МАТЕМАТИКА 2016. Т. 26. Вып. 1

УДК 517.935, 517.938

© *Л. И. Родина, И. И. Тютеев*

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СЛУЧАЙНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ [1]

Исследуется асимптотическое поведение решений разностных уравнений, правая часть каждого из которых в данный момент времени зависит не только от значения в предыдущий момент, но и от случайного параметра, принимающего значения в заданном множестве Ω. Получены условия устойчивости по Ляпунову и асимптотической устойчивости положения равновесия, выполненные для всех значений случайных параметров и выполненные с вероятностью единица. Показано, что задача о сосуществовании стохастических циклов различных периодов имеет решение, которое существенно отличается от известного результата А. Н. Шарковского для детерминированного разностного уравнения, а именно — при определенных условиях из существования стохастического цикла длины k следует существование цикла любой длины $\ell > k$.

Ключевые слова: разностные уравнения со случайными параметрами, устойчивость по Ляпунову, асимптотическая устойчивость, циклическое решение.

DOI: 10.20537/vm160107

Введение

Известно, что многие задачи, возникающие в таких областях, как теория автоматов, теория массового обслуживания, популяционная динамика, моделирование финансовой устойчивости банков часто исследуются при помощи автономных разностных уравнений (см. [1, 2]). Например, развитие многих биологических популяций с неперекрывающимися поколениями (к которым можно отнести популяции некоторых видов насекомых, рыб, однолетних растений) определяется разностным уравнением

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{0.1}$$

где размер популяции x_{n+1} в момент времени $n+1$ выражается через размер популяции x_n в предыдущий момент времени. Свойства решений таких уравнений описаны, в частности, в работах [1, 3–8]. К наиболее известным результатам можно отнести теорему А. Н. Шарковского [3], [7, глава 3] о сосуществовании циклов различной длины и утверждение американских математиков Т. Ли и Дж. Йорка [4] о связи между наличием цикла периода три и существованием хаотических решений.

Рассмотрим обобщение модели (0.1) в предположении, что в каждый момент времени n функция $f : I \mapsto I$, $I = [a, b]$, зависит также от случайного параметра ω_n, принимающего значения в множестве Ω. Получим вероятностную модель, заданную разностным уравнением

$$x_{n+1} = f(\omega_n, x_n), \quad (\omega_n, x_n) \in \Omega \times I, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{0.2}$$

где Ω — заданное множество с сигма-алгеброй подмножеств $\widetilde{\mathfrak{A}}$, на которой определена вероятностная мера $\widetilde{\mu}$. Предполагаем, что для каждого $\omega \in \Omega$ функция $x \mapsto f'_x(\omega, x)$ непрерывна на отрезке I.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16–01–00346-а) и Министерства образования и науки РФ в рамках базовой части (проект 2003).

Введем вероятностное пространство $(\Sigma, \mathfrak{A}, \mu)$, где Σ означает множество последовательностей $\sigma = (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n, \dots) \in \Omega^\infty$, система множеств $\mathfrak{A}$ является наименьшей сигма-алгеброй, порожденной цилиндрическими множествами

$$D_n \doteq \{\sigma \in \Sigma : \omega_0 \in \Omega_0, \dots, \omega_n \in \Omega_n\}, \quad \text{где} \quad \Omega_j \in \widetilde{\mathfrak{A}}, \ j = 0, 1, \dots, n,$$

и определим меру $\widetilde{\mu}(D_n) = \widetilde{\mu}(\Omega_0) \cdot \widetilde{\mu}(\Omega_1) \cdot \ldots \cdot \widetilde{\mu}(\Omega_n)$. Тогда в силу теоремы А. Н. Колмогорова (см., например, [9, глава 2, § 3]) на измеримом пространстве $(\Sigma, \mathfrak{A})$ существует единственная вероятностная мера μ, которая является продолжением меры $\widetilde{\mu}$ на сигма-алгебру $\mathfrak{A}$. Отметим, что подобные вероятностные модели исследуются в [10–12].

В настоящей работе получены условия устойчивости по Ляпунову и асимптотической устойчивости положения равновесия уравнения (0.2), выполненные для всех значений случайных параметров и выполненные с вероятностью единица. Показано, что задача о сосуществовании стохастических циклов различного периода имеет решение, которое существенно отличается от известного результата А. Н. Шарковского для детерминированного уравнения; исследуются условия, при которых из существования стохастического цикла длины k следует существование цикла любой длины $\ell > k$.

