15) при $\alpha \in \mathbf{A}$). В качестве основной далее рассматривается задача

$$\mathfrak{C}_\alpha[(z_t)_{t \in \overline{0, N}}] \longrightarrow \min, \quad (\alpha, (z_t)_{t \in \overline{0, N}}) \in \mathbf{D}, \quad (2.16)$$

частный случай которой рассматривался в [7]. Содержательный смысл (2.16) состоит в следующем. Мы полагаем, что процесс (2.3) разбит на однотипные этапы

$$x^o \rightarrow (x_{1,1} \in M_{\alpha(1)} \rightsquigarrow x_{1,2} \in M_{\alpha(1)}), \dots, x_{N-1,2} \rightarrow (x_{N,1} \in M_{\alpha(N)} \rightsquigarrow x_{N,2} \in M_{\alpha(N)}),$$

каждый из которых связан с посещением соответствующего мегаполиса и выполнением там внутренних работ. Вопрос в том, как «расставить» мегаполисы по этапам? Точнее, в какой очередности это сделать? В (2.16) предлагается (оценивая каждый этап) совокупный процесс оценивать стоимостью худшего из этапов, после чего оптимизировать выбор очередности посещения мегаполисов, что и будет означать оптимизацию процессов (2.3) посредством перебора $\alpha \in \mathbf{A}$ и $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}_\alpha$.

Рассматриваемая задача в виде [2, (4.11)] имеет свой «аддитивный» аналог. Как и в [2], для решения будем использовать широко понимаемое ДП.

§ 3. Динамическое программирование

Следуя [11, часть 2], введем отображение \mathbf{I} , действующее в \mathfrak{N} по правилу

$$\mathbf{I}(K) \triangleq K \setminus \{\text{pr}_2(z) : z \in \Xi[K]\},$$

где $\Xi[K] \triangleq \{z \in \mathbf{K} \mid (\text{pr}_1(z) \in K) \& (\text{pr}_2(z) \in K)\}$; здесь $K \in \mathfrak{N}$. С учетом этого вводим допустимость (сразу частичных) маршрутов по вычеркиванию:

$$(\mathbf{I} - \text{bi})[K] \triangleq \{\alpha \in (\text{bi})[K] \mid \alpha(l) \in \mathbf{I}(\{\alpha(t) : t \in \overline{l, |K|}\}) \quad \forall l \in \overline{1, |K|}\} \quad \forall K \in \mathfrak{N}. \quad (3.1)$$

В [11, предложения 2.2.2, 2.2.3] показано, что каждое из множеств (3.1) непусто. Отметим связь допустимости по предшествованию и допустимости по вычеркиванию для «полных» маршрутов (см. [11, (2.2.32), теорема 2.2.1]):

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = (\mathbf{I} - \text{bi})[\overline{1, N}] &= \left\{ \alpha \in \mathbb{P} \mid (\alpha(1) \in \mathbf{I}(\overline{1, N})) \& \right. \\ &\left. \& \left(\alpha(k) \in \mathbf{I}(\overline{1, N} \setminus \{\alpha(t) : t \in \overline{1, k-1}\}) \quad \forall k \in \overline{2, N} \right) \right\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{P}). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Наряду с частичными маршрутами, используем частичные трассы (траектории), для определения которых введем сначала при $K \in \mathfrak{N}$ множество \mathbb{Z}_K всех кортежей

$$(z_i)_{i \in \overline{0, |K|}} : \overline{0, |K|} \longrightarrow \tilde{\mathbb{X}} \times \mathbf{X}$$

(при $K = \overline{1, N}$ имеем равенство $\mathbb{Z}_K = \mathbb{Z}$). Если $x \in \mathbf{X}$, $K \in \mathfrak{N}$ и $\alpha \in (\text{bi})[K]$, то (см. [1]; [2, (4.20), предложение 1])

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(x, K, \alpha) \triangleq & \left\{ (z_t)_{t \in \overline{0, |K|}} \in \mathbb{Z}_K \mid (z_0 = (x, x)) \ \& \ (z_t \in \mathbb{M}_{\alpha(t)} \ \forall t \in \overline{1, |K|}) \ \& \right. \\ & \left. \& \left(\text{pr}_1(z_s) \in A_{\alpha(s)}(\text{pr}_2(z_{s-1}), \{\alpha(t) : t \in \overline{s, |K|}\}) \ \forall s \in \overline{1, |K|} \right) \right\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{Z}_K). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Как следствие получаем при $x \in \mathbf{X}$ и $K \in \mathfrak{N}$, что

$$\mathbf{D}_K(x) \triangleq \{(\alpha, \mathbf{z}) \in (\mathbf{I} - \text{bi})[K] \times \mathbb{Z}_K \mid \mathbf{z} \in \mathcal{Z}(x, K, \alpha)\} \in \text{Fin}((\mathbf{I} - \text{bi})[K] \times \mathbb{Z}_K) \quad (3.4)$$

(множество частичных ДР). Введем теперь в рассмотрение «частичные» задачи. Для этого сначала при $K \in \mathfrak{N}$, $\alpha \in (\text{bi})[K]$ и $(z_t)_{t \in \overline{0, |K|}} \in \mathbb{Z}_K$ введем

$$\begin{aligned} \widehat{\mathfrak{C}}_{\alpha}((z_t)_{t \in \overline{0, |K|}} \mid K) \triangleq & \max_{s \in \overline{1, |K|}} [\mathbf{c}(\text{pr}_2(z_{s-1}), \text{pr}_1(z_s), \{\alpha(l) : l \in \overline{s, |K|}\}) + \\ & + c_{\alpha(s)}(z_s, \{\alpha(l) : l \in \overline{s, |K|}\})] \in [0, \infty[. \end{aligned} \quad (3.5)$$

В частности, (3.5) определено при $K \in \mathfrak{N}$, $\alpha \in (\mathbf{I} - \text{bi})[K]$, $x \in \mathbf{X}$ и $(z_t)_{t \in \overline{0, |K|}} \in \mathcal{Z}(x, K, \alpha)$. Поэтому при $x \in \mathbf{X}$ и $K \in \mathfrak{N}$ имеем задачу

$$\widehat{\mathfrak{C}}_{\alpha}(\mathbf{z} \mid K) \longrightarrow \min, \quad (\alpha, \mathbf{z}) \in \mathbf{D}_K(x), \quad (3.6)$$

которой сопоставляется значение (экстремум)

$$v(x, K) \triangleq \min_{\alpha \in (\mathbf{I} - \text{bi})[K]} \min_{\mathbf{z} \in \mathcal{Z}(x, K, \alpha)} \widehat{\mathfrak{C}}_{\alpha}(\mathbf{z} \mid K) \in [0, \infty[\quad (3.7)$$

и непустое (см. (3.4)) множество оптимальных решений. Заметим, что (3.3) определено при $x = x^o$, $K = \overline{1, N}$ и $\alpha \in \mathbb{P}$. Более того, из (2.9) и (3.3) следует, что

$$\mathcal{Z}_{\alpha} = \mathcal{Z}(x^o, \overline{1, N}, \alpha) \quad \forall \alpha \in \mathbb{P}. \quad (3.8)$$

Тогда, в частности, из (3.5), (3.8) вытекает, что $\widehat{\mathfrak{C}}_{\alpha}((z_t)_{t \in \overline{0, |K|}} \mid K)$ определено при $K = \overline{1, N}$, $\alpha \in \mathbb{P}$, $(z_t)_{t \in \overline{0, N}} \in \mathcal{Z}_{\alpha}$. Более того, в этом случае (см. (2.15), (3.5)) $\mathfrak{C}_{\alpha}[(z_t)_{t \in \overline{0, N}}] = \widehat{\mathfrak{C}}_{\alpha}((z_t)_{t \in \overline{0, |K|}} \mid K)$. Из (3.2), (3.7) и (3.8) получаем теперь, что

$$V \triangleq \min_{\alpha \in \mathbf{A}} \min_{(z_t)_{t \in \overline{0, N}} \in \mathcal{Z}_{\alpha}} \mathfrak{C}_{\alpha}[(z_t)_{t \in \overline{0, N}}] = v(x^o, \overline{1, N}) \quad (3.9)$$

есть экстремум задачи (2.16). Наконец, полагаем, что

$$v(x, \emptyset) \triangleq 0 \quad \forall x \in \mathbf{X}. \quad (3.10)$$

Теперь (см. (3.7), (3.10)) определена функция Беллмана $v \in \mathcal{R}_+[\mathbf{X} \times \mathcal{P}(\overline{1, N})]$, обладающая свойством (3.9). Это позволяет рассматривать систему задач (3.6), дополненную соглашением (3.10), как расширение основной задачи (2.16). Нашей ближайшей целью является вывод уравнения Беллмана, отвечающего упомянутому расширению. В этой связи при $j \in \overline{1, N}$, $x \in \mathbf{X}$ и $K \in \mathfrak{N}$ введем

$$\mathbb{A}_j(x, K) \triangleq \{z \in \mathbb{M}_j \mid \text{pr}_1(z) \in A_j(x, K)\} \quad (3.11)$$

в качестве несущественной модификации $A_j(x, K)$. Из (2.4), (2.7) и (3.11) вытекает, что

$$\mathbb{A}_j(x, K) \neq \emptyset \quad \forall x \in \mathbf{X} \quad \forall K \in \mathfrak{N} \quad \forall j \in K. \quad (3.12)$$

Теорема 1. Если $x \in \mathbf{X}$ и $K \in \mathfrak{N}$, то

$$v(x, K) = \min_{j \in \mathbf{I}(K)} \min_{z \in \mathbb{A}_j(x, K)} \sup \left(\left\{ \mathbf{c}(x, \text{pr}_1(z), K) + c_j(z, K); v(\text{pr}_2(z), K \setminus \{j\}) \right\} \right). \quad (3.13)$$

Доказательство. Для более краткой записи рассуждений обозначим выражение в правой части (3.13) через w :

$$w \triangleq \min_{j \in \mathbf{I}(K)} \min_{z \in \mathbb{A}_j(x, K)} \sup \left(\left\{ \mathbf{c}(x, \text{pr}_1(z), K) + c_j(z, K); v(\text{pr}_2(z), K \setminus \{j\}) \right\} \right), \quad w \in [0, \infty[. \quad (3.14)$$

Пусть $n \triangleq |K|$. В случае $n = 1$ рассуждения по обоснованию равенства $v(x, K) = w$ практически очевидны и мы их опустим.

