ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ

МАТЕМАТИКА 2016. Т. 26. Вып. 1

УДК 517.935, 517.938

© *Я. Ю. Ларина*

# О СЛАБОЙ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ [1]

Продолжено исследование условий положительной инвариантности и асимптотической устойчивости заданного множества относительно управляемой системы с импульсным воздействием. Рассматривается множество $\mathfrak{M} \doteq \{(t,x) \in [t_0,+\infty) \times \mathbb{R}^n : x \in M(t)\}$, где функция $t \to M(t)$ непрерывна в метрике Хаусдорфа и для каждого $t \in [t_0,+\infty)$ множество $M(t)$ непусто и компактно. В терминах функций Ляпунова и производной Кларка получены условия слабой положительной инвариантности данного множества, слабой равномерной устойчивости по Ляпунову и слабой асимптотической устойчивости. Также доказана теорема сравнения для решений систем и уравнений с импульсами, следствием которой являются условия существования решений системы, асимптотически стремящихся к нулю. Полученные результаты проиллюстрированы на примере модели конкуренции двух видов, подверженных импульсному управлению в фиксированные моменты времени.

*Ключевые слова*: управляемые системы с импульсным воздействием, функции Ляпунова, слабая асимптотическая устойчивость.

DOI: 10.20537/vm160106

## Введение

Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием возникают при описании реальных процессов с кратковременными возмущениями, когда их длительностью можно пренебречь и считать, что они носят «мгновенный» характер. Теорией дифференциальных уравнений и управляемых систем с импульсными воздействиями в разные годы занимались такие авторы, как В. И. Гурман, В. А. Дыхта, С. Т. Завалищин, А. А. Мартынюк, Б. М. Миллер, А. Д. Мышкис, Н. А. Перестюк, А. М. Самойленко, А. Н. Сесекин и многие другие. Данная работа является продолжением работы [1], в которой исследовались условия положительной инвариантности заданного множества $\mathfrak{M}$, равномерной устойчивости по Ляпунову и равномерной асимптотической устойчивости.

Получено обобщение одного из результатов работы А. М. Самойленко и Н. А. Перестюка [2] на управляемые системы с импульсным воздействием. Приведем здесь это утверждение из [2]. Рассматривается система с импульсами

$$\dot{x} = h(t,x), \quad t \neq \tau_i(x), \quad \Delta x|_{t=\tau_i(x)} = I_i(x), \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \tag{0.1}$$

где $\Delta x|_{t=\tau_i(x)} = x(\tau_i(x)) - x(\tau_i(x)-0)$, $\tau_i(x) < \tau_{i+1}(x)$ для всех $i = 1,2,\ldots$; функции $h(t,x)$ и $I_i(x)$ непрерывны на множестве $Z = \{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : t \geqslant t_0,\ \|x\| \leqslant b < b_0\}$ и удовлетворяют условию Липшица по $x$ равномерно относительно $t$ и $i$ (см. [2, с. 131]). Функции $\tau_i(x)$ удовлетворяют условию Липшица

$$\|\tau_i(x') - \tau_i(x'')\| \leqslant N\|x' - x''\|$$

при всех $i = 1,2,\ldots$, $\|x'\| \leqslant b$, $\|x''\| \leqslant b$ и неравенству

$$\tau_i(x) \geqslant \tau_i(x + I_i(x)).$$

Предполагается также, что $\tau_i(x) \to \infty$ при $i \to \infty$, $h(t,0) = 0$, $I_i(0) = 0$, скалярная функция $V(t,x)$ удовлетворяет условию $V(t,0) = 0$, определена и непрерывно дифференцируема на множестве

$$Z_0 = \{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : t \geqslant t_0,\ \|x\| < b_0\}.$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16–01–00346-а).

Функция $V(t,x)$ называется *положительно определенной* на множестве $Z_0$, если существует скалярная функция $W(x)$, $W(0)=0$, непрерывная при $\|x\|<b_0$ такая, что для всех $t\geqslant t_0$

$$V(t,x)\geqslant W(x)>0 \quad \text{при } x\neq 0.$$

Обозначим $\operatorname{grad}_x V(t,x)=\left(\dfrac{\partial V(t,x)}{\partial x_1},\ldots,\dfrac{\partial V(t,x)}{\partial x_n}\right)$.

**Теорема 1** (см. [2, с. 132]). *Если существует положительно определенная функция $V(t,x)$, удовлетворяющая в множестве $Z$ неравенствам*

$$\begin{gathered}\frac{\partial V(t,x)}{\partial t}+\big\langle \operatorname{grad}_x V(t,x),h(t,x)\big\rangle\leqslant 0,\\ V(\tau_i(x),x+I_i(x))\leqslant V(\tau_i(x),x),\quad i=1,2,\ldots,\end{gathered}\tag{0.2}$$

*то тривиальное решение системы* (0.1) *устойчиво по Ляпунову.*

*Если вместо второго неравенства из* (0.2) *выполнено неравенство*

$$V(\tau_i(x),x+I_i(x))-V(\tau_i(x),x)\leqslant-\psi\big(V(\tau_i(x),x)\big),\quad i=1,2,\ldots,$$

*где $\psi(s)$ — непрерывная при $s\geqslant 0$ функция такая, что $\psi(0)=0$ и $\psi(s)>0$ при $s>0$, то нулевое решение системы* (0.1) *асимптотически устойчиво.*

В данной работе в терминах функций А. М. Ляпунова и производной Ф. Кларка доказаны теоремы сравнения для систем с импульсным воздействием, исследуются условия слабой положительной инвариантности заданного множества $\mathfrak{M}$ относительно управляемой системы, слабой равномерной устойчивости по Ляпунову и слабой асимптотической устойчивости. Отметим, что здесь рассматривается функция Ляпунова относительно заданного множества, которая введена и исследована в работах Е. Л. Тонкова и Е. А. Панасенко [3,4], и ее определение отличается от общепринятых.