§ 1. Условия устойчивости по Ляпунову и асимптотической устойчивости положения равновесия

Если в уравнении (0.2) зафиксируем $\omega \in \Omega$, то получим детерминированное разностное уравнение

$$x_{n+1} = f(\omega, x_n), \quad n = 0, 1, \dots. \tag{1.1}$$

Точка $x_*(\omega) \in I$ называется *положением равновесия* (или неподвижной точкой) уравнения (1.1), если выполнено равенство $f(\omega, x_*(\omega)) = x_*(\omega)$.

Определение 1. *Положением равновесия* (неподвижной точкой) уравнения со случайными параметрами (0.2) назовем точку $x_* \in I$ такую, что $f(\omega, x_*) = x_*$ для всех $\omega \in \Omega$.

Обозначим через $x_n(\sigma, p)$ решение уравнения (0.2) при заданном $\sigma \in \Sigma$, удовлетворяющее начальному условию $x_0(\sigma, p) = p \in I$.

Определение 2. Положение равновесия x_* уравнения (0.2) назовем *устойчивым по Ляпунову равномерно относительно множества* $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon, \Sigma_0) > 0$, что для всякого $\sigma \in \Sigma_0$ решение $x_n(\sigma, p)$ уравнения (0.2) такое, что $|p - x_*| < \delta$, удовлетворяет неравенству $|x_n(\sigma, p) - x_*| < \varepsilon$ для всех $n = 0, 1, \dots$.

Положение равновесия x_* уравнения (0.2) назовем *асимптотически устойчивым равномерно относительно множества* Σ_0, если оно устойчиво по Ляпунову равномерно относительно Σ_0 и существует $\Delta > 0$ такое, что для всякого $\sigma \in \Sigma_0$ решение $x_n(\sigma, p)$ уравнения (0.2) такое, что $|p - x_*| < \Delta$, удовлетворяет условию $\lim\limits_{n \to \infty} |x_n(\sigma, p) - x_*| = 0$.

Обозначим через $O_\Delta(x_*) = (x_* - \Delta, x_* + \Delta)$ окрестность точки x_* радиусом $\Delta > 0$.

Лемма 1. *Пусть точка $x_* \in I$ является положением равновесия уравнения* (0.2) *и существует $\Delta > 0$ такое, что $\sup\limits_{\omega \in \Omega} |f'_x(\omega, x)| \leqslant 1$ для всех $x \in O_\Delta(x_*)$. Тогда положение равновесия x_* устойчиво по Ляпунову равномерно относительно множества Σ.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем $p \in O_\Delta(x_*) \cap I$ и обозначим через $J(p, x_*) \subset I$ интервал с концами p и x_*. Зафиксируем произвольное $\sigma \in \Sigma$. По формуле конечных приращений найдется точка $\widehat{p} \in J(p, x_*)$ такая, что

$$|x_1(\sigma, p) - x_*| = |f(\omega_0, p) - f(\omega_0, x_*)| = |f'_x(\omega_0, \widehat{p})| \cdot |p - x_*|.$$

Поскольку $\widehat{p} \in O_\Delta(x_*) \cap I$, то

$$|x_1(\sigma,p) - x_*| = |f'_x(\omega_0,\widehat{p})| \cdot |p - x_*| \leqslant \sup_{\omega\in\Omega} |f'_x(\omega,\widehat{p})| \cdot |p - x_*| \leqslant |p - x_*|.$$

Так как $x_1 = x_1(\sigma,p) \in O_\Delta(x_*) \cap I$, то существует точка $\widehat{x}_1 \in O_\Delta(x_*) \cap I$ такая, что

$$|x_2(\sigma,p) - x_*| = |f(\omega_1,x_1) - f(\omega_1,x_*)| = |f'_x(\omega_1,\widehat{x}_1)| \cdot |x_1(\sigma,p) - x_*|,$$

поэтому $|x_2(\sigma,p) - x_*| \leqslant |x_1(\sigma,p) - x_*| \leqslant |p - x_*|$. Аналогично можно показать, что для всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $|x_n(\sigma,p) - x_*| \leqslant |p - x_*|$. Таким образом, если для заданного $\varepsilon > 0$ выберем $\delta = \min(\varepsilon,\Delta)$, то при $|p - x_*| < \delta$ неравенство $|x_n(\sigma,p) - x_*| < \varepsilon$ выполнено при всех $n = 0, 1, \ldots$. □

Теорема 1. *Пусть точка $x_* \in I$ является положением равновесия уравнения* (0.2) *и*

$$\overline{\lim_{x\to x_*}} \sup_{\omega\in\Omega} |f'_x(\omega,x)| < 1. \tag{1.2}$$

Тогда положение равновесия x_* асимптотически устойчиво равномерно относительно Σ.