Полагаем до конца доказательства, что $n \in \overline{2, N}$. Выберем маршрут $\alpha^o \in (\mathbf{I} - \text{bi})[K]$ и трассу $(z_t^o)_{t \in \overline{0, n}} \in \mathcal{Z}(x, K, \alpha^o)$, для которых

$$v(x, K) = \widehat{\mathbf{c}}_{\alpha^o}((z_t^o)_{t \in \overline{0, n}} | K). \quad (3.15)$$

Легко видеть, что $\alpha^o(1) \in \mathbf{I}(K)$ и $z_1^o \in \mathbb{A}_{\alpha^o(1)}(x, K)$, а потому

$$w \leq \sup \left(\left\{ \mathbf{c}(x, \text{pr}_1(z_1^o), K) + c_{\alpha^o(1)}(z_1^o, K); v(\text{pr}_2(z_1^o), \mathbb{K}) \right\} \right), \quad (3.16)$$

где $\mathbb{K} \triangleq K \setminus \{\alpha^o(1)\} \in \mathfrak{N}$. При этом $|\mathbb{K}| = n - 1$. Заметим, что $\text{pr}_2(z_1^o) \in \mathbf{X}$, и для определения $v(\text{pr}_2(z_1^o), \mathbb{K})$ следует использовать (3.7). Легко видеть, что (см. [12])

$$\alpha_o \triangleq (\alpha^o(j + 1))_{j \in \overline{1, n-1}} \in (\mathbf{I} - \text{bi})[\mathbb{K}]. \quad (3.17)$$

Кроме того, введем $(z_t^{oo})_{t \in \overline{0, n-1}} \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ посредством правила

$$\left(z_o^{oo} \triangleq (\text{pr}_2(z_1^o), \text{pr}_2(z_1^o)) \right) \& (z_t^{oo} \triangleq z_{t+1}^o \quad \forall t \in \overline{1, n-1}). \quad (3.18)$$

Из (3.3) и (3.18) непосредственно следует, что $(z_t^{oo})_{t \in \overline{0, n-1}} \in \mathcal{Z}(\text{pr}_2(z_1^o), \mathbb{K}, \alpha_o)$, а потому (см. (3.7), (3.17))

$$v(\text{pr}_2(z_1^o), \mathbb{K}) \leq \widehat{\mathbf{c}}_{\alpha_o}((z_t^{oo})_{t \in \overline{0, n-1}} | \mathbb{K}).$$

С учетом (3.16) получаем теперь, что

$$w \leq \sup \left(\left\{ \mathbf{c}(x, \text{pr}_1(z_1^o), K) + c_{\alpha^o(1)}(z_1^o, K); \widehat{\mathbf{c}}_{\alpha_o}((z_t^{oo})_{t \in \overline{0, n-1}} | \mathbb{K}) \right\} \right). \quad (3.19)$$

Из (3.5), (3.16), (3.18) и (3.19) после несложных преобразований вытекает, что

$$w \leq \sup \left(\left\{ \mathbf{c}(\text{pr}_2(z_o^o), \text{pr}_1(z_1^o), K) + c_{\alpha^o(1)}(z_1^o, K); \right. \right.$$

$$\left. \max_{\nu \in \overline{2, n}} [\mathbf{c}(\text{pr}_2(z_{\nu-1}^o), \text{pr}_1(z_\nu^o), \{\alpha^o(t) : t \in \overline{\nu, n}\}) + c_{\alpha^o(\nu)}(z_\nu^o, \{\alpha^o(t) : t \in \overline{\nu, n}\})] \right\} \right),$$

и, с учетом (3.5) и сюръективности α^o , имеем неравенство $w \leq \widehat{\mathbf{c}}_{\alpha^o}[(z_t^o)_{t \in \overline{0, n}} | K]$. Используя (3.15), получаем, что $w \leq v(x, K)$.

Осталось установить противоположное неравенство, для чего с учетом (3.14) выберем и зафиксируем $q \in \mathbf{I}(K)$ и $\mathbf{y} \in \mathbb{A}_q(x, K)$, для которых

$$w = \sup \left(\left\{ \mathbf{c}(x, \text{pr}_1(\mathbf{y}), K) + c_q(\mathbf{y}, K); v(\text{pr}_2(\mathbf{y}), Q) \right\} \right), \quad (3.20)$$

где $Q \triangleq K \setminus \{q\}$, $|Q| = n - 1$. При этом $\text{pr}_2(\mathbf{y}) \in \mathbf{X}$ и $Q \in \mathfrak{N}$, а потому для представления $v(\text{pr}_2(\mathbf{y}), Q)$ можно использовать (3.7). С учетом этого выберем и зафиксируем маршрут $\bar{\alpha} \in (\mathbf{I} - \text{bi})[Q]$ и трассу $(\bar{z}_t)_{t \in \overline{0, n-1}} \in \mathcal{Z}(\text{pr}_2(\mathbf{y}), Q, \bar{\alpha})$, для которых (см. (3.6))

$$v(\text{pr}_2(\mathbf{y}), Q) = \widehat{\mathbf{c}}_{\bar{\alpha}}((\bar{z}_t)_{t \in \overline{0, n-1}} | Q) = \max_{s \in \overline{1, n-1}} [\mathbf{c}(\text{pr}_2(\bar{z}_{s-1}), \text{pr}_1(\bar{z}_s), \{\bar{\alpha}(l) : l \in \overline{s, n-1}\}) + c_{\bar{\alpha}(s)}(\bar{z}_s, \{\bar{\alpha}(l) : l \in \overline{s, n-1}\})]. \quad (3.21)$$

Введем отображение $\bar{\beta} : \overline{1, n} \rightarrow K$, полагая

$$(\bar{\beta}(1) \triangleq q) \ \& \ (\bar{\beta}(j) \triangleq \bar{\alpha}(j-1) \ \forall j \in \overline{2, n}).$$

Легко видеть, что $\bar{\beta} \in (\mathbf{I} - \text{bi})[K]$. Далее, введем кортеж $(\bar{z}_t^*)_{t \in \overline{0, n}} \in \mathbb{Z}_K$ по правилу

$$(\bar{z}_0^* \triangleq (x, x)) \ \& \ (\bar{z}_1^* \triangleq \mathbf{y}) \ \& \ (\bar{z}_t^* = \bar{z}_{t-1} \ \forall t \in \overline{2, n}).$$

Тогда $(\bar{z}_t^*)_{t \in \overline{0, n}} \in \mathcal{Z}(x, K, \bar{\beta})$, а потому

$$v(x, K) \leq \widehat{\mathfrak{C}}_{\bar{\beta}}((\bar{z}_t^*)_{t \in \overline{0, n}} | K), \quad (3.22)$$

где выражение в правой части допускает следующую цепочку представлений

$$\begin{aligned} \widehat{\mathfrak{C}}_{\bar{\beta}}((\bar{z}_t^*)_{t \in \overline{0, n}} | K) &= \sup \left(\left\{ \mathbf{c}(\text{pr}_2(\bar{z}_0^*), \text{pr}_1(\bar{z}_1^*), \{\bar{\beta}(l) : l \in \overline{1, n}\}) + c_{\bar{\beta}(1)}(\bar{z}_1^*, \{\bar{\beta}(l) : l \in \overline{1, n}\}); \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \max_{s \in \overline{2, n}} [\mathbf{c}(\text{pr}_2(\bar{z}_{s-1}^*), \text{pr}_1(\bar{z}_s^*), \{\bar{\beta}(l) : l \in \overline{s, n}\}) + c_{\bar{\beta}(s)}(\bar{z}_s^*, \{\bar{\beta}(l) : l \in \overline{s, n}\})] \right\} \right) = \\ &= \sup \left(\left\{ \mathbf{c}(x, \text{pr}_1(\mathbf{y}), K) + c_q(\mathbf{y}, K); \max_{s \in \overline{2, n}} [\mathbf{c}(\text{pr}_2(\bar{z}_{s-1}^*), \text{pr}_1(\bar{z}_s^*), \{\bar{\beta}(l) : l \in \overline{s, n}\}) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + c_{\bar{\beta}(s)}(\bar{z}_s^*, \{\bar{\beta}(l) : l \in \overline{s, n}\})] \right\} \right) = \sup \left(\left\{ \mathbf{c}(x, \text{pr}_1(\mathbf{y}), K) + c_q(\mathbf{y}, K); \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \max_{k \in \overline{1, n-1}} [\mathbf{c}(\text{pr}_2(\bar{z}_{k-1}), \text{pr}_1(\bar{z}_k), \{\bar{\alpha}(t) : t \in \overline{k, n-1}\}) + c_{\bar{\alpha}(k)}(\bar{z}_k, \{\bar{\alpha}(t) : t \in \overline{k, n-1}\})] \right\} \right) = \\ &= \sup \left(\left\{ \mathbf{c}(x, \text{pr}_1(\mathbf{y}), K) + c_q(\mathbf{y}, K); \widehat{\mathfrak{C}}_{\bar{\alpha}}((\bar{z}_t)_{t \in \overline{0, n-1}} | Q) \right\} \right). \end{aligned} \quad (3.23)$$

В этих преобразованиях учитывается сюръективность $\bar{\beta}$, а также определения $\bar{\beta}$ и $(\bar{z}_t^*)_{t \in \overline{0, n}}$. Теперь из (3.20)–(3.23) получаем, что

$$w = \widehat{\mathfrak{C}}_{\bar{\beta}}((\bar{z}_t^*)_{t \in \overline{0, n}} | K),$$

откуда в силу (3.22) имеем неравенство $v(x, K) \leq w$, чем и завершается доказательство. \square

Из теоремы 1 следует, в частности, что

$$V = \min_{j \in \overline{1, N}} \min_{z \in \mathbb{A}_j(x^o, \overline{1, N})} \sup \left(\left\{ \mathbf{c}(x^o, \text{pr}_1(z), \overline{1, N}) + c_j(z, \overline{1, N}); v(\text{pr}_2(z), \overline{1, N} \setminus \{j\}) \right\} \right). \quad (3.24)$$