## § 1. Условия слабой положительной инвариантности и слабой асимптотической устойчивости для систем с импульсным воздействием

Результаты исследований [3–7] распространяются на управляемые системы с импульсным воздействием

$$\begin{gathered}\dot x=f(t,x,u),\quad t\neq\tau_i,\\ \Delta x|_{t=\tau_i}=g(x,w_i),\quad (t,x,u,w_i)\in[t_0,+\infty)\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^p.\end{gathered}\tag{1.1}$$

Здесь $\mathbb{R}^n$ — $n$-мерное евклидово пространство с нормой $\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$, векторы $w_i$, $i=1,2,\ldots$, являются управляющими воздействиями, влияющими на поведение системы в моменты времени $t=\tau_i$, и принимают значения в заданном компактном множестве $W\subset\mathbb{R}^p$. Предполагаем, что функции $f(t,x,u)$ и $g(x,w)$ непрерывны для всех $(t,x,u)\in[t_0,+\infty)\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ и всех $(x,w)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p$ соответственно, множество $U(t,x)$ компактно и функция $U(t,x)$ полунепрерывна сверху в метрике Хаусдорфа при всех $(t,x)\in[t_0,+\infty)\times\mathbb{R}^n$, решения системы (1.1) непрерывны справа. Относительно последовательности $\{\tau_i\}_{i=0}^{\infty}$ полагаем, что

$$t_0=\tau_0<\ \tau_1<\tau_2<\ldots \quad \text{и} \quad \lim_{i\to\infty}\tau_i=+\infty.$$

**Определение 1.** *Допустимым процессом управляемой системы* (1.1) назовем функцию

$$t\to(u(t),w(t),x(t))\in\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^n,$$

которая удовлетворяет следующим условиям:

1) управление $u(t)$ определено на $I=(t_0,\tau_1)\cup(\tau_1,\tau_2)\cup\ldots$, ограничено и измеримо по Лебегу;

2) функция $w(t) = 0$ при $t \in I$ и $w(\tau_i) = w_i, w_i \in W$ для всех $i = 1, 2, \ldots$,

$$\Delta x|_{t=\tau_i} = x(\tau_i) - x(\tau_i - 0) = g(x, w_i);$$

3) решение $x(t)$ в смысле Каратеодори системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x, u(t))$$

определено для всех $t \in (\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ и $x(\tau_i) = x(\tau_i - 0) + g(x(\tau_i - 0), w_i)$;

4) имеет место включение $u(t) \in U(t, x(t))$.

Отвечающие допустимому процессу $(u(t), w(t), x(t))$ управления $u(t)$ и $w(t)$ называются *допустимыми управлениями* системы (1.1).

Введем в рассмотрение множество $\mathfrak{M} \doteq \big\{(t, x) \in [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n : x \in M(t)\big\}$, заданное функцией $t \to M(t)$, непрерывной в метрике Хаусдорфа; предполагаем, что для каждого $t \in \mathbb{R}$ множество $M(t)$ непусто и компактно. Пусть $M^r(t)$ — замкнутая $r$-окрестность множества $M(t)$, то есть множество таких точек $x \in \mathbb{R}^n$, что $\varrho(x, M(t)) \leqslant r$, $N^r(t) = M^r(t) \backslash M(t)$ — внешняя $r$-окрестность границы множества $M(t)$ (здесь $\varrho(x, M) = \inf\limits_{y \in M} \|x - y\|$ — расстояние от точки $x \in \mathbb{R}^n$ до множества $M \subset \mathbb{R}^n$). Построим множества

$$\mathfrak{M}^r \doteq \big\{(t, x) \in [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n : x \in M^r(t)\big\}, \quad \mathfrak{N}^r \doteq \big\{(t, x) \in [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n : x \in N^r(t)\big\}.$$

**Определение 2** (см. [3]). Скалярная функция $V(t, x)$ переменных $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ называется *функцией Ляпунова* относительно множества $\mathfrak{M}$, если существует $r > 0$ такое, что для всех $(t, x) \in \mathfrak{M}^r$ функция $V(t, x)$ удовлетворяет локальному условию Липшица по переменным $(t, x)$ и следующим условиям:

1. $V(t, x) = 0$ для всех $(t, x) \in \mathfrak{M}$;
2. $V(t, x) > 0$ для всех $(t, x) \in \mathfrak{N}^r$.

Функция $V(t, x)$ называется *определенно положительной* (относительно множества $\mathfrak{M}$), если для каждого $\varepsilon \in (0, r)$ найдется такое $\delta > 0$, что $V(t, x) \geqslant \delta$ для всех $(t, x) \in \mathfrak{M}^r \setminus \mathfrak{M}^\varepsilon$.

Поставим в соответствие системе $\dot{x} = f(t, x, u)$ дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(t, x), \tag{1.2}$$

где для каждой фиксированной точки $(t, x) \in [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$ множество $F(t, x)$ состоит из всех предельных значений функции $f(t_i, x_i, U(t_i, x_i))$ при $(t_i, x_i) \to (t, x)$. Будем предполагать, что множество $F(t, x)$ непустое, ограниченное, замкнутое и выпуклое. Поскольку функция $U(t, x)$ полунепрерывна сверху по $(t, x)$, то функция $F(t, x)$ также полунепрерывна сверху, поэтому для каждой начальной точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ локальное решение включения (1.2) существует (см. [8, с. 60]).

**Условие 1.** Для любого $x_0 \in M^r(t_0)$ каждое решение $\varphi(t, x_0)$ включения (1.2), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(t_0, x_0) = x_0$, определено при всех $t \geqslant t_0$.

**Определение 3** (см. [9, с. 17]). Для локально липшицевой функции $V(t, x)$ *обобщенной производной* в точке $(t, x) \in [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$ по направлению вектора $q = (1, p)$, $p \in \mathbb{R}^n$ (производной Ф. Кларка) называется следующий верхний предел:

$$V^o(t, x; p) \doteq \limsup_{(\varepsilon, y) \to (0+0, x)} \frac{V(t + \varepsilon, y + \varepsilon p) - V(t, y)}{\varepsilon},$$

а выражения $V^o_{\min}(t, x) \doteq \inf\limits_{p \in F(t,x)} V^o(t, x; p)$, $V^o_{\max}(t, x) \doteq \sup\limits_{p \in F(t,x)} V^o(t, x; p)$ называются соответственно *нижней и верхней производной* функции $V$ в силу дифференциального включения (1.2).

**Определение 4** (см. [4]). Множество $\mathfrak{M}$ называется *слабо положительно инвариантным* (относительно системы (1.1)), если для любой начальной точки $x_0 \in M(t_0)$ существует решение $x(t,x_0)$ системы (1.1), удовлетворяющее начальному условию $x(t_0,x_0)=x_0$ и включению $(t,x(t,x_0)) \in \mathfrak{M}$ при всех $t \geqslant t_0$.

**Определение 5** (см. [4]). Множество $\mathfrak{M}$ называется *слабо устойчивым по Ляпунову* (относительно системы (1.1)), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любой начальной точки $x_0 \in N^{\delta}(t_0)$ найдется решение $x(t,x_0)$ системы (1.1), которое удовлетворяет включению $(t,x(t,x_0)) \in \mathfrak{M}^{\varepsilon}$ при всех $t \geqslant t_0$.