Доказательство. В силу (1.2) найдутся постоянные $\Delta > 0$ и $C < 1$ такие, что $\sup\limits_{\omega\in\Omega} |f'_x(\omega,x)| \leqslant C < 1$ для всех $x \in O_\Delta(x_*)$. Рассуждая аналогично доказательству леммы 1, получаем, что для любых $p \in O_\Delta(x_*)$, $\sigma \in \Sigma$, для всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$|x_n(\sigma,p) - x_*| \leqslant C^n |p - x_*|, \text{ где } C < 1. \tag{1.3}$$

Из (1.3) следует, что $|x_n(\sigma,p) - x_*| < |p - x_*|$, поэтому положение равновесия x_* устойчиво по Ляпунову равномерно относительно Σ. Также из (1.3) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n(\sigma,p) - x_*| = 0$ для любых $p \in O_\Delta(x_*)$, $\sigma \in \Sigma$. Таким образом, положение равновесия p асимптотически устойчиво равномерно относительно множества Σ. □

§ 2. Условия асимптотической устойчивости с вероятностью единица

Пусть задано вероятностное пространство $(\Sigma,\mathfrak{A},\mu)$. Напомним, что некоторое свойство выполнено *с вероятностью единица,* если существует множество $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ такое, что $\mu(\Sigma_0) = 1$ и данное свойство верно для всех $\sigma \in \Sigma_0$. В этом разделе мы исследуем свойства устойчивости по Ляпунову и асимптотической устойчивости положения равновесия x_* уравнения (0.2), выполненные с вероятностью единица.

Отметим, что задачи об асимптотической устойчивости с вероятностью единица для решений систем стохастических уравнений Ито рассматривались в работе [13].

Определение 3. Положение равновесия x_* уравнения (0.2) назовем *устойчивым по Ляпунову с вероятностью единица* (*асимптотически устойчивым с вероятностью единица*), если существует множество $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ такое, что $\mu(\Sigma_0) = 1$ и x_* устойчиво по Ляпунову (асимптотически устойчиво) равномерно относительно множества Σ_0.

Далее буквой M будем обозначать математическое ожидание случайной величины.

Теорема 2. *Пусть точка $x_* \in I$ является положением равновесия уравнения* (0.2) *и найдется $\Delta > 0$ такое, что*

$$M\Big(\ln \sup_{x\in O_\Delta(x_*)} |f'_x(\omega,x)|\Big) < 0. \tag{2.1}$$

Тогда положение равновесия x_* асимптотически устойчиво с вероятностью единица.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $\{C_n(\sigma)\}_{n=0}^{\infty}$, где $C_n(\sigma) = C_n(\omega_n) = \sup\limits_{x\in O_\Delta(x_*)} |f'_x(\omega_n, x)|$. Введем также последовательность $\{S_n(\sigma)\}_{n=0}^{\infty}$, где

$$S_n(\sigma) = \ln C_0(\omega_0) + \ldots + \ln C_n(\omega_n), \quad n = 0, 1, \ldots,$$

которая является случайным блужданием на прямой. Из неравенства (2.1) следует, что с вероятностью единица $S_n(\sigma)$ уходит в минус бесконечность и достигает конечного максимума $S \geqslant 0$ (см. [14, глава 12, §2]). Это означает, что существует множество $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ такое, что $\mu(\Sigma_0) = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(\sigma) = -\infty$ для всех $\sigma \in \Sigma_0$ и найдется такое $S \geqslant 0$, что $S_n(\sigma) \leqslant S$ для всех $n = 0, 1, \ldots$ и всех $\sigma \in \Sigma_0$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} C_0(\omega_0) \cdot \ldots \cdot C_n(\omega_n) = 0$ и неравенство

$$C_0(\omega_0) \cdot \ldots \cdot C_n(\omega_n) \leqslant e^S \tag{2.2}$$

выполнено для всех $n = 0, 1, \ldots$ и всех $\sigma \in \Sigma_0$.