§ 4. Построение слоев функции Беллмана

В настоящем разделе рассматривается модификация процедуры [11, § 4.9]. Мы отказываемся (при наличии условий предшествования) от построения всего массива значений функции Беллмана, ограничиваясь построением системы слоев, в основе которого находится конструкция, использующая так называемые существенные списки заданий (см. [11, § 4.9]). Посредством

$$\mathfrak{G} \triangleq \{K \in \mathfrak{N} | \forall z \in \mathbf{K} \ (\text{pr}_1(z) \in K) \implies (\text{pr}_2(z) \in K)\} \quad (4.1)$$

определяется множество всех существенных списков; пусть, кроме того,

$$\mathcal{G}_s \triangleq \{K \in \mathfrak{G} | s = |K|\} \ \forall s \in \overline{1, N}. \quad (4.2)$$

Легко видеть, что (см. (4.2)) $\{\mathcal{G}_j : j \in \overline{1, N}\}$ есть разбиение множества (4.1); при этом $\mathcal{G}_N = \{\overline{1, N}\}$ (синглетон, содержащий $\overline{1, N}$) и

$$\mathcal{G}_1 = \{\{t\} : t \in \overline{1, N} \setminus \mathbf{K}_1\},$$

где $\mathbf{K}_1 \triangleq \{\text{pr}_1(z) : z \in \mathbf{K}\}$. Наконец (см. [13]), имеем

$$\mathcal{G}_{s-1} = \{K \setminus \{t\} : K \in \mathcal{G}_s, t \in \overline{\mathbf{I}(K)}\} \quad \forall s \in \overline{2, N}. \quad (4.3)$$

Посредством (4.3) реализуется рекуррентная процедура

$$\mathcal{G}_N \longrightarrow \mathcal{G}_{N-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathcal{G}_1, \quad (4.4)$$

применяя которую можно построить все множества (4.2). С использованием (4.1) конструируем слои пространства позиций, обозначаемые ниже через D_0, D_1, \dots, D_N . Заметим, что (см. [13, с. 69]) $\overline{1, N} \setminus \mathbf{K}_1 \neq \emptyset$ и, как следствие,

$$\widetilde{\mathfrak{M}} \triangleq \bigcup_{i \in \overline{1, N} \setminus \mathbf{K}_1} \mathbf{M}_i \in \mathcal{P}'(\mathbf{X});$$

тогда $D_0 \triangleq \{(x, \emptyset) : x \in \widetilde{\mathfrak{M}}\} \in \mathcal{P}'(\mathbf{X} \times \mathcal{P}(\overline{1, N}))$ есть простейший слой пространства позиций. Так же просто определяется слой D_N : $D_N \triangleq \{(x^o, \overline{1, N})\}$ есть синглетон, содержащий УП $(x^o, \overline{1, N})$.

Для определения D_s при $s \in \overline{1, N-1}$ выполняем ряд вспомогательных построений. Итак, при $s \in \overline{1, N-1}$ и $K \in \mathcal{G}_s$ введем последовательно

$$\mathcal{J}_s(K) \triangleq \{j \in \overline{1, N} \setminus K \mid \{j\} \cup K \in \mathcal{G}_{s+1}\}, \quad (4.5)$$

$$\mathcal{M}_s[K] \triangleq \bigcup_{j \in \mathcal{J}_s(K)} \mathbf{M}_j, \quad (4.6)$$

$$\mathbb{D}_s[K] \triangleq \{(x, K) : x \in \mathcal{M}_s[K]\}; \quad (4.7)$$

каждое из множеств (4.5)–(4.7) непусто, $\mathcal{M}_s[K] \subset \mathbf{X}$, $\mathbb{D}_s[K] \subset \mathbf{X} \times \mathcal{G}_s$. С учетом (4.5)–(4.7) имеем, что

$$D_s \triangleq \bigcup_{K \in \mathcal{G}_s} \mathbb{D}_s[K] \in \mathcal{P}'(\mathbf{X} \times \mathcal{G}_s) \quad \forall s \in \overline{1, N-1}. \quad (4.8)$$

Итак (см. (4.8)), определены все множества-слои D_0, D_1, \dots, D_N , являющиеся непустыми п/м $\mathbf{X} \times \mathcal{P}(\overline{1, N})$. С учетом этого вводим слои функции v в виде сужений данной функции на слои пространства позиций. Итак, при $s \in \overline{0, N}$ полагаем, что функция

$$v_s \in \mathcal{R}_+[D_s] \quad (4.9)$$

(слой функции Беллмана) определяется условием

$$v_s(x, K) \triangleq v(x, K) \quad \forall (x, K) \in D_s. \quad (4.10)$$

Тем самым определены функции

$$v_o \in \mathcal{R}_+[D_0], v_1 \in \mathcal{R}_+[D_1], \dots, v_N \in \mathcal{R}_+[D_N]. \quad (4.11)$$

Отметим, что исходные слои (4.8) обладают известным [1, 2] свойством:

$$(y, K \setminus \{k\}) \in D_{s-1} \quad \forall s \in \overline{1, N} \quad \forall K \in \mathcal{G}_s \quad \forall k \in \mathbf{I}(K) \quad \forall y \in \mathbf{M}_k. \quad (4.12)$$

В свою очередь из (4.12) следует (см. [2, предложение 2]), что

$$(\text{pr}_2(z), K \setminus \{k\}) \in D_{s-1} \quad \forall s \in \overline{1, N} \quad \forall (x, K) \in D_s \quad \forall k \in \mathbf{I}(K) \quad \forall z \in \mathbb{A}_k(x, K). \quad (4.13)$$

С учетом (4.13) получаем следующее полезное свойство: если $s \in \overline{1, N}$, $(x, K) \in D_s$, $j \in \mathbf{I}(K)$ и $z \in \mathbb{A}_j(x, K)$, то (см. (4.9)–(4.11)) определено значение

$$v_{s-1}(\text{pr}_2(z), K \setminus \{j\}) \in [0, \infty[.$$

Как следствие получаем, что при $s \in \overline{1, N}$ и $(x, K) \in D_s$ определено также значение

$$\min_{j \in \mathbf{I}(K)} \min_{z \in \mathbb{A}_j(x, K)} \sup \left(\left\{ \mathbf{c}(x, \text{pr}_1(z), K) + c_j(z, K); v_{s-1}(\text{pr}_2(z), K \setminus \{j\}) \right\} \right) \in [0, \infty[.$$

Предложение 1. Если $s \in \overline{1, N}$, то функция v_{s-1} преобразуется в v_s по следующему правилу:

$$v_s(x, K) = \min_{j \in \mathbf{I}(K)} \min_{z \in \mathbb{A}_j(x, K)} \sup \left(\left\{ \mathbf{c}(x, \text{pr}_1(z), K) + c_j(z, K); v_{s-1}(\text{pr}_2(z), K \setminus \{j\}) \right\} \right) \quad \forall (x, K) \in D_s.$$

Доказательство сводится к непосредственной комбинации теоремы 1, (4.10) и (4.13). Отметим, что частный случай данного предложения приведен в [7].

Напомним теперь, что из (4.9), (4.10) следует, в частности, что функция $v_o \in \mathcal{R}_+[D_0]$ тождественно равна нулю (см. (3.10)): $v_o(x, K) = 0 \quad \forall (x, K) \in D_0$. Итак, $v_o(x, \emptyset) = 0 \quad \forall x \in \widetilde{\mathcal{M}}$. С учетом этого имеем в силу предложения 1 рекуррентную процедуру

$$v_o \longrightarrow v_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow v_N, \quad (4.14)$$

где v_o известна, а преобразование v_{s-1} в v_s , где $s \in \overline{1, N}$, определяется предложением 1. В результате реализации (4.14) будет, в частности, найдено значение $v_N(x^o, \overline{1, N})$, для которого в силу (3.9), (4.10) имеем равенство

$$V = v_N(x^o, \overline{1, N}). \quad (4.15)$$

Итак, (4.14) доставляет значение глобального экстремума основной задачи. При этом, согласно предложению 1 и (4.14),

$$V = \min_{j \in \mathbf{I}(\overline{1, N})} \min_{z \in \mathbb{A}_j(x^o, \overline{1, N})} \sup \left(\left\{ \mathbf{c}(x^o, \text{pr}_1(z), \overline{1, N}) + c_j(z, \overline{1, N}); v_{N-1}(\text{pr}_2(z), \overline{1, N} \setminus \{j\}) \right\} \right). \quad (4.16)$$

Заметим, что из всех функций (4.11) для определения V в (4.16) задействована только одна, а именно v_{N-1} . Подобная ситуация имеет место и при построении функций v_1, \dots, v_{N-1} . В этой связи естественно возникает следующий

Алгоритм определения глобального экстремума. Используем в качестве v_o функцию, тождественно равную нулю (напомним, что v_o определена на D_0). Данную «нулевую» функцию v_o принимаем в качестве начального элемента процедуры, конструируемой на основе (4.14).

Если $s \in \overline{1, N}$ и $v_{s-1} \in \mathcal{R}_+[D_{s-1}]$ уже построена, то преобразуем v_{s-1} в $v_s \in \mathcal{R}_+[D_s]$ по правилу, указанному в предложении 1. Если при этом $s = N$, то построение завершается и мы получаем V в виде (4.15). Если же $s < N$, то массив значений функции v_{s-1} заменяется массивом значений функции v_s , то есть

$$(v_{s-1}(x, K), (x, K) \in D_{s-1}) \longrightarrow (v_s(x, K), (x, K) \in D_s),$$

после чего осуществляется преобразование v_s в v_{s+1} по правилу

$$v_{s+1}(x, K) = \min_{j \in \mathbf{I}(K)} \min_{z \in \mathbb{A}_j(x, K)} \sup \left(\left\{ \mathbf{c}(x, \text{pr}_1(z), K) + c_j(z, K); v_s(\text{pr}_2(z), K \setminus \{j\}) \right\} \right) \quad \forall (x, K) \in D_{s+1}. \quad (4.17)$$

(заметим, что массив значений функции v_{s-1} при этом уничтожается).

При реализации данной процедуры на ЭВМ в памяти всякий раз находится массив значений только одной функции из (4.11), что достаточно для определения V (для построения

оптимального ДР такая процедура непригодна: в этом случае в памяти следует сохранять все функции (4.11).