**Лемма 1.** *Если существует функция Ляпунова $V(t,x)$ относительно множества $\mathfrak{M}$ такая, что для всех $(t,x) \in \mathfrak{N}^r$ выполнено неравенство $V^o_{\min}(t,x) \leqslant 0$ и найдется такое $\widehat{w} \in W$, что*

$$V(\tau_i, x+g(x,\widehat{w})) \leqslant V(\tau_i,x) \quad \text{для всех } x \in M^r(\tau_i), i=1,2,\ldots, \tag{1.3}$$

*то множество $\mathfrak{M}$ слабо положительно инвариантно относительно системы* (1.1).

*Если, кроме того, функция Ляпунова $V(t,x)$ определенно положительная, то множество $\mathfrak{M}$ слабо устойчиво по Ляпунову относительно системы* (1.1).

Доказательство. Для всех $(t,x) \in [t_0,+\infty) \times \mathbb{R}^n$ определим множества

$$\begin{aligned} \widehat{U}(t,x) &\doteq \{u \in U(t,x) : V^o(t,x;f(t,x,u)) \leqslant 0\}, \\ \widehat{W} &\doteq \{w \in W : V(\tau_i, x+g(x,w)) \leqslant V(\tau_i,x),\ i=1,2,\ldots\}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Из неравенств $V^o_{\min}(t,x) \leqslant 0$ и (1.3) следует, что данные множества непустые. Множество $\widehat{U}(t,x)$ ограничено для каждого $(t,x) \in [t_0,+\infty) \times \mathbb{R}^n$, поскольку $\widehat{U}(t,x) \subseteq U(t,x)$. Покажем, что это множество замкнуто. Действительно, если последовательность $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ такова, что $u_i \in \widehat{U}(t,x)$ и $u_i \to u$, то $f(t,x,u_i) \to f(t,x,u)$ и в силу липшицевости функции $f \to V^o(t,x;f)$ [9, с. 32] выполнено неравенство

$$V^o(t,x;f(t,x,u)) = \lim_{i\to\infty} V^o(t,x;f(t,x,u_i)) \leqslant 0.$$

Поставим в соответствие множеству $\widehat{U}(t,x)$ дифференциальное включение

$$\dot{x} \in \widehat{F}(t,x), \quad \widehat{F}(t,x) = \overline{\operatorname{co}}\, \widehat{H}(t,x), \tag{1.5}$$

где $\widehat{H}(t,x)$ состоит из всех предельных значений функции $f(t_i,x_i,\widehat{U}(t_i,x_i))$ при $(t_i,x_i) \to (t,x)$, $\overline{\operatorname{co}}\, \widehat{H}(t,x)$ — замыкание выпуклой оболочки множества $\widehat{H}(t,x)$, то есть наименьшее выпуклое замкнутое множество, содержащее $\widehat{H}(t,x)$. Функции $(t,x) \to \widehat{H}(t,x)$ и $(t,x) \to \widehat{F}(t,x)$ полунепрерывны сверху по лемме 10.1 работы [5]. Тогда в силу теоремы 2 работы [13, с. 213] существуют решения $\widehat{\varphi}_i(t,x_i)$ дифференциального включения (1.5), удовлетворяющие начальному условию $\widehat{\varphi}_i(\tau_i,x_i) = x_i$, $i=0,1,2,\ldots$.

Из определения множества $\widehat{U}(t,x)$ следует, что для всех $(t,x) \in [t_0,+\infty) \times \mathbb{R}^n$ имеет место включение $\widehat{U}(t,x) \subseteq U(t,x)$, поэтому $\widehat{F}(t,x) \subseteq F(t,x)$. Следовательно, решения $\widehat{\varphi}_i(t,x_i)$ дифференциального включения (1.5) также являются решениями исходного дифференциального включения (1.2), и каждое из них, в силу условия 1 о нелокальной продолжаемости всех решений вправо, определено при всех $t \geqslant t_0$. Определим решение $x(t,x_0)$ системы (1.1), удовлетворяющее начальному условию $x(t_0,x_0) = x_0 \in M(t_0)$, которое на $[t_0,\tau_1)$ совпадает с $\widehat{\varphi}_0(t,x_0)$ и на каждом из промежутков $[\tau_i,\tau_{i+1})$ совпадает с решением $\widehat{\varphi}_i(t,x_i)$, где

$$x_i = \widehat{\varphi}_{i-1}(\tau_i,x_{i-1}) + g\big(\widehat{\varphi}_{i-1}(\tau_i,x_{i-1}),w_i\big), \quad w_i \in \widehat{W}, \quad i=1,2,\ldots.$$

Для этого решения построим функцию $v(t) = V(t,x(t,x_0))$, тогда в силу леммы 9 работы [7] из $V^o_{\min}(t,x) \leqslant 0$ следует, что неравенство $\dot{v}(t) \leqslant 0$ выполнено при почти всех $t \geqslant t_0$, для которых $x(t,x_0) \in N^r(t)$. Следовательно (см. [12, с. 133]), функция $v(t)$ является невозрастающей в точках непрерывности промежутка $[t_0, +\infty)$, при которых $x(t, x_0) \in N^r(t)$ (точками разрыва $v(t)$ являются только точки $\tau_i$). Обозначим через $\operatorname{fr} M(t)$ границу множества $M(t)$. Предположим, что найдутся такие моменты времени $t_1, t_2$, что $t_0 \leqslant t_1 < t_2$ и $x(t_1, x_0) \in \operatorname{fr} M(t_1)$, $x(t, x_0) \in N^r(t)$ при $t \in (t_1, t_2]$, тогда

$$v(t_2) = V(t_2, x(t_2, x_0)) > 0.$$

Рассмотрим функцию $v(t)$ в точках $\tau_i \in (t_1, t_2]$: из того, что неравенство (1.3) верно для любых $x \in N^r(\tau_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, получаем

$$v(\tau_i) = V(\tau_i, x(\tau_i, x_0)) = V\big(\tau_i, x(\tau_i - 0, x_0) + g(x(\tau_i - 0, x_0), \widehat{w}_i)\big) \leqslant \\ \leqslant V\big(\tau_i, x(\tau_i - 0, x_0)\big) = v(\tau_i - 0).$$

Таким образом, функция $v(t) = V(t, x(t, x_0))$ является невозрастающей вдоль любого решения системы (1.1), лежащего в $\mathfrak{N}^r$, поэтому $v(t_2) \leqslant v(t_1) = 0$. Получили противоречие с неравенством $v(t_2) > 0$. Это доказывает, что решение $x(t, x_0)$ не покидает множество $\mathfrak{M}$ при $t \neq \tau_i$.