Возьмем $p \in O_{\Delta_0}(x_*) \cap I$, где $\Delta_0 = \Delta e^{-S} \leqslant \Delta$ и обозначим через $J(p, x_*) \subset I$ интервал с концами p и x_*. По формуле конечных приращений найдется точка $\widehat{p} \in J(p, x_*)$ такая, что $|x_1(\sigma, p) - x_*| = |f'_x(\omega_0, \widehat{p})| \cdot |p - x_*|$. Следовательно,

$$|x_1(\sigma, p) - x_*| \leqslant \sup_{x\in J(p,x_*)} |f'_x(\omega_0, x)| \cdot |p - x_*| \leqslant \sup_{x\in O_\Delta(x_*)} |f'_x(\omega_0, x)| \cdot |p - x_*| = C_0(\omega_0) \cdot |p - x_*|.$$

Из неравенства (2.2) при $n = 0$ следует, что $x_1 = x_1(\sigma, p) \in O_\Delta(x_*)$; кроме того, $x_1 \in I$. Найдем такую точку $\widehat{x}_1 \in J(x_1, x_*) \subset O_\Delta(x_*) \cap I$, что $|x_2(\sigma, p) - x_*| = |f'_x(\omega_1, \widehat{x}_1)| \cdot |x_1 - x_*|$. Тогда

$$|x_2(\sigma, p) - x_*| \leqslant C_1(\omega_1) \cdot |x_1 - x_*| \leqslant C_0(\omega_0) C_1(\omega_1) \cdot |p - x_*|.$$

Из (2.2) следует, что $x_2 = x_2(\sigma, p) \in O_\Delta(x_*)$. Аналогично получаем, что для всех $\sigma \in \Sigma_0$ для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$|x_n(\sigma, p) - x_*| \leqslant C_0(\omega_0) \cdot \ldots \cdot C_{n-1}(\omega_{n-1}) \cdot |p - x_*|. \tag{2.3}$$

Для заданного $\varepsilon > 0$ определим $\delta = \min(\varepsilon e^{-S}, \Delta_0)$. Тогда из неравенств (2.2) и (2.3) следует, что если $|p - x_*| < \delta$, то $|x_n(\sigma, p) - x_*| < \varepsilon$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и всех $\sigma \in \Sigma_0$. Далее, так как $\lim\limits_{n\to\infty} C_0(\omega_0) \cdot \ldots \cdot C_n(\omega_n) = 0$ с вероятностью единица, из (2.3) получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} |x_n(\sigma, p) - x_*| = 0$$

для любого $p \in O_{\Delta_0}(x_*)$ также с вероятностью единица. Таким образом, положение равновесия уравнения (0.2) асимптотически устойчиво с вероятностью единица. □

Следствие 1. *Пусть точка $x_* \in I$ является положением равновесия уравнения* (0.2) *и найдется $\Delta > 0$ такое, что*

$$M\Bigl(\sup_{x\in O_\Delta(x_*)} |f'_x(\omega, x)|\Bigr) < 1. \tag{2.4}$$

Тогда положение равновесия x_* асимптотически устойчиво с вероятностью единица.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим случайную величину $\xi(\omega) = \sup\limits_{x\in O_\Delta(x_*)} |f'_x(\omega, x)|$. Тогда $M\xi < 1$ в силу (2.4). Из неравенства Йенсена [9, глава 2, § 6] следует, что для выпуклой вверх функции $\ln x$ имеет место неравенство $\ln(M\xi) \geqslant M(\ln \xi)$. Далее, поскольку (2.4) равносильно неравенству $\ln(M\xi) < 0$, то $M(\ln \xi) \leqslant \ln(M\xi) < 0$, то есть выполнено условие (2.1). Таким образом, в силу теоремы 2 положение равновесия x_* асимптотически устойчиво с вероятностью единица. □

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$x_{n+1} = f(\omega_n, x_n), \quad (\omega_n, x_n) \in \Omega \times I, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{2.5}$$

