МАТЕМАТИКА 2016. Т. 26. Вып. 1

УДК 517.977.8, 519.837.4

© ***А. И. Благодатских***

МНОГОКРАТНАЯ ПОИМКА ЖЕСТКО СКООРДИНИРОВАННЫХ УБЕГАЮЩИХ

Рассматривается задача преследования группы жестко скоординированных убегающих в нестационарном конфликтно управляемом процессе с равными возможностями:

$$\begin{array}{llllll} P_i & : & \dot{x}_i = A(t)x_i + u_i, & u_i \in U(t), & x_i(t_0) = X_i^0, & i = 1, 2, \ldots, n, \\ E_j & : & \dot{y}_j = A(t)y_j + v, & v \in U(t), & y_j(t_0) = Y_j^0, & j = 1, 2, \ldots, m. \end{array}$$

Говорят, что в задаче преследования происходит многократная поимка, если заданное количество преследователей ловят убегающих, при этом моменты поимки могут не совпадать:

$$x_\alpha(\tau_\alpha) = y_{j_\alpha}(\tau_\alpha), \quad \alpha \in \Lambda, \quad \Lambda \subset \{1, 2, \ldots, n\}, \quad |\Lambda| = b \quad (n \geqslant b \geqslant 1), \quad j_\alpha \subset \{1, 2, \ldots, m\}.$$

В задаче о нестрогой одновременной многократной поимке требуется, чтобы моменты поимки совпадали:

$$x_\alpha(\tau) = y_{j_\alpha}(\tau), \quad \alpha \in \Lambda.$$

Одновременная многократная поимка происходит, если совпадают наименьшие моменты поимки:

$$x_\alpha(\tau) = y_{j_\alpha}(\tau), \quad x_\alpha(s) \neq y_{j_\alpha}(s), \quad s \in [t_0, \tau), \quad \alpha \in \Lambda.$$

В данной работе получены необходимые и достаточные условия многократной и нестрогой одновременной многократной поимок.

Ключевые слова: поимка, многократная поимка, одновременная многократная поимка, преследование, убегание, дифференциальные игры, конфликтно управляемые процессы.

DOI: 10.20537/vm160104

Введение

Дифференциальные игры двух лиц, рассмотренные первоначально Р. Айзексом [1], в настоящее время представляют собой содержательную математическую теорию [2–5] (метод Л. С. Понтрягина, метод экстремального прицеливания Н. Н. Красовского и другие).

Естественным обобщением дифференциальных игр двух лиц являются задачи преследования–убегания с участием группы управляемых объектов хотя бы с одной из противоборствующих сторон, при этом наибольшую трудность для исследований представляют задачи конфликтного взаимодействия между двумя группами управляемых объектов. Специфика этих задач (например, невыпуклость и несвязность объединения множеств достижимости преследователей или целевых множеств убегающих) требует создания новых методов их исследования, отличных от методов, разработанных для игр двух лиц.

Задача простого группового преследования с равными возможностями рассматривалась Л. А. Петросяном, им были получены [6] достаточные условия поимки, Б. Н. Пшеничный получил [7] необходимые и достаточные условия поимки. Н. Л. Григоренко ввел понятие многократной поимки, для задачи с простыми движениями и равными возможностями им представлены [8] необходимые и достаточные условия многократной поимки. А. А Чикрием и Н. Н. Петровым были получены [9, 10] достаточные условия многократной поимки в конфликтно управляемых процессах и в примере Л. С. Понтрягина с равными возможностями. В работах [11–13] введены понятия нестрогой одновременной и одновременной многократных поимок, для перечисленных выше задач приведены достаточные, а в некоторых случаях и необходимые условия разрешимости. Многократная поимка происходит, если заданное количество преследователей ловят убегающего, при этом моменты поимки могут не совпадать. Если моменты поимки (не обязательно наименьшие) совпадают, то говорят, что происходит нестрогая одновременная многократная поимка убегающего. Наконец, если совпадают наименьшие моменты поимки, то происходит одновременная многократная поимка убегающего.

В предлагаемой работе введены понятия многократной, нестрогой одновременной и одновременной многократных поимок группы убегающих. Получены достаточные, а в некоторых случаях и необходимые, условия многократной и нестрогой одновременной многократной поимок убегающих, использующих одинаковое (жестко скоординированное) управление, в нестационарном конфликтно управляемом процессе с равными динамическими и инерционными возможностями всех игроков. Управления преследователей, гарантирующие указанные виды поимок не позднее некоторого конечного момента времени, построены в явном виде. Рассмотрен ряд модельных примеров.