Теперь покажем, что если $x(\tau_i - 0, x_0) \in M(\tau_i)$, то $x(\tau_i, x_0) \in M(\tau_i)$, то есть после момента скачка решение не выйдет из множества $\mathfrak{M}$. Пусть $x(\tau_i - 0, x_0) \in M(\tau_i)$, тогда

$$V(\tau_i, x(\tau_i - 0, x_0)) = 0.$$

Из неравенства (1.3) следует, что

$$V(\tau_i, x(\tau_i, x_0)) = V\big(\tau_i, x(\tau_i - 0, x_0) + g(x(\tau_i - 0, x_0), \widehat{w}_i)\big) \leqslant V\big(\tau_i, x(\tau_i - 0, x_0)\big) = 0,$$

поэтому $V(\tau_i, x(\tau_i, x_0)) = 0$, что и означает, что $x(\tau_i, x_0) \in M(\tau_i)$. Таким образом, множество $\mathfrak{M}$ слабо положительно инвариантно.

Покажем, что множество $\mathfrak{M}$ слабо устойчиво по Ляпунову. Для этого построим решение $x(t, x_0)$ системы (1.1) так же, как в предыдущем абзаце, но с начальным условием

$$x(t_0, x_0) = x_0 \in N^\delta(t_0).$$

Выберем $\varepsilon \in (0, r)$ и обозначим

$$\alpha \doteq \alpha(\varepsilon) = \inf\{V(t, x) : (t, x) \in \operatorname{fr} \mathfrak{M}^\varepsilon\}.$$

Так как функция Ляпунова $V(t, x)$ определенно положительная, то $\alpha > 0$. По данному $\varepsilon$ построим такое $\delta \in (0, \varepsilon)$, что $V(t, x) < \alpha$ для всех $(t, x) \in \mathfrak{N}^\delta$ (так как функция $V$ непрерывна, такое $\delta$ существует). Предположим, что найдется $t^*$ такое, что $(t^*, x(t^*, x)) \in \operatorname{fr} \mathfrak{M}^\varepsilon$. Так как $v(t_0) = V(t_0, x) < \alpha$, получаем противоречие

$$\alpha \leqslant v(t^*) \leqslant v(t_0) < \alpha,$$

которое доказывает, что множество $\mathfrak{M}$ слабо устойчиво по Ляпунову. □

**Определение 6** (см. [4]). Множество $\mathfrak{M}$ называется *слабо асимптотически устойчивым* (относительно системы (1.1)), если оно слабо устойчиво по Ляпунову и существует такое $r > 0$, что для любой начальной точки $x_0 \in N^r(t_0)$ найдется такое решение $x(t, x_0)$ системы (1.1), что $\lim\limits_{t \to \infty} \varrho(x(t, x_0), M(t)) = 0$.

**Теорема 2.** *Предположим, что существует функция $V(t, x)$ — определенно положительная функция Ляпунова относительно множества $\mathfrak{M}$ такая, что для всех $(t, x) \in \mathfrak{N}^r$ выполнено неравенство $V^o_{\min}(t, x) \leqslant 0$ и найдется такое $\widehat{w} \in W$, что*

$$V(\tau_i, x + g(x, \widehat{w})) - V(\tau_i, x) \leqslant -\psi\big(V(\tau_i, x)\big) \quad \textit{для всех } x \in N^r(\tau_i),\ i = 1, 2, \ldots, \qquad (1.6)$$

*где $\psi(s)$ — непрерывная при $s \geqslant 0$ функция такая, что $\psi(0) = 0$ и $\psi(s) > 0$ при $s > 0$. Кроме того, предположим, что если $x \in M(\tau_i)$, то $x + g(x, \widehat{w}) \in M(\tau_i)$. Тогда множество $\mathfrak{M}$ слабо асимптотически устойчиво относительно системы* (1.1).

Доказательство. Пусть для всех $(t,x)\in[t_0,+\infty)\times\mathbb{R}^n$ множество $\widehat{U}(t,x)$ задано первым равенством (1.4). Определим множество

$$\overline{W}\doteq\big\{w\in W: V(\tau_i,x+g(x,w))-V(\tau_i,x)\leqslant-\psi\big(V(\tau_i,x)\big),\ i=1,2,\ldots\big\}.$$

Оно непусто в силу неравенства (1.6).

Согласно доказательству леммы 1, существуют решения $\widehat{\varphi}_i(t,x_i)$ дифференциального включения (1.2), удовлетворяющие начальному условию $\widehat{\varphi}_i(\tau_i,x_i)=x_i$, $i=0,1,2,\ldots$. Определим решение $x(t,x_0)$ системы (1.1) с начальным условием $x(t_0,x_0)=x_0\in M(t_0)$, которое на $[t_0,\tau_1)$ совпадает с $\widehat{\varphi}_0(t,x_0)$ и на каждом из промежутков $[\tau_i,\tau_{i+1})$ совпадает с решением $\widehat{\varphi}_i(t,x_i)$, где

$$x_i=\widehat{\varphi}_{i-1}(\tau_i,x_{i-1})+g\big(\widehat{\varphi}_{i-1}(\tau_i,x_{i-1}),w_i\big),\quad w_i\in\overline{W},\quad i=1,2,\ldots.$$

Если $x_0\in M(t_0)$, то из леммы 1 следует, что $x(t,x_0)\in M(t)$ при всех $t\in[t_0,+\infty)$, поэтому равенство $\lim\limits_{t\to\infty}\varrho(x(t,x_0),M(t))=0$ выполнено. Пусть теперь для начального условия $x_0$ имеет место включение $x_0\in N^r(t_0)=M^r(t_0)\setminus M(t_0)$. Рассмотрим функцию $v(t)=V(t,x(t,x_0))$ и докажем, что $\lim\limits_{t\to\infty}v(t)=0$.