где $\Omega = \{v_1, \ldots, v_r\}$, $v_i \in (0, 2]$, $\mu(v_i) = \mu_i > 0$, $i = 1, \ldots, r$, $\sum\limits_{i=1}^{r} \mu_i = 1$, $I = [0, 1]$, функция $f(\omega, x)$ задана равенством

$$f(\omega, x) = \begin{cases} \omega x, & x \in [0, 1/2], \\ \omega(1-x), & x \in (1/2, 1]. \end{cases} \tag{2.6}$$

Предложение 1. *Для уравнения* (2.5), (2.6) *имеют место следующие утверждения:*

1) *если* $v_{\max} \doteq \max\{v_1, \ldots, v_r\} \leqslant 1$, *то положение равновесия* $x_* = 0$ *устойчиво по Ляпунову равномерно относительно множества* Σ;

2) *если* $v_{\max} < 1$, *то положение равновесия* $x_* = 0$ *асимптотически устойчиво равномерно относительно множества* Σ;

3) *если* $\sum\limits_{i=1}^{r} \mu_i \ln v_i < 0$, *то положение равновесия* $x_* = 0$ *асимптотически устойчиво с вероятностью единица.*

Доказательство. Функция $f(\omega, x)$, заданная равенством (2.6), не является непрерывно дифференцируемой, но она непрерывно дифференцируема в окрестности положения равновесия $x_* = 0$, поэтому для исследования устойчивости по Ляпунову и асимптотической устойчивости можно воспользоваться леммой 1 и теоремами 1 и 2. Отсюда следуют все утверждения предложения, поскольку $|f'_x(\omega, x)| = \omega$ для всех $x \neq \dfrac{1}{2}$, а неравенство (2.1) эквивалентно неравенству $\sum\limits_{i=1}^{r} \mu_i \ln v_i < 0$. □

§ 3. О существовании циклов для уравнения со случайными параметрами

Вопрос о сосуществования циклов различного периода для детерминированного уравнения (0.1) впервые решен в работе А. Н. Шарковского [3]. Чтобы сформулировать основной результат, введем упорядочение натуральных чисел, которое называют порядком Шарковского:

$$\begin{gathered} 3 \succ 5 \succ 7 \succ \ldots \succ \\ \succ 2 \cdot 3 \succ 2 \cdot 5 \succ 2 \cdot 7 \succ \ldots \succ \\ \succ 2^2 \cdot 3 \succ 2^2 \cdot 5 \succ 2^2 \cdot 7 \succ \ldots \succ \\ \succ 2^3 \cdot 3 \succ 2^3 \cdot 5 \succ 2^3 \cdot 7 \succ \ldots \succ \\ \succ \ldots \succ \\ \succ \ldots \succ 2^5 \succ 2^4 \succ 2^3 \succ 2^2 \succ 2 \succ 1. \end{gathered} \tag{3.1}$$

Здесь в первой строке выписаны в порядке возрастания все нечетные числа, кроме единицы, во второй строке — произведения нечетных чисел (кроме 1) на 2, в k-й строке сверху записаны произведения нечетных чисел на 2^{k-1}, а в нижней строке представлены только степени двойки в порядке убывания.

Определение 4 (см. [7]). Точка $\beta_0 \in I$ называется *периодической точкой периода* $k \in \mathbb{N}$ для уравнения (0.1), если $f^k(\beta_0) = \beta_0$ и $f^m(\beta_0) \neq \beta_0$ при $m = 1, \ldots, k-1$. Если $k \geqslant 2$, то каждая из точек $\beta_m = f^m(\beta_0)$, $m = 1, \ldots, k-1$, также является периодической точкой периода k, т. е. точки $\beta_0, \ldots, \beta_{k-1}$ образуют периодическую траекторию или *цикл* $B = \{\beta_0, \ldots, \beta_{k-1}\}$ *периода* k (здесь $f^1 = f$, $f^k = f(f^{k-1})$, $k = 2, 3, \ldots$).

Теорема (А. Н. Шарковский [3]). *Пусть $f : I \mapsto I$ — непрерывная функция и пусть уравнение* (0.1) *имеет цикл длины k. Тогда уравнение* (0.1) *имеет цикл длины m для всех таких m, что $k \succ m$ в указанном выше порядке* (3.1).

Из теоремы А. Н. Шарковского следует, что если уравнение (0.1) не имеет циклов длины два, то оно не имеет никаких циклов; а если это уравнение имеет цикл длины три, то оно имеет цикл любой длины.