В заключение раздела конкретизируем (4.17) для случая $s = 0$. Итак, рассмотрим построение v_1 . В этой связи напомним сначала процедуру построения D_1 . Отметим, что \mathcal{G}_1 исчерпывается множествами-синглетами $\{t\}, t \in \overline{1, N} \setminus \mathbf{K}_1$. При этом, согласно (4.4),

$$\mathcal{J}_1(\{t\}) = \{j \in \overline{1, N} \setminus \{t\} \mid \{j; t\} \in \mathcal{G}_2\} \quad \forall t \in \overline{1, N} \setminus \mathbf{K}_1.$$

Из (4.6) вытекает, что при $t \in \overline{1, N} \setminus \mathbf{K}_1$ в виде $\mathcal{M}_1[\{t\}]$ имеем объединение всех множеств $\mathbf{M}_j, j \in \mathcal{J}_1(\{t\})$, а $\mathbb{D}_1[\{t\}] = \{(x, \{t\}) : x \in \mathcal{M}_1[\{t\}]\}$. Наконец, используя представление \mathcal{G}_1 , получаем, что (см. (4.8))

$$\begin{aligned} D_1 &= \bigcup_{t \in \overline{1, N} \setminus \mathbf{K}_1} \mathbb{D}_1[\{t\}] = \bigcup_{t \in \overline{1, N} \setminus \mathbf{K}_1} \{(x, \{t\}) : x \in \mathcal{M}_1[\{t\}]\} = \\ &= \{(x, \{t\}) : t \in \overline{1, N} \setminus \mathbf{K}_1, x \in \mathcal{M}_1[\{t\}]\}; \end{aligned} \quad (4.18)$$

разумеется, $D_1 \neq \emptyset$. Заметим, что при $t \in \overline{1, N} \setminus \mathbf{K}_1$ справедливо равенство $\mathbf{I}(\{t\}) = \{t\}$. Теперь с учетом предложения 1 получаем, что

$$\begin{aligned} v_1(x, \{t\}) &= \min_{z \in A_t(x, \{t\})} \sup(\{c(x, \text{pr}_1(z), \{t\}) + c_j(z, \{t\}); 0\}) = \\ &= \min_{z \in A_t(x, \{t\})} [c(x, \text{pr}_1(z), \{t\}) + c_j(z, \{t\})] \quad \forall t \in \overline{1, N} \setminus \mathbf{K}_1 \quad \forall x \in \mathcal{M}_1[\{t\}]. \end{aligned} \quad (4.19)$$

В силу (4.18) имеем, что (4.19) полностью определяет функцию v_1 .

Построение оптимального решения. Пусть все функции (4.11) построены (предполагается реализация процедуры (4.14) «в полном объеме»). Полагаем, что $\mathbf{z}^{(o)} \triangleq (x^o, x^o)$. Используя (4.16), выбираем $\eta_1 \in \mathbf{I}(\overline{1, N})$ и $\mathbf{z}^{(1)} \in A_{\eta_1}(x^o, \overline{1, N})$ из условия

$$V = \sup(\{c(x^o, \text{pr}_1(\mathbf{z}^{(1)}), \overline{1, N}) + c_{\eta_1}(\mathbf{z}^{(1)}, \overline{1, N}); v_{N-1}(\text{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \overline{1, N} \setminus \{\eta_1\})\}) \quad (4.20)$$

(напомним, что функция v_{N-1} нам известна). При этом $\mathbf{z}^{(1)} \in A_{\eta_1}(\text{pr}_2(\mathbf{z}^{(o)}), \overline{1, N})$ и, согласно (4.13), $(\text{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \overline{1, N} \setminus \{\eta_1\}) \in D_{N-1}$, а потому в силу предложения 4.1

$$\begin{aligned} v_{N-1}(\text{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \overline{1, N} \setminus \{\eta_1\}) &= \min_{j \in \mathbf{I}(\overline{1, N} \setminus \{\eta_1\})} \min_{z \in A_j(\text{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \overline{1, N} \setminus \{\eta_1\})} \sup(\{c(\text{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \text{pr}_1(z), \\ &\overline{1, N} \setminus \{\eta_1\}) + c_j(z, \overline{1, N} \setminus \{\eta_1\}); v_{N-2}(\text{pr}_2(z), \overline{1, N} \setminus \{\eta_1; j\})\}). \end{aligned} \quad (4.21)$$

С учетом (4.21) выбираем $\eta_2 \in \mathbf{I}(\overline{1, N} \setminus \{\eta_1\})$ и $\mathbf{z}^{(2)} \in A_{\eta_2}(\text{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \overline{1, N} \setminus \{\eta_1\})$, для которых

$$\begin{aligned} v_{N-1}(\text{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \overline{1, N} \setminus \{\eta_1\}) &= \sup(\{c(\text{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \text{pr}_1(\mathbf{z}^{(2)}), \overline{1, N} \setminus \{\eta_1\}) + \\ &+ c_{\eta_2}(\mathbf{z}^{(2)}, \overline{1, N} \setminus \{\eta_1\}); v_{N-2}(\text{pr}_2(\mathbf{z}^{(2)}), \overline{1, N} \setminus \{\eta_1; \eta_2\})\}). \end{aligned} \quad (4.22)$$

При этом, согласно (4.13), имеем свойство

$$(\text{pr}_2(\mathbf{z}^{(2)}), \overline{1, N} \setminus \{\eta_1; \eta_2\}) \in D_{N-2}. \quad (4.23)$$

Рассмотрим некоторые результаты последовательного выбора $(\eta_1, \mathbf{z}^{(1)})$ и $(\eta_2, \mathbf{z}^{(2)})$. Прежде всего, заметим, что $\eta_1 \in \overline{1, N}$ и $\eta_2 \in \overline{1, N} \setminus \{\eta_1\}$. Далее (см. (3.11)), $\mathbf{z}^{(1)} \in \mathbb{M}_{\eta_1}$ и $\mathbf{z}^{(2)} \in \mathbb{M}_{\eta_2}$. Кроме того, из (3.11) вытекает, что

$$\text{pr}_1(\mathbf{z}^{(1)}) \in A_{\eta_1}(\text{pr}_2(\mathbf{z}^{(o)}), \overline{1, N}), \quad \text{pr}_1(\mathbf{z}^{(2)}) \in A_{\eta_2}(\text{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \overline{1, N} \setminus \{\eta_1\}). \quad (4.24)$$

При этом, конечно, $\mathbf{z}^{(1)} \in \mathbb{X} \times \mathbf{X}$ и $\mathbf{z}^{(2)} \in \mathbb{X} \times \mathbf{X}$; в частности, $\mathbf{z}^{(1)} \in \widetilde{\mathbb{X}} \times \mathbf{X}$ и $\mathbf{z}^{(2)} \in \widetilde{\mathbb{X}} \times \mathbf{X}$ (кстати, $\mathbf{z}^{(o)} \in \widetilde{\mathbb{X}} \times \mathbf{X}$). Из (4.20) и (4.22) имеем, что (см. (1.1))

$$\begin{aligned}
V &= \sup \left(\left\{ \mathbf{c}(x^o, \text{pr}_1(\mathbf{z}^{(1)}), \overline{1, N}) + c_{\eta_1}(\mathbf{z}^{(1)}, \overline{1, N}); v_{N-1}(\text{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \overline{1, N} \setminus \{\eta_1\}) \right\} \right) = \\
&= \sup \left(\left\{ \mathbf{c}(\text{pr}_2(\mathbf{z}^{(o)}), \text{pr}_1(\mathbf{z}^{(1)}), \overline{1, N}) + c_{\eta_1}(\mathbf{z}^{(1)}, \overline{1, N}); \sup \left(\left\{ \mathbf{c}(\text{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \right. \right. \right. \\
&\text{pr}_1(\mathbf{z}^{(2)}), \overline{1, N} \setminus \{\eta_1\}) + c_{\eta_2}(\mathbf{z}^{(2)}, \overline{1, N} \setminus \{\eta_1\}); v_{N-2}(\text{pr}_2(\mathbf{z}^{(2)}), \overline{1, N} \setminus \{\eta_1; \eta_2\}) \left. \left. \left. \right\} \right) \right\} = \\
&= \sup \left(\left\{ \sup \left(\left\{ \mathbf{c}(\text{pr}_2(\mathbf{z}^{(o)}), \text{pr}_1(\mathbf{z}^{(1)}), \overline{1, N}) + c_{\eta_1}(\mathbf{z}^{(1)}, \overline{1, N}); \mathbf{c}(\text{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \right. \right. \right. \\
&\text{pr}_1(\mathbf{z}^{(2)}), \overline{1, N} \setminus \{\eta_1\}) + c_{\eta_2}(\mathbf{z}^{(2)}, \overline{1, N} \setminus \{\eta_1\}) \left. \left. \left. \right\} \right); v_{N-2}(\text{pr}_2(\mathbf{z}^{(2)}), \overline{1, N} \setminus \{\eta_1; \eta_2\}) \right\} \right) = \\
&= \sup \left(\left\{ \max_{s \in \overline{1, 2}} [\mathbf{c}(\text{pr}_2(\mathbf{z}^{(s-1)}), \text{pr}_1(\mathbf{z}^{(s)}), \overline{1, N} \setminus \{\eta_j : j \in \overline{1, s-1}\}) + \right. \right. \\
&\left. \left. + c_{\eta_s}(\mathbf{z}^{(s)}, \overline{1, N} \setminus \{\eta_j : j \in \overline{1, s-1}\})]; v_{N-2}(\text{pr}_2(\mathbf{z}^{(2)}), \overline{1, N} \setminus \{\eta_j : j \in \overline{1, 2}\}) \right\} \right). \tag{4.25}
\end{aligned}$$

Замечание 1. Пусть (в пределах данного замечания) $N = 2$. Тогда в силу (3.2) имеем по выбору η_1 и η_2 , что $\eta \stackrel{\Delta}{=} (\eta_i)_{i \in \overline{1, 2}} = (\eta_i)_{i \in \overline{1, N}} \in \mathbf{A}$. Далее, $(\mathbf{z}^{(t)})_{t \in \overline{0, 2}} \in \mathbb{Z}$. Более того, из (2.8), (4.24) имеем по выбору $\mathbf{z}^{(o)}$, что $(\mathbf{z}^{(t)})_{t \in \overline{0, 2}} \in \mathcal{Z}_\eta$ (учитываем при этом, что η — биекция, а потому при $k \in \overline{1, 2}$ имеем, что

$$A_{\eta_k}(\text{pr}_2(\mathbf{z}^{(k-1)}), \overline{1, N} \setminus \{\eta_j : j \in \overline{1, k-1}\}) = A_{\eta_k}(\text{pr}_2(\mathbf{z}^{(k-1)}), \{\eta_j : j \in \overline{k, 2}\});$$