Неравенство $V^o_{\min}(t,x)\leqslant 0$ гарантирует невозрастание функции $v(t)$ в промежутках ее непрерывности (или в промежутках непрерывности до момента, при котором точка $(t,x(t,x_0))$ принадлежит множеству $\mathfrak{M}$, если такой момент времени существует). Далее рассмотрим функцию $v(t)$ в точках $\tau_i$, для которых $v(\tau_i)>0$. Тогда из неравенства (1.6) следует, что существует такое $\widehat{w}\in W$, для которого

$$\begin{gathered}v(\tau_i)=V\big(\tau_i,x(\tau_i,x_0)\big)=V\big(\tau_i,x(\tau_i-0,x_0)+g(x(\tau_i-0,x_0),\widehat{w})\big)\leqslant\\ \leqslant V\big(\tau_i,x(\tau_i-0,x_0)\big)-\psi\big(V(\tau_i,x(\tau_i-0,x_0))\big)\leqslant v(\tau_i-0).\end{gathered}$$

Следовательно, функция $v(t)$ является невозрастающей для любого $t\in[t_0,+\infty)$ (или до момента, при котором точка $(t,x(t,x_0))$ принадлежит множеству $\mathfrak{M}$). Отметим, что, начиная с момента, при котором точка $(t,x(t,x_0))$ принадлежит $\mathfrak{M}$, выполнено равенство $v(t)=0$, поэтому в случае существования такого момента $\lim\limits_{t\to\infty}v(t)=0$.

Пусть точка $(t,x(t,x_0))$ не принадлежит множеству $\mathfrak{M}$ для всех $t\in[t_0,+\infty)$. Тогда для всех $t\in[t_0,+\infty)$ функция $v(t)$ является невозрастающей и удовлетворяет неравенству $v(t)>0$. Таким образом, существует $\lim\limits_{t\to\infty}v(t)=a\geqslant 0$. Предположим, что $a>0$. Пусть $c=\min\limits_{a\leqslant s\leqslant v(0)}\psi(s)$. В силу (1.6) имеем

$$\begin{gathered}v(\tau_i)-v(\tau_i-0)=V\big(\tau_i,x(\tau_i,x_0)\big)-V\big(\tau_i-0,x(\tau_i-0,x_0)\big)=\\ =V\big(\tau_i,x(\tau_i-0,x_0)+g(x(\tau_i-0,x_0),\widehat{w})\big)-V\big(\tau_i-0,x(\tau_i-0,x_0)\big)\leqslant\\ \leqslant-\psi\big(V(\tau_i,x(\tau_i-0,x_0))\big)\leqslant-\psi(v(\tau_i-0))\end{gathered}$$

при всех $i=1,2,\ldots$. Поскольку $a\leqslant v(\tau_i)\leqslant v(0)$, то $-\psi(v(\tau_i-0))\leqslant -c$, следовательно,

$$v(\tau_i)-v(\tau_i-0)\leqslant-c.$$

Из невозрастания функции $v(t)$ следует, что $v(\tau_i)\geqslant v(\tau_{i+1}-0)$ для всех $i=1,2,\ldots$. Отсюда для любого натурального $k$ получаем

$$v(\tau_k)\leqslant v(\tau_k)+\sum_{i=0}^{k-1}(v(\tau_i)-v(\tau_{i+1}-0))=v(0)+\sum_{i=1}^{k}(v(\tau_i)-v(\tau_i-0))\leqslant v(0)-kc.$$

Правая часть последнего неравенства при больших значениях $k$ становится отрицательной, что противоречит тому, что $\lim\limits_{t\to\infty}v(t)=a>0$. Таким образом, $\lim\limits_{t\to\infty}v(t)=0$.

Покажем, что $\lim\limits_{t\to\infty}\varrho(x(t,x_0),M(t))=0$. Предположим противное, тогда существуют константа $\varepsilon\in(0,r)$ и последовательность $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ такие, что $t_i\to\infty$ и $\varrho(x(t_i,x_0),M(t_i))>\varepsilon$. Следовательно, $(t_i,x(t_i,x_0))\notin\mathfrak{M}^{\varepsilon}$, и, так как функция $V$ определенно положительная, найдется такое $\delta>0$, что $V(t_i,x(t_i,x_0))\geqslant\delta$. Это противоречит тому, что $\lim\limits_{t\to\infty}V(t,x(t,x_0))=\lim\limits_{t\to\infty}v(t)=0$. $\square$

## § 2. Теорема сравнения для решений систем и уравнений с импульсами

В этом параграфе получены аналоги теоремы Ла-Салля (см. [14, с. 276]) для управляемых систем с импульсным воздействием (1.1). Отметим, что для систем без импульсов $\dot{x} = f(t, x, u)$ подобные утверждения доказаны в работах [3, 5].

Рассмотрим дифференциальное уравнение с импульсным воздействием

$$\dot{z} = q(t, z), \quad t \neq \tau_i, \quad \Delta z|_{t=\tau_i} = l(z), \quad (t, z) \in [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

где функция $q(t, z)$ локально липшицева по $z$, а функция $l(z)$ непрерывна. Введем в рассмотрение функцию $L(z) = l(z) + z$ в предположении, что $L(z)$ неубывающая для всех $z \in \mathbb{R}$.

**Теорема 3.** *Пусть существуют функции $V(t, x)$, $q(t, z)$, $l(z)$ такие, что $V(t, x)$ является определенно положительной функцией Ляпунова относительно множества $\mathfrak{M}$, для всех $(t, x) \in \mathfrak{N}^r$ выполнено неравенство $V^o_{\min}(t, x) \leqslant q(t, V(t, x))$ и найдется такое $\widehat{w} \in W$, что*

$$V(\tau_i, x + g(x, \widehat{w})) \leqslant L\left(V(\tau_i, x)\right) \ \text{для всех} \ x \in M^r(\tau_i), i = 1, 2, \ldots. \tag{2.2}$$

*Тогда, если для решения $z(t)$ уравнения (2.1) с начальным условием $z(t_0) = \max\limits_{x_0 \in N^r(t_0)} V(t_0, x_0)$ выполнено равенство $\lim\limits_{t \to \infty} z(t) = 0$, то множество $\mathfrak{M}$ слабо асимптотически устойчиво относительно системы (1.1).*

Доказательство. Для всех $(t, x) \in \mathfrak{N}^r$ определим множества

$$\widetilde{U}(t, x) \doteq \left\{u \in U(t, x) : V^o(t, x; f(t, x, u)) \leqslant q(t, V(t, x))\right\},$$
$$\widetilde{W} \doteq \left\{w \in W : V(\tau_i, x + g(x, w)) \leqslant L\left(V(\tau_i, x)\right), \ i = 1, 2, \ldots\right\}.$$

Из неравенств $V^o_{\min}(t, x) \leqslant q(t, V(t, x))$ и (2.2) следует, что эти множества непустые. Множество $\widetilde{U}(t, x)$ ограничено, поскольку $\widetilde{U}(t, x) \subseteq U(t, x)$. Так же, как в лемме 1, доказывается, что множество $\widetilde{U}(t, x)$ замкнуто.