Определение 5. Точку $\alpha_0 \in I$ назовем *стохастически периодической точкой периода* $k \in \mathbb{N}$ для уравнения (0.2), если существуют $\omega_{i_0}, \ldots, \omega_{i_{k-1}} \in \Omega$ такие, что $x_k(\sigma, \alpha_0) = \alpha_0$ и $x_m(\sigma, \alpha_0) \neq \alpha_0$ при $m = 1, \ldots, k-1$, $\sigma = (\omega_{i_0}, \ldots, \omega_{i_{k-1}}, \omega_k, \omega_{k+1}, \ldots)$.

Отметим, что если точка $\alpha_0 \in I$ является стохастически периодической точкой периода $k \geqslant 2$, то точки $\alpha_1 = f(\omega_{i_0}, x_k)$, $\alpha_2 = f(\omega_{i_1}, f(\omega_{i_0}, x_k)), \ldots, \alpha_{k-1} = f(\omega_{i_{k-2}}, \ldots, f(\omega_{i_0}, x_k))$ также стохастически периодические и образуют *стохастический цикл* длины k. Покажем, что для стохастического цикла порядок Шарковского нарушается, а именно — при определенных условиях из существования стохастического цикла длины k следует существование стохастического цикла любой длины $\ell > k$.

Утверждение 1. *Пусть $I = [a, b]$ и существуют $v_i \neq v_j \in \Omega$ такие, что:*

а) $f(v_i, a) = f(v_i, b) = f(v_j, a) = f(v_j, b) = a$;

б) существует $c_1 \in (a, b)$ такое, что функция $f(v_i, x)$ возрастает на интервале (a, c_1), $f(v_i, c_1) = b$ и $f(v_i, x) > x$ для всех $x \in (a, c_1]$.

Тогда выполнены следующие свойства:

1) *если в интервале (a, b) содержится точка x_1 такая, что $f(v_j, x_1) = x_1$, то для любого $\ell > 1$ существует стохастически периодическая точка периода ℓ;*

2) *если для некоторого $k > 1$ в интервале (a, b) содержится стохастически периодическая точка x_k периода k при $\omega_{i_0} = v_j$, $\omega_{i_1} = \ldots = \omega_{i_{k-1}} = v_i$, то для любого $\ell > k$ существует стохастически периодическая точка периода ℓ.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем следующие обозначения:

$$f_i(x) \doteq f(v_i, x), \;\; f_i^2(x) \doteq f(v_i, f(v_i, x)),$$
$$f_i^{m+1}(x) \doteq f\big(v_i, f_i^m(x)\big) = f_i^m\big(v_i, f_i(x)\big), \quad m = 1, 2, \ldots.$$

Функция $f_i(x)$ непрерывна, $f_i(a) = a$ и $f_i(c_1) = b$, поэтому на отрезке $[a, c_1]$ она принимает все промежуточные значения от a до b. Следовательно, существует точка $c_2 \in (a, c_1)$ такая, что $f_i(c_2) = c_1$. В этой точке также выполнено равенство $f_i^2(c_2) = f_i(c_1) = b$. Поскольку $f_i(a) = a$, $f_i(c_2) = c_1$, то существует точка $c_3 \in (a, c_2)$ такая, что $f_i(c_3) = c_2$. Тогда $f_i^2(c_3) = f_i(c_2) = c_1$ и

$$f_i^3(c_3) = f_i^2(c_2) = f_i(c_1) = b.$$

Аналогично, для любого $m > 3$ найдется такая точка $c_m \in (a, c_{m-1})$, что $f_i^m(c_m) = b$, причем $a < c_m < c_{m-1} < \ldots < c_2 < c_1$. Так как функция $f_i(x)$ возрастает на интервале (a, c_1), то функция $f_i^m(x)$ возрастает на (a, c_m), поэтому можем определить обратную к ней функцию $f_i^{-m}(x) : [a, b] \mapsto [a, c_m]$, которая возрастает на (a, b) и $f_i^{-m}(a) = a$, $f_i^{-m}(b) = c_m$.