далее следует учитывать, что, согласно (4.24),

$$\text{pr}_1(\mathbf{z}^{(k)}) \in A_{\eta_k}(\text{pr}_2(\mathbf{z}^{(k-1)}), \{\eta_j : j \in \overline{k, 2}\}),$$

так как $\overline{1, N} = \{\eta_j : j \in \overline{1, 2}\}$ и $\overline{1, N} \setminus \{\eta_1\} = \{\eta_2\} = \{\eta_j : j \in \overline{2, 2}\}$ при нашем условии $N = 2$). Тогда, согласно (2.15),

$$\begin{aligned}
\mathfrak{C}_\eta[(\mathbf{z}^{(t)})_{t \in \overline{0, 2}}] &= \mathfrak{C}_\eta[(\mathbf{z}^{(t)})_{t \in \overline{0, N}}] = \max_{s \in \overline{1, 2}} [\mathbf{c}(\text{pr}_2(\mathbf{z}^{(s-1)}), \text{pr}_1(\mathbf{z}^{(s)}), \{\eta_l : l \in \overline{s, 2}\}) + \\
&+ c_{\eta_s}(\mathbf{z}^{(s)}, \{\eta_l : l \in \overline{s, 2}\})] = \max_{s \in \overline{1, N}} [\mathbf{c}(\text{pr}_2(\mathbf{z}^{(s-1)}), \text{pr}_1(\mathbf{z}^{(s)}), \overline{1, N} \setminus \{\eta_j : j \in \overline{1, s-1}\}) + \\
&+ c_{\eta_s}(\mathbf{z}^{(s)}, \overline{1, N} \setminus \{\eta_j : j \in \overline{1, s-1}\})] \in [0, \infty]. \tag{4.26}
\end{aligned}$$

Из (4.25) и (4.26) получаем, что

$$V = \sup(\{\mathfrak{C}_\eta[(\mathbf{z}^{(t)})_{t \in \overline{0, 2}}]; 0\}) = \mathfrak{C}_\eta[(\mathbf{z}^{(t)})_{t \in \overline{0, 2}}] = \mathfrak{C}_\eta[(\mathbf{z}^{(t)})_{t \in \overline{0, N}}]. \tag{4.27}$$

Поскольку (см. (2.13)) $(\eta, (\mathbf{z}^{(t)})_{t \in \overline{0, 2}}) = (\eta, (\mathbf{z}^{(t)})_{t \in \overline{0, N}}) \in \mathbf{D}$, имеем из (4.27) свойство оптимальности решения $(\eta, (\mathbf{z}^{(t)})_{t \in \overline{0, N}})$ в смысле основной задачи (2.16) (при условии $N = 2$). \square

Если $N > 2$, то процедуры решения локальных задач, подобные (4.20), (4.22), следует продолжать вплоть до исчерпывания индексного множества $\overline{1, N}$. В результате будут построены (полный) маршрут $\eta \stackrel{\Delta}{=} (\eta_t)_{t \in \overline{1, N}} \in \mathbf{A}$ и трасса $(\mathbf{z}^{(t)})_{t \in \overline{0, N}} \in \mathcal{Z}_\eta$, с ним согласованная, для которых $\mathfrak{C}_\eta[(\mathbf{z}^{(t)})_{t \in \overline{0, N}}] = V$, что означает оптимальность ДР $(\eta, (\mathbf{z}^{(s)})_{s \in \overline{0, N}}) \in \mathbf{D}$. Итак, на основе системы слоев функции Беллмана реализуется оптимальное ДР основной задачи.

§ 5. Вычислительный эксперимент

Рассмотрим применение теоретических конструкций на основе ДП для решения задачи маршрутизации движения режущего инструмента при листовой резке деталей. Будем использовать в настоящем разделе следующую ее упрощенную модель. Пусть фиксированы вещественные числа $a_1 \in \mathbb{R}$, $a_2 \in \mathbb{R}$, $b_1 \in \mathbb{R}$ и $b_2 \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие неравенствам: $a_1 < a_2$ и $b_1 < b_2$. Данные числа определяют размеры прямоугольной области на плоскости: $[a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$ мы отождествляем с множеством X , и в нашей модели данный участок плоскости является листом, подлежащим раскрою на некоторое множество деталей, ограничиваемых в совокупности N замкнутыми контурами, которые соответствуют (в нашей модели) мегаполисам M_1, \dots, M_N (2.1). При этом допускается вложенность одних контуров в другие (простейший пример — шайба), но не допускается их пересечение. В нашей модели каждый контур представлен следующими кривыми, называемыми эквидистантами.

1) Вспомогательная эквидистанта — это кривая, расположенная в непосредственной близости от траектории движения резака при вырезании контура и являющаяся множеством позиций инструмента, в которых в момент начала реза производится включение реза (врезка) и после завершения вырезания контура происходит выключение режущего инструмента. В нашей модели данное множество дискретизировано и образовано УП, первый элемент которых — точка врезки, а второй — соответствующая ей точка выключения резака. Вспомогательные эквидистанты отождествляем с множествами M_1, \dots, M_N (2.1), при этом (см. (2.4)) точки врезки образуют множества $\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_N$, а точки выключения резака составляют множества $\mathbf{M}_1, \dots, \mathbf{M}_N$.

2) Основная эквидистанта — это собственно траектория движения режущего инструмента при вырезании данного контура (напомним, что она является замкнутой кривой). В нашей модели основная эквидистанта также дискретизирована.

Процесс реализации раскроя листа начинается в точке $x^0 \in X$, являющейся точкой парковки инструмента, и заключается в последовательном перемещении резака в выключенном состоянии от точки x^0 к точке включения реза, расположенной на вспомогательной эквидистанте первого по порядку раскрою контура, включении режущего инструмента, перемещении его в ближайшую точку на основной эквидистанте, выполнении реза в движении по основной эквидистанте, отвода резака в точку на вспомогательной эквидистанте, соответствующую выбранной точке включения инструмента, и выключения реза по прибытии в данную точку. Далее процесс повторяется: резак в выключенном состоянии перемещается в точку включения на следующем по порядку реализации раскройного плана контуре (выключение необходимо для предотвращения порчи еще не вырезанных деталей перемещающимся инструментом), выполняет рез и отводится в точку выключения. По окончании цикла реза на последнем (согласно раскройному плану) контуре производится останов инструмента. Поскольку величина затрат на вырезание контура после перемещения на него из точки включения не зависит ни от точки включения, ни от точки выключения резака, мы при оптимизации затрат данную величину учитывать не будем. Порядок перемещения по вырезаемым контурам жестко лимитирован следующим естественным условием технологического характера: для вложенных контуров внутренние контура должны вырезаться раньше, чем внешние. Оптимизация перемещений резака направлена на минимизацию стоимости реализации наиболее затратного этапа. При этом затраты характеризуются следующим набором функций (2.14).

1) Функция c характеризует затраты на перемещение резака в выключенном состоянии из точки парковки x^0 в первую (по порядку реализации раскройного плана) точку врезки (см. (2.3)) $x_{1,1} \in \mathfrak{M}_{\alpha(1)}$ или из точки выключения резака на k -м (по порядку движения при раскросе) контуре в точку врезки на $k+1$ -м контуре, т. е. на перемещение $x_{k,2} \in \mathbf{M}_{\alpha(k)} \rightarrow x_{k+1,1} \in \mathfrak{M}_{\alpha(k+1)}$ (здесь α — маршрут посещения контуров, $k \in \overline{1, N-1}$). В нашей модели данная функция задается евклидовым расстоянием.

2) Функции c_1, \dots, c_N определяют значимую (для процесса оптимизации) часть затрат, связанных с вырезанием каждого контура, а именно затраты на перемещение из точки врезки в точку на основной эквидистанте и, по окончании вырезания контура, на отвод резака в точку

выключения (напомним, что затраты на движение по контуру при его резке не зависят от выбора точек врезки и выключения инструмента, поэтому в нашей задаче оптимизации данный вид затрат мы не учитываем). Пусть для всякого j -го контура функция c_j задается суммой $3 * \rho(x, y) + \rho(y, z)$, где ρ — евклидово расстояние, x — точка врезки, z — соответствующая ей точка выключения инструмента, а y — точка на основной эквидистанте, в которой начинается вырезание контура (отметим, что точка y однозначно сопоставляется УП (x, z)); коэффициент 3 введен в связи с необходимостью форсированного режима работы резака при врезке в материал.

Отметим, что в нашей модели отсутствует зависимость от списка заданий у функций c, c_1, \dots, c_N .

На выбор точек врезки и соответствующих им точек выключения резака накладываются дополнительные ограничения технологического характера, которые в нашей модели формализуются в виде отображений A_1, \dots, A_N ; их можно разбить на две группы: предотвращение тепловой деформации деталей и исключение наиболее удаленных точек врезки. Рассмотрим подробнее суть данных ограничений, имея в виду, что A_1, \dots, A_N — модификации отображений A_1, \dots, A_N .

1) Предотвращение тепловой деформации деталей: для рассеивания тепла, выделяемого в материале при резке, в области врезки не должно быть пустот от уже вырезанных деталей или края листа (в участках материала, прилегающего к детали, происходит выделение избыточного тепла, в противном случае будет перегреваться сама деталь, что приведет к ее короблению). Пусть для каждого контура с индексом i задана величина теплового допуска $\delta_i \in \mathbb{R}$, $\delta_i > 0$. При анализе возможных точек врезки, соответствующих i -му контуру при условии, что индексы не вырезанных контуров образуют множество K , выбор ограничен множеством тех точек врезки x , которые удовлетворяют неравенству $(\rho(x, y) > \delta_i \ \forall k \in \overline{1, N} \setminus K \ \forall y \in \mathfrak{M}_k) \& (\rho(x, \tilde{y}) > \delta_i \ \forall k \in \overline{1, N} \setminus K \ \forall \tilde{y} \in \tilde{M}_k)$, где \tilde{M}_k — дискретизация (сетка) основной эквидистанты контура с индексом k . Обозначим через $\mathfrak{M}_i^{(1)}$ множество точек врезки i -го контура, удовлетворяющих правилу 1).