Поставим в соответствие множеству $\widetilde{U}(t, x)$ дифференциальное включение

$$\dot{x} \in \widetilde{F}(t, x), \quad \widetilde{F}(t, x) = \overline{\text{co}}\, \widetilde{H}(t, x), \tag{2.3}$$

где $\widetilde{H}(t, x)$ состоит из всех предельных значений функции $f(t_i, x_i, \widetilde{U}(t_i, x_i))$ при $(t_i, x_i) \to (t, x)$, функция $(t, x) \to \widetilde{F}(t, x)$ полунепрерывна сверху (см. лемму 10.1 работы [5]). Обозначим через $\widetilde{\varphi}_i(t, x_i)$ решения включения (2.3), удовлетворяющие начальным условиям $\widetilde{\varphi}_i(\tau_i, x_i) = x_i$, $i = 0, 1, 2, \ldots$.

Поскольку $\widetilde{U}(t, x) \subseteq U(t, x)$ для всех $(t, x) \in [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$, то $\widetilde{F}(t, x) \subseteq F(t, x)$. Следовательно, решения $\widetilde{\varphi}_i(t, x_i)$ дифференциального включения (2.3) также являются и решениями исходного включения (1.2). Определим решение $x(t, x_0)$ системы (1.1), удовлетворяющее начальному условию $x(t_0, x_0) = x_0 \in N^r(t_0)$, которое на промежутке $[t_0, \tau_1)$ совпадает с $\widetilde{\varphi}_0(t, x_0)$ и на каждом промежутке $[\tau_i, \tau_{i+1})$ совпадает с решением $\widetilde{\varphi}_i(t, x_i)$, где

$$x_i = \widetilde{\varphi}_{i-1}(\tau_i, x_{i-1}) + g\big(\widetilde{\varphi}_{i-1}(\tau_i, x_{i-1}), w_i\big), \quad w_i \in \widetilde{W}, \quad i = 1, 2, \ldots.$$

Для этого решения построим функцию $v(t) = V(t, x(t, x_0))$, в точках дифференцируемости которой выполнено неравенство $\dot{v}(t) \leqslant V^o_{\max}\left(t, x(t, x_0)\right)$. Из этого неравенства и (2.2) следует, что неравенство $\dot{v}(t) \leqslant q(t, v(t))$ выполнено в промежутках непрерывности функции $v(t)$ (или в промежутках непрерывности до момента времени, при котором решение принадлежит множеству $\mathfrak{M}$, если такой момент существует). Если этот момент существует, то $\lim\limits_{t \to \infty} v(t) = 0$, так как $v(t) = 0$ при тех $t$, при которых решение принадлежит данному множеству. Далее рассмотрим случай, когда решение $x(t,x_0)$ системы (1.1) не принадлежит множеству $\mathfrak{M}$ для всех $t \geqslant t_0$. Поскольку $x_0 \in N^r(t_0)$, то

$$v(t_0) = V(t, x(t_0,x_0)) = V(t_0,x_0) \leqslant \max_{x_0 \in N^r(t_0)} V(t_0,x_0) = z(t_0),$$

поэтому, в силу теоремы Чаплыгина (см. [15, с. 15]), неравенство $v(t) \leqslant z(t)$ верно при всех $t \in [t_0,\tau_1)$. Из второго неравенства (2.2) получаем

$$v(\tau_1) = V(\tau_1, x(\tau_1,x)) = V(\tau_1, x(\tau_1 - 0, x) + g(x(\tau_1 - 0,x), w_1)) \leqslant \\ \leqslant L\left(V(\tau_1, x(\tau_1 - 0, x))\right) = L\left(v(\tau_1 - 0)\right).$$

Тогда $v(\tau_1) \leqslant L\left(v(\tau_1 - 0)\right) \leqslant L(z(\tau_1 - 0))$, так как функция $L(z)$ является неубывающей. Из равенства $z(\tau_1) = L(z(\tau_1 - 0))$ следует, что $v(\tau_1) \leqslant z(\tau_1)$. Рассуждая подобным образом, т. е. применяя далее теорему Чаплыгина на каждом промежутке $[\tau_i,\tau_{i+1})$, $i = 1,2,\ldots$, получаем, что неравенство $v(t) \leqslant z(t)$ верно для всех $t \in [t_0,+\infty)$. Поскольку функция $V(t,x)$ является функцией Ляпунова, то

$$0 \leqslant v(t) \leqslant z(t). \tag{2.4}$$

Из условия $\lim\limits_{t\to\infty} z(t) = 0$ и неравенства (2.4) следует, что $\lim\limits_{t\to\infty} v(t) = \lim\limits_{t\to\infty} V(t,x(t,x_0)) = 0$. Так же как в доказательстве теоремы 2, из положительной определенности функции $V(t,x)$ и равенства $\lim\limits_{t\to\infty} v(t) = 0$ следует, что $\lim\limits_{t\to\infty} \varrho(x(t_0,x), M(t)) = 0$. □

Положим теперь $\mathfrak{M} = \big\{(t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n : x \in M(t) = 0\big\}$. Тогда для этого множества справедливо утверждение о слабой асимптотической устойчивости, которое является следствием теоремы 3.

**Следствие 1.** *Пусть существуют функции $V(t,x)$, $q(t,z)$, $l(z)$ такие, что $V(t,x)$ является определенно положительной функцией Ляпунова относительно множества $\mathfrak{M}$ и для всех $(t,x) \in \mathfrak{N}^r = \{(t,x) \in [t_0,+\infty)\times\mathbb{R}^n : \|x\| \leqslant r\}$ выполнены неравенства* (2.2)*. Тогда если для решения $z(t)$ уравнения* (2.1) *с начальным условием $z(t_0) = \max\limits_{\|x_0\|\leqslant r} V(t_0,x_0)$ выполнено равенство $\lim\limits_{t\to\infty} z(t) = 0$, то для любого $\|x_0\| \leqslant r$ существует решение $x(t,x_0)$ системы* (1.1)*, для которого справедливо равенство $\lim\limits_{t\to\infty} x(t,x_0) = 0$.*

## § 3. Асимптотическое поведение решений в модели конкуренции двух видов с импульсным управлением

Рассмотрим модель конкуренции двух видов, численности которых равны $x_1, x_2$. Каждый из видов размножается в соответствии с логистическим законом, а при встрече численность как одного, так и другого вида уменьшается. В моменты времени $\tau_i$ на систему оказывается внешнее воздействие, в результате которого численности обоих видов сокращаются. Предполагаем, что данная модель задана следующей системой с импульсным управлением:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_1 - x_1^2 - a x_1 x_2, \quad t \neq \tau_i, \quad \Delta x_1|_{t=\tau_i} = w_1 x_1, \\ \dot{x_2} = x_2 - x_2^2 - b x_1 x_2, \quad t \neq \tau_i, \quad \Delta x_2|_{t=\tau_i} = w_2 x_2. \end{cases} \tag{3.1}$$

Здесь $\tau_i = ih$, $i = 1,2,\ldots$, $h > 0$; $a > 0$, $b > 0$ — константы взаимодействия видов, $w_1$, $w_2$ — коэффициенты управления, $w = (w_1,w_2) \in W \doteq [w_{11},w_{12}]\times[w_{21},w_{22}]$, $-1 < w_{12} < 0$, $-1 < w_{22} < 0$. Оба вида могут сосуществовать, если произведение коэффициентов межпопуляционного взаимодействия $ab < 1$ (см. [16, с. 147]).