Введем в рассмотрение функции $h_m(x) = f_i^{-m+1}(x) - f_j(x)$, $x \in [a, b]$, $m = 1, 2, \ldots$, где $f_i^0(x) \doteq x$. Поскольку $x_k \in (a, b)$ — стохастически периодическая точка периода k для уравнения (0.2) при $\omega_{i_0} = v_j$, $\omega_{i_1} = \ldots = \omega_{i_{k-1}} = v_i$, то x_k является решением уравнения $f_i^{k-1}(f_j(x)) = x$, т. е. $h_k(x_k) = 0$. Из неравенства $f_i(x) > x$ при $x \in (a, c_1]$ следует, что $f_i^{-1}(x) < x$ при всех $x \in (a, b]$, поэтому из условия возрастания функции $f_i^{-1}(x)$ получаем, что $f_i^{-2}(x) < f_i^{-1}(x)$ при $x \in (a, b]$ и

$$f_i^{-m}(x) < \ldots < f_i^{-2}(x) < f_i^{-1}(x) < x, \quad x \in (a, b].$$

Отсюда следуют неравенства для функций $h_m(x)$:

$$h_m(x) < h_{m-1}(x) < \ldots < h_2(x) < h_1(x), \quad x \in (a, b].$$

Поэтому, если $\ell > k$, то $h_\ell(x) < h_k(x)$ для всех $x \in (a, b]$ и так как $h_k(x_k) = 0$, то $h_\ell(x_k) < 0$. Найдем $h_\ell(b) = c_{\ell-1} - a > 0$. Следовательно, уравнение $h_\ell(x) = 0$ имеет хотя бы одно решение $x_\ell \in (x_k, b)$.

Покажем, что точка x_ℓ является стохастически периодической точкой периода ℓ. Действительно, равенство $h_\ell(x_\ell) = 0$ равносильно равенству $f_i^{\ell-1}(f_j(x_\ell)) = x_\ell$, а из неравенства $h_m(x_\ell) > 0$, где $m = 1, \ldots, \ell-1$, следует, что $f_i^{m-1}(f_j(x_\ell)) < x_\ell$ при $m = 1, \ldots, \ell-1$. Поэтому, если положить $\omega_{i_0} = v_j$, $\omega_{i_1} = \ldots = \omega_{i_{\ell-1}} = v_i$, то

$$x_\ell(\sigma, x_\ell) = f_i^{\ell-1}(f_j(x_\ell)) = x_\ell \quad \text{и} \quad x_m(\sigma, x_\ell) = f_i^{m-1}(f_j(x_\ell)) \neq x_\ell$$

при $m = 1, \ldots, \ell-1$, $\sigma = (\omega_{i_0}, \ldots, \omega_{i_{\ell-1}}, \omega_\ell, \omega_{\ell+1}, \ldots)$. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ризниченко Г.Ю. Лекции по математическим моделям в биологии. Часть 1. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. 232 с.
2. Тен В.В. Моделирование и инструментальная поддержка финансовой устойчивости банка: дисс. . . . докт. экон. наук / Тамбовский государственный университет. Тамбов, 2006. 350 с.
3. Шарковский А.Н. Сосуществование циклов непрерывного преобразования прямой в себя // Украинский математический журнал. 1964. Т. 16. № 1. С. 61–71.
4. Li T.-Y., Yorke J.A. Period three implies chaos // The American Mathematical Monthly. 1975. Vol. 82. № 10. P. 985–992.
5. Свирежев Ю.М., Логофет Д.О. Устойчивость биологических сообществ. М.: Наука, 1978. 352 с.
6. Шапиро А.П., Луппов С.П. Рекуррентные уравнения в теории популяционной биологии. М.: Наука, 1983. 133 с.
7. Шарковский А.Н., Коляда С.Ф., Сивак А.Г., Федоренко В.В. Динамика одномерных отображений. Киев: Наукова думка, 1989. 216 с.
8. Бобровски Д. Введение в теорию динамических систем с дискретным временем. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2006. 360 с.
9. Ширяев А.Н. Вероятность. М.: Наука, 1989. 580 с.
10. Мастерков Ю.В., Родина Л.И. Достаточные условия локальной управляемости систем со случайными параметрами для произвольного числа состояний системы // Известия вузов. Математика. 2008. № 3. С. 38–49.
11. Родина Л.И. О некоторых вероятностных моделях динамики роста популяций // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. Вып. 4. С. 109–124.
12. Родина Л.И. Об инвариантных множествах управляемых систем со случайными коэффициентами // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2014. Вып. 4. С. 109–121.
13. Хасьминский Р.З. Необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости линейных стохастических систем // Теория вероятностей и ее применения. 1967. Т. 12. Вып. 1. С. 167–172.
14. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984. 738 с.