2) Исключение наиболее удаленных точек врезки: пусть для каждого контура задан допуск $\varepsilon_k \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_k \geq 0$, определяющий отклонение по расстоянию от ближайшей точки врезки при выборе точек включения резака, также пусть (в порядке реализации раскройного плана) i -контур посещается j -м, т. е. $\alpha(j) = i$. Выбираем из множества $\mathfrak{M}_i^{(1)}$ точку x' , для которой справедливо равенство $\mathbf{c}(y, x') = \min_{x \in \mathfrak{M}_i^{(1)}} \mathbf{c}(y, x)$, где $(y = x^0, x \in \mathfrak{M}_{\alpha(1)}^{(1)}) \vee (y \in \mathbf{M}_{\alpha(j-1)}, x \in \mathfrak{M}_{\alpha(j)}^{(1)}, j \in \overline{2, N})$.

Точка x' признается допустимой. Также допустимыми по критерию 2) считаются точки x из множества $\mathfrak{M}_i^{(1)}$, удовлетворяющие неравенству $\rho(y, x) - \rho(y, x') \leq \varepsilon_i$, где точка y — либо точка парковки резака, либо точка выключения инструмента на предыдущем по порядку движения контуре (см. выше).

Допустимые согласно 1) и 2) пары точек врезки и выключения резака образуют значенные отображения A_i . Возможна ситуация, когда в 1) не нашлось ни одной точки врезки, т. е. расположение пустот таково, что не может быть обеспечено рассеивание избыточного тепла нигде, кроме как на самой вырезаемой детали. Алгоритм должен продолжать работу и в такой ситуации, поэтому в данном случае производится отступление от последовательного применения правила 1) и затем правила 2) при выборе точек врезки. А именно: в случае, если $\mathfrak{M}_i^{(1)} = \emptyset$, сначала применяем правило 2), заменяя $\mathfrak{M}_i^{(1)}$ на \mathfrak{M}_i ; в результате находим множество ε_i -ближайших точек врезки (обозначим его через $\mathfrak{M}_i^{(2)}$). Затем среди элементов $\mathfrak{M}_i^{(2)}$ находим точку с наибольшим минимальным расстоянием от уже вырезанных контуров, т. е. точку врезки x'' , для которой справедливо равенство

$$\min_{k \in \overline{1, N} \setminus K} \min_{z \in M_k} \rho(x'', z) = \max_{\tilde{x} \in \mathfrak{M}_i^{(2)}} \min_{k \in \overline{1, N} \setminus K} \min_{z \in M_k} \rho(\tilde{x}, z),$$

где \tilde{M}_k определено выше, а y — точка, из которой совершается перемещение резака на i -й контур. Точка врезки x'' признается допустимой для контура i .

Данная алгоритмическая модель была реализована в виде программы для ПЭВМ, написанной на языке программирования C++, работающей под управлением 64-х разрядной операционной системы семейства Windows, начиная с Windows 7. Выполнение программы производится в многопоточном режиме: вычислительная часть реализована в отдельном от интерфейса пользователя потоке; имеется возможность графического представления траекторий движения резака с увеличением выбранных участков графика и сохранением графического отображения в файл формата bmp. Исходные данные и результаты работы программы хранятся в текстовых файлах специальной структуры.

Вычислительный эксперимент проводился на ПЭВМ с центральным процессором Intel Core i7, объемом ОЗУ 64 Гбайт с установленной операционной системой Windows 7 Максимальная SP1 x64.

Рассмотрим результаты работы программы применительно к конкретному тестовому примеру. Пусть $a_1 = -115$, $a_2 = 105$, $b_1 = -115$, $b_2 = 100$, точка парковки резака совпадает с началом координат, т. е. $x^0 = (0, 0)$, и задано 33 замкнутых контура, а также 27 адресных пар, образующих множество K . По соображениям объема опустим перечисление координат контуров, точек врезки и выключения резака, а также адресных пар. Пусть величина теплового допуска одинаковая для всех контуров и равна 5 ($\delta_i = 5$, $i \in \overline{1, 33}$). В процессе проведения вычислительного эксперимента будем варьировать величину параметра ε_i , $i \in \overline{1, 33}$, для простоты задавая одно значение для всех контуров. На рисунках значком \triangleleft помечены точки врезки, а символом \triangleright — точки выключения резака; точки дискретизации основных эквидистант обозначены символами \triangle , \circ и \square .

В случае $\varepsilon_i = 30$, $i \in \overline{1, 33}$, величина совокупных затрат $V = 44.73$. Время счета составило 8 час. 17 мин. 31 сек. График маршрута и трассы приведен на рис. 1.

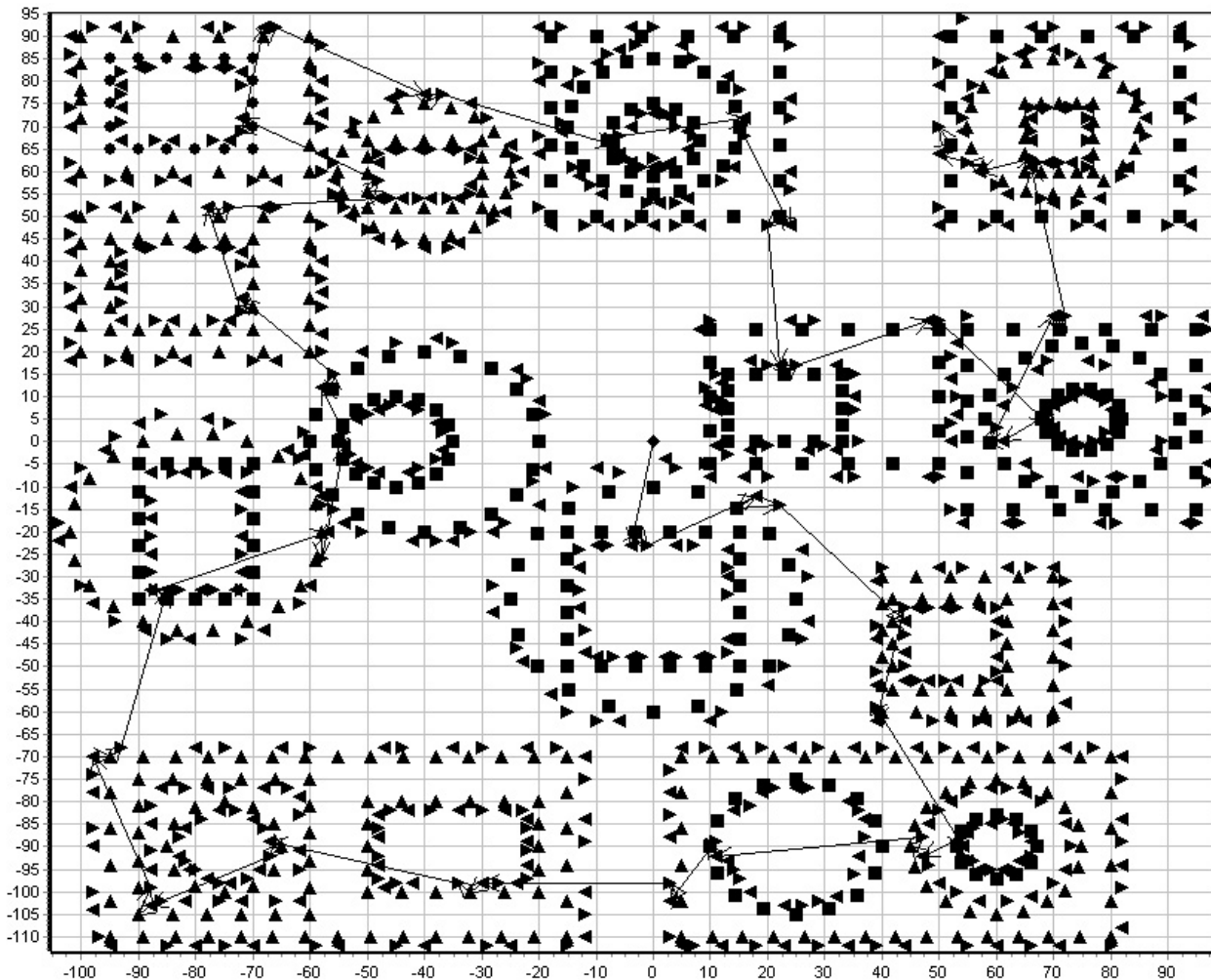


Рис. 1. Маршрут и трасса при значении ε_i , равном 50

При значении допусков $\varepsilon_i = 20$, $i \in \overline{1, 33}$, величина затрат, а также маршрут и трасса не изменились, а время счета составило 8 час. 10 мин. 45 сек.

В случае, если $\varepsilon_i = 10$, $i \in \overline{1, 33}$, общая величина затрат $V = 47.45$, а время счета составило 8 час. 0 мин. 47 сек. Изображение маршрута и трассы приведено на рис. 2.