**Лемма 2.** *При заданных условиях решения системы* (3.1) *неотрицательны.*

Доказательство. Пусть $f_1(t,x_1,x_2) \doteq x_1 - x_1^2 - a x_1 x_2$, $f_2(t,x_1,x_2) \doteq x_2 - x_2^2 - b x_1 x_2$, $x(t,x_0)$ — решение системы (3.1), удовлетворяющее начальному условию $x(t_0,x_0) = x_0 \geqslant 0$. Так как $f_1(t,0,x_2) = 0$, $f_2(t,x_1,0) = 0$ и

$$x_1 + w_1 x_1 = (1+w_1)x_1 \geqslant 0, \quad x_2 + w_2 x_2 = (1+w_2)x_2 \geqslant 0$$

для всех $t \geqslant 0$, $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$, следовательно, условия квазиположительности (см. [17, с. 34]) выполняются. Тогда решения заданной системы неотрицательны. $\square$

Обозначим $\mathbb{R}^2_+ = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0\}$. Пусть $M$ — треугольник, заданный следующим образом:

$$M = \big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ : x_1 + x_2 \leqslant C\big\},$$

где $C > 0$. Рассмотрим множество $\mathfrak{M} = \{(t, x) \in \mathbb{R}^3 : x \in M\}$ и функцию

$$V(t, x_1, x_2) = V(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, \ \text{ если } \ (x_1, x_2) \in M, \\ x_1 + x_2 - C, \ \text{если } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \setminus M, \end{cases}$$

которая является функцией Ляпунова относительно данного множества. Найдем ее производную в силу системы (3.1) при $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \setminus M$:

$$V^o(x_1, x_2) = x_1 - x_1^2 - a x_1 x_2 + x_2 - x_2^2 - b x_1 x_2.$$

Найдем максимум функции $V^o(x_1, x_2)$ в области $\mathbb{R}^2_+ \setminus M$. Если

$$(x_1^o, x_2^o) = \left(\frac{1}{a+b+2}, \frac{1}{a+b+2}\right) \in \mathbb{R}^2_+ \setminus M,$$

то максимальное значение $V^o(x_1, x_2)$ в $\mathbb{R}^2_+ \setminus M$ равно $\dfrac{1}{a+b+2} > 0$, то есть неравенство $V^o(x_1, x_2) \leqslant 0$ не может выполняться для всех точек из $\mathbb{R}^2_+ \setminus M$. Отметим, что $(x_1^o, x_2^o) \in \mathbb{R}^2_+ \setminus M$ при $C < \dfrac{2}{a+b+2}$.

Несложно показать, что если $(x_1^o, x_2^o) \in M$, то максимальное значение $V^o(x_1, x_2)$ достигается на отрезке $x_1 + x_2 = C$, $x_1 \in [0, C]$. Вычисляя

$$V^o(x_1, C - x_1) = (a + b - 2)x_1^2 - C(a + b + 2)x_1 + C + C^2,$$

находим, что условный максимум функции $V^o(x_1, x_2)$ достигается в точке $(x_1^*, x_2^*) = \left(\dfrac{C}{2}, \dfrac{C}{2}\right)$ и его значение равно $V^o(x_1^*, x_2^*) = C - \dfrac{(a+b+2)C^2}{4}$. Найдем условие, при котором $V^o(x_1^*, x_2^*) \leqslant 0$, то есть

$$C - \frac{(a+b+2)C^2}{4} \leqslant 0.$$

Решая это неравенство, получим следующее ограничение:

$$C \geqslant \frac{4}{a+b+2}.$$

При этом вторая производная функции $V^o(x_1, C - x_1)$ должна быть отрицательной, отсюда получим условие на коэффициенты системы (3.1): $a + b < 2$.

Если $x \in M$, то $x + g(x, w) = x_1 + w_1 x_1 + x_2 + w_2 x_2 = (1 + w_1)x_1 + (1 + w_2)x_2 \leqslant x_1 + x_2 \leqslant C$. Таким образом, решение остается в $M$.

Далее, согласно теореме 2, рассмотрим разность $V(x + g(x, w)) - V(x)$ при $x \in \mathbb{R}^2_+ \setminus M$. Здесь возможны два случая:

1) Точка $x + g(x, w) \in \mathbb{R}^2_+ \setminus M$, тогда

$$\begin{aligned} V(x + g(x, w)) - V(x) &= V(x_1 + w_1 x_1, x_2 + w_2 x_2) - V(x_1, x_2) = \\ &= x_1 + w_1 x_1 + x_2 + w_2 x_2 - x_1 - x_2 = w_1 x_1 + w_2 x_2 \leqslant \alpha(x_1 + x_2) \leqslant \\ &\leqslant \alpha(x_1 + x_2 - C) = \alpha V(x_1, x_2), \end{aligned}$$

где $\alpha = \max\{w_1, w_2\}$. Следовательно, функция $\psi(s)$ из теоремы 2 равна $\psi(s) = -\alpha s$. Эта функция непрерывна при $s \geqslant 0$, $\psi(0) = 0$ и $\psi(s) > 0$ при $s > 0$, так как $\alpha < 0$.

2) Точка $x + g(x, w) \in M$, тогда

$$V(x + g(x, w)) - V(x) = 0 - V(x_1, x_2) = -V(x).$$

Следовательно, функция $\psi(s)$ из теоремы 2 равна $\psi(s) = s$. Эта функция также удовлетворяет всем условиям теоремы 2.