Поступила в редакцию 20.01.2016

Родина Людмила Ивановна, д. ф.-м. н., заведующая кафедрой математического анализа, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: box0589@udmnet.ru

Тютеев Илья Индусович, аспирант, кафедра математического анализа, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: it.30@mail.ru

МАТЕМАТИКА 2016. Т. 26. Вып. 1

L. I. Rodina, I. I. Tyuteev

About asymptotical properties of solutions of difference equations with random parameters

Keywords: difference equations with random parameters, Lyapunov stability, asymptotical stability, cyclic solution.

MSC: 34A60, 37N35, 49J15, 93B03

We investigate the asymptotic behavior of solutions of difference equations. Their right-hand sides at given time depend not only on the value of state at the previous moment, but also on a random value from a given set Ω. We obtain conditions of Lyapunov stability and asymptotic stability of the equilibrium for all values of random parameters and with probability one. We show that the problem of coexistence of stochastic cycles of different periods has a solution, which strongly differs from a known Sharkovsky result for a determined difference equation. Under some conditions, the existence of a stochastic cycle of length k implies the existence of a cycle of any length $\ell > k$.

REFERENCES

1. Riznichenko G.Yu. *Lektsii po matematicheskim modelyam v biologii. Chast' 1* (Lectures on mathematical models in biology, Part 1), Izhevsk: Regular and Chaotic Dynamics, 2002, 232 p.
2. Ten V.V. Modelling and tool support of the bank's financial stability, *Dr. Sci. (Econom.) Dissertation*, Tambov, 2006, 350 p. (In Russian).
3. Sharkovskii A.N. The coexistence of cycles for a continuous mapping of the line in itself, *Ukr. Mat. Zh.*, 1964, vol. 16, no. 1, pp. 61–71 (in Russian).
4. Li T.-Y., Yorke J.A. Period three implies chaos, *The American Mathematical Monthly*, 1975, vol. 82, no. 10, pp. 985–992.
5. Svirezhev Yu.M., Logofet D.O. *Ustoichivost' biologicheskikh soobshchestv* (Stability of biological communities), Moscow: Nauka, 1978, 352 p.
6. Shapiro A.P., Luppov S.P. *Rekurrentnye uravneniya v teorii populyatsionnoi biologii* (The recurrent equations in the theory of population biology), Moscow: Nauka, 1983, 133 p.
7. Sharkovskii A.N., Kolyada S.F., Sivak A.G., Fedorenko V.V. *Dinamika odnomernykh otobrazhenii* (Dynamics of one-dimensional mappings), Kiev: Naukova dumka, 1989, 216 p.
8. Bobrovski D. *Vvedenie v teoriyu dinamicheskikh sistem s diskretnym vremenem* (Introduction to the theory of discrete-time dynamical systems), Izhevsk: Regular and Chaotic Dynamics, 2006, 360 p.
9. Shiryaev A.N. *Veroyatnost'* (Probability), Moscow: Nauka, 1989, 580 p.
10. Masterkov Yu.V., Rodina L.I. Sufficient conditions for the local controllability of systems with random parameters for an arbitrary number of system states, *Russian Mathematics*, 2008, vol. 52, no. 3, pp. 34–44.
11. Rodina L.I. On some probability models of dynamics of population growth, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2013, no. 4, pp. 109–124 (in Russian).
12. Rodina L.I. About invariant sets of control systems with random coefficients, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2014, no. 4, pp. 109–121 (in Russian).
13. Khas'minskii R.Z. Necessary and sufficient conditions for the asymptotic stability of linear stochastic systems, *Theory Probab. Appl.*, 1967, vol. 12, no. 1, pp. 144–147.
14. Feller W. *An introduction to probability theory and its applications, Vol. 2*, Wiley, 1971. Translated under the title *Vvedenie v teoriyu veroyatnostei i ee prilozheniya*, vol. 2, Moscow: Mir, 1984, 738 p.

Received 20.01.2016

Rodina Lyudmila Ivanovna, Doctor of Physics and Mathematics, Head of the Department of Mathematical Analysis, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: box0589@udmnet.ru

Tyuteev Il'ya Indusovich, Post-Graduate Student, Department of Mathematical Analysis, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: it.30@mail.ru