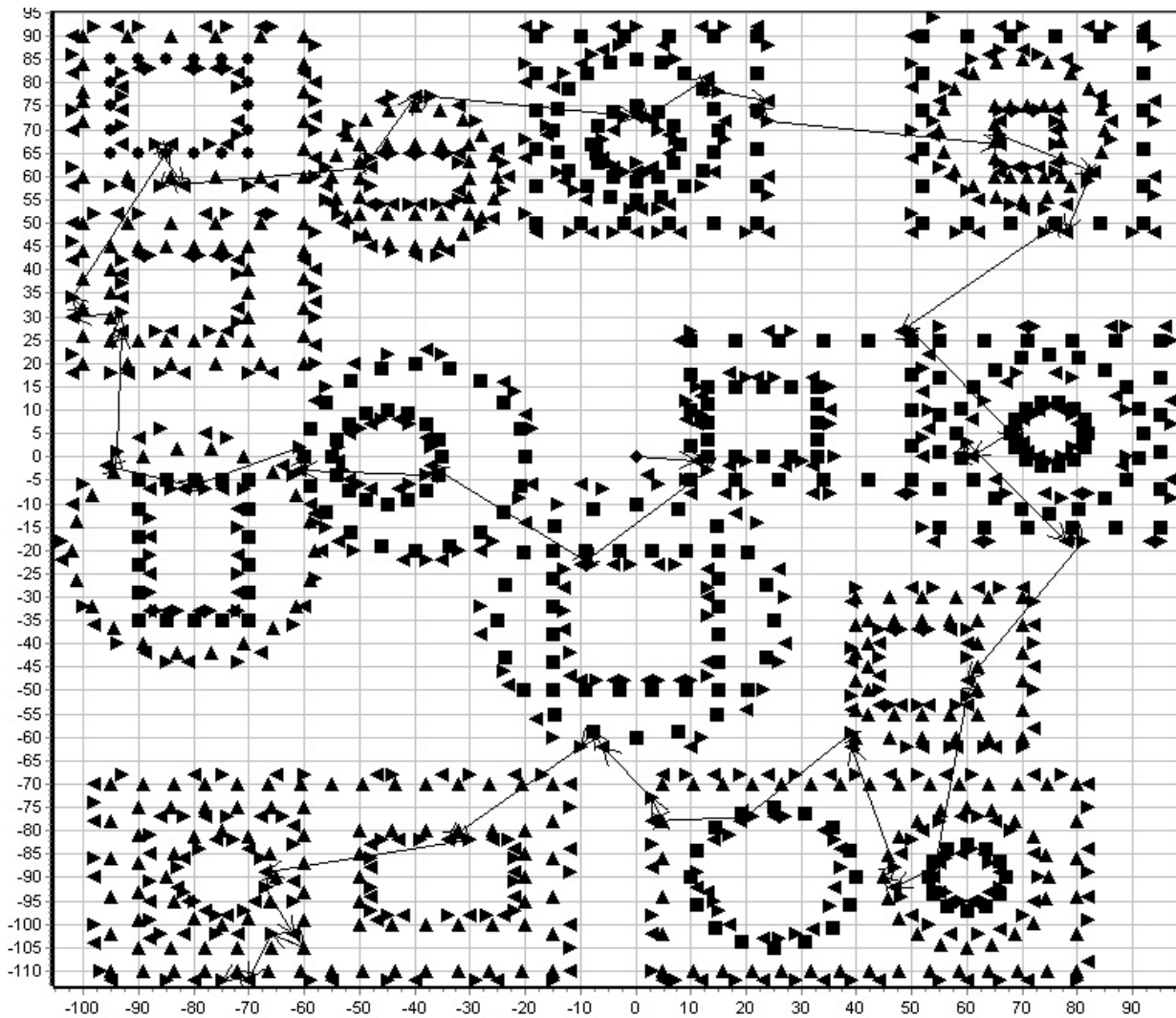


Рис. 2. Маршрут и трасса при значении ε_i , равном 10

Если значения допусков $\varepsilon_i = 5$, $i \in \overline{1, 33}$, то величина совокупных затрат $V = 51.73$, время счета составило 7 час. 52 мин. 51 сек. График маршрута и трассы приведен на рис. 3.

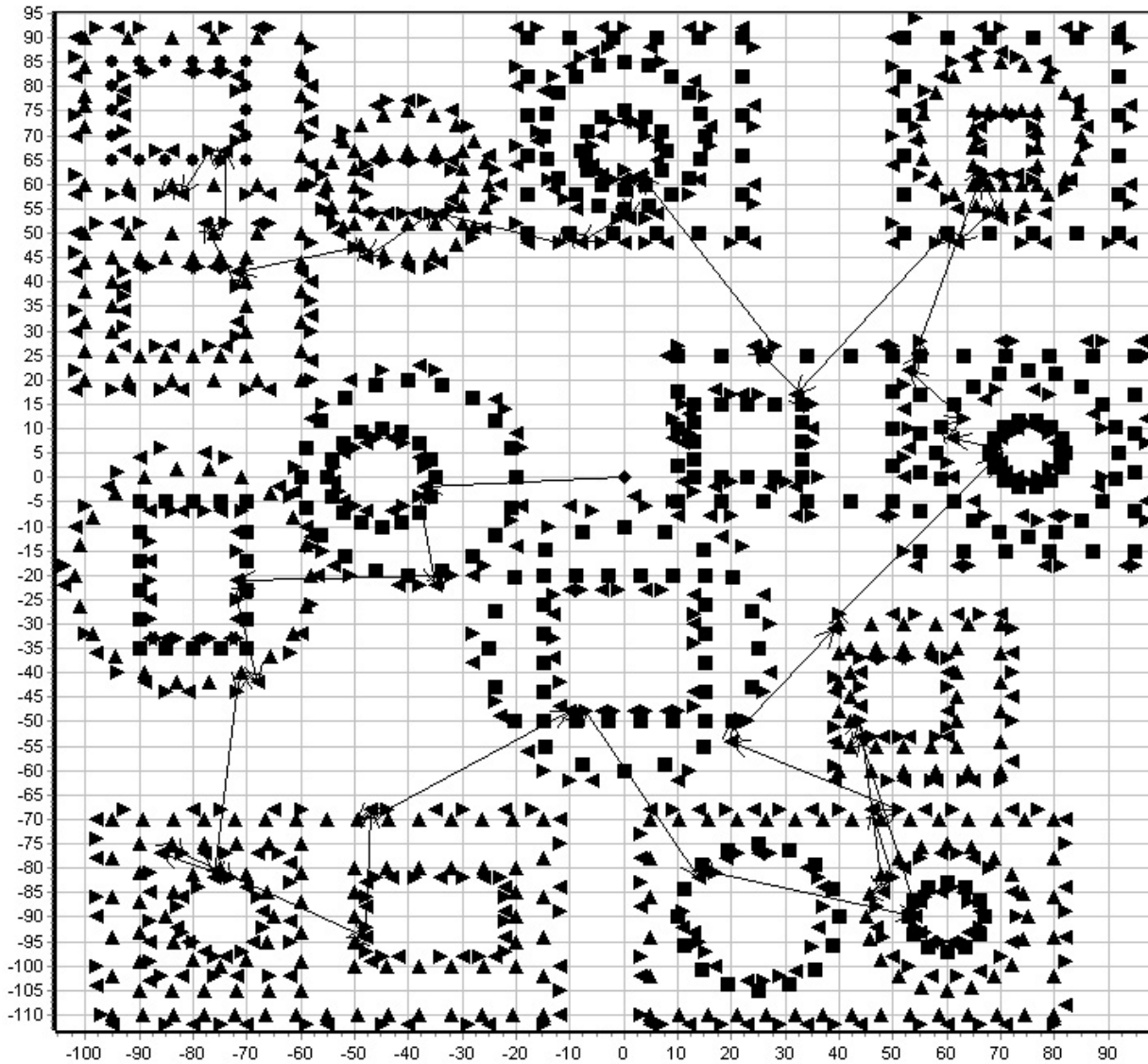


Рис. 3. Маршрут и трасса при значении ε_i , равном 5

В случае применения «жадного» эвристического алгоритма при $\varepsilon_i = 20$, $i \in \overline{1, 33}$, величина общих затрат $V = 91.16$, а время счета составило менее 1 с. График маршрута и трассы приведен на рис. 4.

Сопоставляя приведенные результаты вычислений, отметим, что с уменьшением величин допусков ε_i , $i \in \overline{1, 33}$, происходит ухудшение результата (увеличивается величина совокупных затрат), но при этом уменьшается время счета. Это вполне закономерно, ведь чем меньше величина допусков ε_i , $i \in \overline{1, 33}$, тем меньше вариантов для выбора точек врезки при решении оптимизационных задач вида (4.17), что сказывается на значении задачи V , но, поскольку объем перебора меньше (в задачах (4.17) меньше мощности множеств $\mathbb{A}_j(x, k)$), то и совокупное время счета также получается меньше.

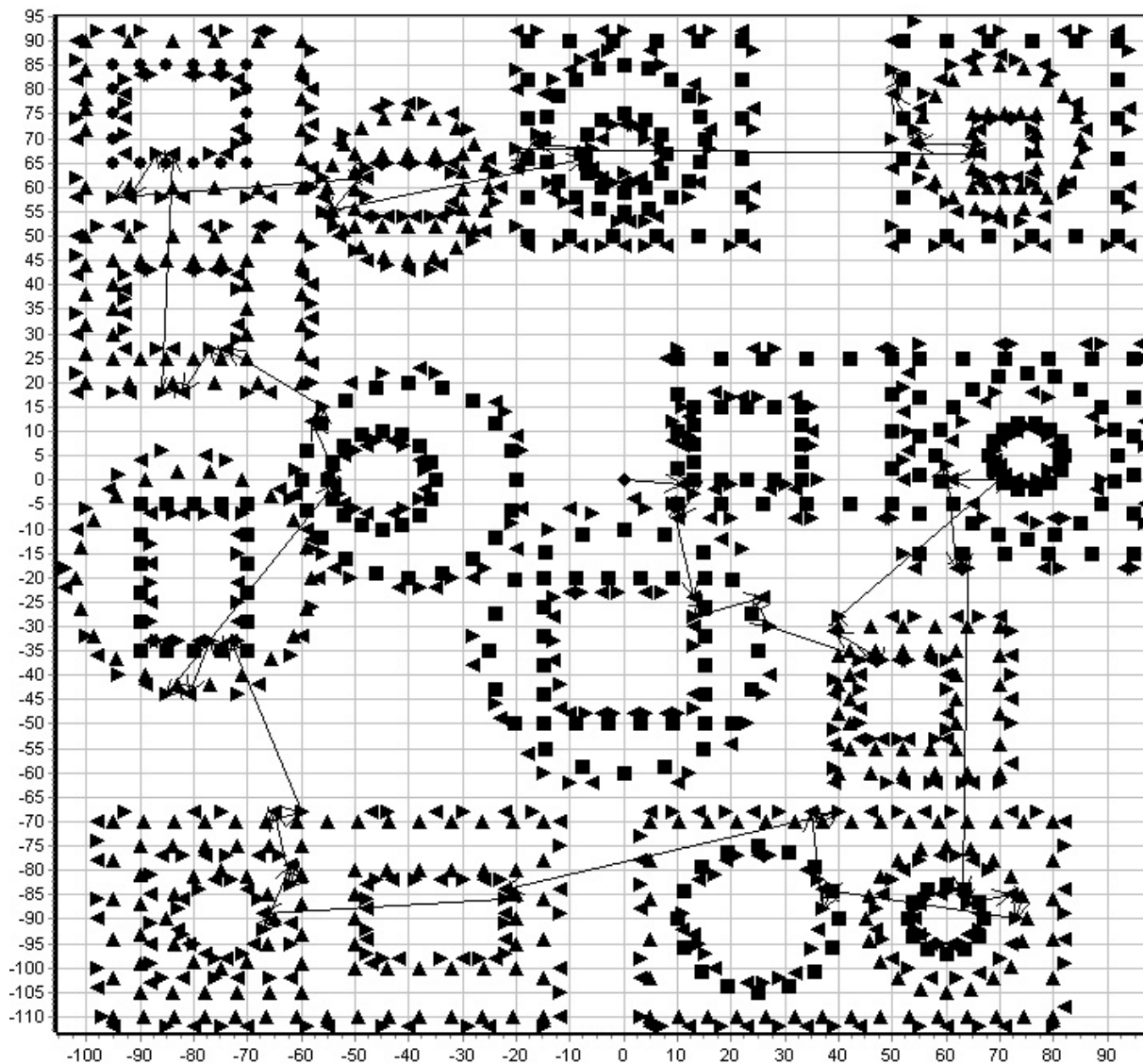


Рис. 4. Маршрут и трасса при значении ε_i , равном 50 («жадный» алгоритм)