Таким образом, если исходная система (3.1) удовлетворяет условию $a + b < 2$ и множество $M = \big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ : x_1 + x_2 \leqslant C\big\}$ такое, что $C \geqslant \dfrac{4}{a+b+2}$, то применима теорема 2, из которой следует, что заданное множество $\mathfrak{M}$ слабо асимптотически устойчиво относительно системы (3.1).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ларина Я.Ю. Функции Ляпунова и теоремы сравнения для управляемых систем с импульсным воздействием // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2015. Вып. 1. С. 51–59.
2. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. Киев: Вища школа, 1987. 287 с.
3. Панасенко Е.А., Тонков Е.Л. Инвариантные и устойчиво инвариантные множества дифференциальных включений // Труды Математического института им. В.А. Стеклова. 2008. Т. 262. С. 202–221.
4. Панасенко Е.А., Тонков Е.Л. Распространение теорем Е.А. Барбашина и Н.Н. Красовского об устойчивости на управляемые динамические системы // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15. № 3. С. 185–201.
5. Родина Л.И. Инвариантные и статистически слабо инвариантные множества управляемых систем // Известия Института математики и информатики УдГУ. 2012. Вып. 2 (40). С. 3–164.
6. Родина Л.И. Оценка статистических характеристик множества достижимости управляемых систем // Известия высших учебных заведений. Математика. 2013. № 11. С. 20–32.
7. Родина Л.И., Тонков Е.Л. Статистические характеристики множества достижимости управляемой системы, неблуждаемость и минимальный центр притяжения // Нелинейная динамика. 2009. Т. 5. № 2. С. 265–288.
8. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 223 с.
9. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. 300 с.
10. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.: Гостехтеориздат, 1949. 550 с.
11. Федерер Г. Геометрическая теория меры. М.: Наука, 1987. 761 с.
12. Филиппов В.В. Пространства решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: МГУ, 1993. 336 с.
13. Благодатских В.И., Филиппов А.Ф. Дифференциальные включения и оптимальное управление // Труды Математического института им. В.А. Стеклова. 1985. Т. 169. С. 194–252.
14. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
15. Чаплыгин С.А. Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. М.–Л.: Гостехиздат, 1950. 102 с.
16. Ризниченко Г.Ю. Лекции по математическим моделям в биологии. Часть 1. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. 236 с.
17. Кузенков О.А., Рябова Е.А. Математичское моделирование процессов отбора. Нижний Новгород: Издательство Нижегородского университета, 2007. 324 с.

Поступила в редакцию 17.01.2016

Ларина Яна Юрьевна, ассистент, кафедра математического анализа, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: yana_larina89@mail.ru

***Ya. Yu. Larina***
**Weak asymptotic stability of control systems with impulsive actions**

*Keywords*: control systems with impulsive actions, Lyapunov function, weak asymptotic stability.

MSC: 34A60, 37N35, 49J15, 93B03

We continue investigating the conditions of positive invariance and asymptotic stability of a given set relative to a control system with impulsive actions. We consider the set $\mathfrak{M} \doteq \{(t,x) \in [t_0,+\infty) \times \mathbb{R}^n : x \in M(t)\}$, given by a function $t \to M(t)$ that is continuous in the Hausdorff metric, where the set $M(t)$ is nonempty and compact for each $t \in \mathbb{R}$. In terms of the Lyapunov functions and the Clarke derivative, we obtain conditions for weak positive invariance, weak uniform Lyapunov stability and weak asymptotic stability of the set $\mathfrak{M}$. Also we prove a comparison theorem for solutions of systems and equations with impulses the consequence of which is the conditions for existence of solutions of the system that asymptotically tends to zero. The obtained results are illustrated by the example of model for competition of two species exposed to impulse control at given times.

REFERENCES

1. Larina Ya.Yu. Lyapunov functions and comparison theorems for control systems with impulsive actions, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2015, vol. 25, no. 1, pp. 51–59 (in Russian).
2. Samoilenko A.M., Perestyuk N.A. *Differentsial'nye uravneniya s impul'snym vozdeistviem* (Impulsive differential equations), Kiev: Vishcha shkola, 1987, 287 p.
3. Panasenko E.A., Tonkov E.L. Invariant and stably invariant sets for differential inclusions, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2008, vol. 262, pp. 194–212.
4. Panasenko E.A., Tonkov E.L. Extension of E.A. Barbashin's and N.N. Krasovskii's stability theorems to controlled dynamical systems, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2010, vol. 268, suppl. 1, pp. 204–221.
5. Rodina L.I. Invariant and statistically weakly invariant sets of control systems, *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, 2012, no. 2 (40), pp. 3–164 (in Russian).
6. Rodina L.I. Estimation of statistical characteristics of attainability sets of controllable systems, *Russian Mathematics*, 2013, vol. 57, no. 11, pp. 17–27.
7. Rodina L.I., Tonkov E.L. Statistical characteristics of attainable set of controllable system, non-wandering, and minimal attraction center, *Nelin. Dinam.*, 2009, vol. 5, no. 2, pp. 265–288 (in Russian).
8. Filippov A.F. *Differentsial'nye uravneniya s razryvnoi pravoi chast'yu* (Differential equations with discontinuous right-hand side), Moscow: Nauka, 1985, 223 p.
9. Clarke F. *Optimization and nonsmooth analysis*, Wiley, 1983. Translated under the title *Optimizatsiya i negladkii analiz*, Moscow: Nauka, 1988, 300 p.
10. Nemytskii V.V., Stepanov V.V. *Qualitative theory of differential equations*, New Jersey: Princeton University Press, 1960, 523 p.
11. Federer H. *Geometricheskaya teoriya mery* (Geometric theory of measure), Moscow: Nauka, 1987, 761 p.
12. Filippov V.V. *Prostranstva reshenii obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii* (Spaces of solutions of ordinary differential equations), Moscow: Moscow State University, 1993, 336 p.
13. Blagodatskikh V.I., Filippov A.F. Differential inclusions and optimal control, *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1986, vol. 169, pp. 199–259.
14. Demidovich B.P. *Lektsii po matematicheskoi teorii ustoichivosti* (Lectures on the mathematical stability theory), Moscow: Nauka, 1967, 472 p.
15. Chaplygin S.A. *Novyi metod priblizhennogo integrirovaniya differentsial'nykh uravnenii* (A new method of approximate integration of differential equations), Moscow–Leningrad: Gostekhizdat, 1950, 102 p.
16. Riznichenko G.Yu. *Lektsii po matematicheskim modelyam v biologii. Chast' 1* (Lectures on the mathematical models in biology. Part 1), Izhevsk: Regular and Chaotic Dynamics, 2002, 236 p.
17. Kuzenkov O.A., Ryabova E.A. *Matematicheskoe modelirovanie protsessov otbora* (Mathematical modeling of processes of selection), Nizhnii Novgorod: Nizhnii Novgorod State University, 2007, 324 p.

Received 17.01.2016

Larina Yana Yur'evna, Assistant Lecturer, Department of Mathematical Analysis, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: yana_larina89@mail.ru