При этом «жадный» алгоритм проигрывает по результату чуть более чем в 2 раза, что также вполне естественно: выбирая очередной контур по принципу близости в текущей позиции, мы можем оказаться в ситуации, когда до ближайших не вырезанных контуров расстояние будет достаточно велико (что и наблюдается на рис. 4 на последнем этапе движения инструмента), осуществив перемещение на ближайший из них, мы резко ухудшаем значение задачи, которое, напомним, определяется наибольшими (среди этапов движения по контурам) затратами. Такое поведение «жадного» метода связано с тем, что он не учитывает всю систему перемещений (2.3), а действует, исходя из сиюминутных интересов (алгоритм не обладает информационной памятью). Основное его положительное качество — это чрезвычайно малое время счета и низкие требования к ресурсам ЭВМ (производительность центрального процессора и объем оперативной памяти). Для оценки работы эвристических методов и, в частности, использованного «жадного» алгоритма, планируется применять усеченную версию метода на основе ДП, подразумевающую построение только значения задачи, т. е. V . Такой подход менее требователен к объему доступной памяти ЭВМ, поскольку позволяет осуществлять построение массива значений функции Беллмана по слоям без хранения всего массива (используются только значения функции Беллмана для текущего и предыдущего слоев; см. описание рекуррентной процедуры (4.14)). При проведении вычислительного эксперимента для $N = 36$ при значениях допусков $\delta_i = 5$, $i \in \overline{1, 36}$, и $\varepsilon_i = 50$, $i \in \overline{1, 36}$, получено значение задачи $V = 39.7$. При этом «жадный» алгоритм (аналог правила «иди в ближайшую точку») дал результат, равный 176.5. С помощью

усеченной версии метода на основе ДП мы получаем, что проигрыш по результату «жадного» метода составил 445%. Итак, в рассматриваемой задаче «на узкие места» применение жадного алгоритма (аналога правила «иди в ближайшую точку») приводит к неудовлетворительному результату, что отличает данную постановку от «аддитивной задачи» (см. [1–3]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ченцов А.Г., Ченцов А.А. Задача маршрутизации с ограничениями, зависящими от списка заданий // Доклады Академии Наук. 2015. Т. 465. № 2. С. 154–158.
2. Кошелева М.С., Ченцов А.А., Ченцов А.Г. О задаче маршрутизации с ограничениями, включающими зависимость от списка заданий // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21. № 4. С. 178–195.
3. Ченцов А.А., Ченцов А.Г. Задача маршрутизации, в которой функции стоимости и «текущие» ограничения зависят от списка заданий // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2015. Т. 20. Вып. 5. С. 1521–1525.
4. Петунин А.А. О некоторых стратегиях формирования маршрута инструмента при разработке управляющих программ для машин термической резки материала // Вестник УГАТУ. Серия: Управление, вычислительная техника и информатика. 2009. Т. 13. № 2 (35). С. 280–286.
5. Фроловский В.Д. Автоматизация проектирования управляющих программ тепловой резки металла на оборудовании с ЧПУ // Информационные технологии в проектировании и производстве. 2005. № 4. С. 63–66.
6. Петунин А.А., Ченцов А.Г., Ченцов П.А. К вопросу о маршрутизации движения инструмента в машинах листовой резки с числовым программным управлением // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Информатика. Телекоммуникации. Управление. 2013. Вып. 2 (169) С. 103–111.
7. Ченцов А.Г., Салий Я.В. Модель «неаддитивной» задачи маршрутизации с функциями стоимости, зависящими от списка заданий // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Математическое моделирование и программирование. 2015. Т. 8. № 1. С. 24–45.
8. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.
9. Дьедонне Ж. Основы современного анализа. М.: Мир, 1964. 430 с.
10. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р. Алгоритмы: построение и анализ. М.: МЦНМО, 1999. 960 с.
11. Ченцов А.Г. Экстремальные задачи маршрутизации и распределения заданий: вопросы теории. Москва–Ижевск: РХД, 2008. 238 с.
12. Ченцов А.Г., Чеблоков И.Б. Об одной задаче маршрутизации с внутренними работами // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. Вып. 1. С. 96–119.
13. Ченцов А.Г. К вопросу о маршрутизации комплексов работ // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. Вып. 1. С. 59–82.

Поступила в редакцию 27.02.2016

Ченцов Александр Георгиевич, член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник, отдел управляемых систем, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16;
профессор, Уральский федеральный университет, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19.
E-mail: chentsov@imm.uran.ru

Ченцов Алексей Александрович, к. ф.-м. н., научный сотрудник, отдел динамических систем, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
E-mail: chentsov.a@binsys.ru

A. G. Chentsov, A. A. Chentsov

Routing of displacements with dynamic constraints: “bottleneck problem”

Keywords: route, trace, preceding conditions, dynamic programming.

MSC: 05A05, 97N70, 97N80

A complicated variant of the “bottleneck problem” is considered, namely: the problem of sequential visiting of megalopolises with preceding constraints. It is supposed that costs functions and “current” constraints with respect to displacements selection depend on the tasks list which is not completed at the moment. The variant of widely understood dynamic programming is proposed, it doesn’t foresee (with preceding conditions) construction of the whole array of the Bellman function values; the special layers of this function realizing in its totality the partial array of its values are constructed (it helps to decrease the calculation complexity). An algorithm of the problem value (global extremum) calculation is proposed, the computer realization of which implies the existence of only one layer of the Bellman function in a memory of computer; the obtained value may be used for the heuristics testing. The optimal algorithm of “complete” solving of the route problem is constructed, within which all layers of the Bellman function are used at the route and trace constructing.

REFERENCES

1. Chentsov A.G., Chentsov A.A. Route problem with constraints depending on a list of tasks, *Doklady Mathematics*, 2015, vol. 92, issue 3, pp. 685–688.
2. Kosheleva M.S., Chentsov A.A., Chentsov A.G. On a routing problem with constraints that include dependence on a task list, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2015, vol. 21, no. 4, pp. 178–195 (in Russian).
3. Chentsov A.A., Chentsov A.G. Route problem in which cost functions and “current” constraints depend from tasks list, *Vestn. Tambov. Univ. Ser. Estestv. Tekh. Nauki*, 2015, vol. 20, no. 5, pp. 1521–1525 (in Russian).
4. Petunin A.A. About some strategies of the programming of tool route by developing of control programs for thermal cutting machines, *Vestnik UGATU*, 2009, vol. 13, no. 2 (35), pp. 280–286 (in Russian).
5. Frolovskii V.D. Automation of designing control programs for thermal cutting of metal by CNC equipment, *Informatsionnye Tekhnologii v Proektirovanii i Proizvodstve*, 2005, no. 4, pp. 63–66 (in Russian).
6. Petunin A.A., Chentsov A.G., Chentsov P.A. To the question about instrument routing in the automated machines of the sheet cutting, *St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Computer Science. Telecommunication and Control Systems*, 2013, issue 2 (169), pp. 103–111 (in Russian).
7. Chentsov A.G., Saliy Ya.V. A model of “nonadditive” routing problem where the costs depend on the set of pending tasks, *Vestn. Yuzhno-Ural. Gos. Univ., Ser. Mat. Model. Program.*, 2015, vol. 8, no. 1, pp. 24–45.
8. Kuratovskii K., Mostovskii A. *Teoriya mnozhestv* (Theory of sets), Moscow: Mir, 1970, 416 p.
9. Dieudonne J. *Osnovy sovremennogo analiza* (Foundations of modern analysis), Moscow: Mir, 1964, 430 p.
10. Cormen T., Leiserson Ch., Rivest R. *Introduction to algorithms* (1st ed.), MIT Press and McGraw-Hill, 1990. Translated under the title *Algoritmy. Postroenie i analiz* (The algorithms. Construction and analysis), Moscow: Moscow Center for Continuous Mathematical Education, 1999, 960 p.
11. Chentsov A.G. *Ekstremal’nye zadachi marshrutizatsii i raspredeleniya zadaniy: voprosy teorii* (Extremal problems of routing and assignment of tasks: questions of theory), Moscow–Izhevsk: Institute of Computer Science, 2008, 240 p.
12. Cheblokov I.B., Chentsov A.G. About one route problem with interior works, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp’yut. Nauki*, 2012, no. 1, pp. 96–119 (in Russian).
13. Chentsov A.G. To question of routing of works complexes, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp’yut. Nauki*, 2013, no. 1, pp. 59–82 (in Russian).

Received 27.02.2016

Chentsov Aleksandr Georgievich, Corresponding Member of the Russian Academy of Science, Main Researcher, Department of Controlled Systems, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia;
 Professor, Ural Federal University, ul. Mira, 19, Yekaterinburg, 620002, Russia.
 E-mail: chentsov@imm.uran.ru

Chentsov Aleksei Aleksandrovich, Candidate of Physics and Mathematics, Researcher, Department of Dynamical Systems, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia.
 E-mail: chentsov.a@binsys.ru