§ 1. Постановка задачи

В пространстве $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра Γ $n+m$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и m убегающих $E_1, E_2, \ldots, E_m$ с законами движения и начальными условиями (при $t = t_0$)

$$\begin{array}{lll} P_i & : & \dot{x}_i = A(t)x_i + u_i, \quad u_i \in U(t), \quad x_i(t_0) = X_i^0, \quad i \in I(n), \\ E_j & : & \dot{y}_j = A(t)y_j + v, \quad v \in U(t), \quad y_j(t_0) = Y_j^0, \quad j \in I(m), \end{array} \tag{1.1}$$

где $x_i, y_j \in \mathbb{R}^k$, $A(t)$ — непрерывная на $[t_0, \infty)$ квадратная матрица порядка k, $U(t)$ — многозначное отображение, непрерывное в метрике Хаусдорфа на $[t_0, \infty)$, являющееся при каждом $t \in [t_0, \infty)$ строго выпуклым компактом в $\mathbb{R}^k$ с гладкой границей, множество $I(q) = \{1, 2, \ldots, q\}$ для всех $q \geqslant 1$, $S(a, b)$ — шар в $\mathbb{R}^k$ с центром в точке a радиуса b.

Управления из класса измеримых по Лебегу функций на $[t_0, \infty)$ со значениями из множества $U(t)$ будем называть допустимыми.

Пусть σ — некоторое разбиение — $t_0 = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_q < \ldots$ — интервала $[t_0, \infty)$, не имеющее конечных точек сгущения (либо точек в разбиении конечное число, либо $\lim\limits_{q \to \infty} \theta_q = \infty$).

Определение 1. *Кусочно-программной стратегией убегающих E_j, $j \in I(m)$, соответствующей разбиению σ, будем называть семейство отображений, ставящих в соответствие моменту θ_q и позициям $x_i(\theta_q)$, $y_j(\theta_q)$ допустимое управление $v(t)$, определенное для $t \in [\theta_q, \theta_{q+1})$, то есть*

$$v(t) = v\big(t,\ \theta_q,\ x_i(\theta_q),\ y_j(\theta_q)\big), \quad t \in [\theta_q, \theta_{q+1}), \quad q = 0, 1, 2, \ldots$$

Здесь и далее, если θ_{q+1} не определен (θ_q — последняя точка разбиения σ), то считаем $\theta_{q+1} = \infty$.

Отметим, что действия убегающих можно трактовать следующим образом: имеется центр, который для всех убегающих E_j, $j \in I(m)$, выбирает одно и то же управление $v(t)$.

Определение 2. *Кусочно-программной контрстратегией преследователей P_i, $i \in I(n)$, соответствующей разбиению σ, будем называть семейство отображений, ставящих в соответствие моменту θ_q, позициям $x_i(\theta_q)$, $y_j(\theta_q)$ и допустимому управлению $v(s)$, $s \in [\theta_q, \theta_{q+1})$, убегающих E_j, $j \in I(m)$, допустимые управления $u_i(t)$, определенные для $t \in [\theta_q, \theta_{q+1})$, то есть*

$$u_i(t) = u_i\big(t,\ \theta_q,\ x_i(\theta_q),\ y_j(\theta_q),\ v(s),\ s \in [\theta_q, \theta_{q+1})\big), \quad t \in [\theta_q, \theta_{q+1}), \quad q = 0, 1, 2, \ldots$$

Для каждого $q = 1, 2, \ldots, n$ определим множество

$$\Omega(q) = \big\{\{i_1, i_2, \ldots, i_q\} : i_1 < i_2 < \cdots < i_q,\ i_1, i_2, \ldots, i_q \in I(n)\big\}.$$

Определение 3. В игре Γ возможна *b-кратная поимка* ($n \geqslant b \geqslant 1$), если существует конечный момент $T_0 = T_0(X_i^0, Y_j^0)$ такой, что для любых разбиения σ и кусочно-программной стратегии убегающих E_j, $j \in I(m)$, существуют такие кусочно-программные контрстратегии преследователей P_i, $i \in I(n)$, что найдутся множество $\Lambda \in \Omega(b)$, номера $j_\alpha \in I(m)$ и моменты $\tau_\alpha \in [t_0, T_0]$, $\alpha \in \Lambda$, для которых

$$x_\alpha(\tau_\alpha) = y_{j_\alpha}(\tau_\alpha) \text{ при всех } \alpha \in \Lambda.$$

Отметим, что каждый из преследователей P_i, $i \in I(n)$, может осуществить поимку не более одного раза, при этом любой из убегающих E_j, $j \in I(m)$, может либо уклониться от встречи, либо его могут поймать, в том числе и несколько раз.

Определение 4. В игре Γ возможна *нестрогая одновременная b-кратная поимка*, если существует конечный момент $T_0 = T_0(X_i^0, Y_j^0)$ такой, что для любых разбиения σ и кусочно-программной стратегии убегающих E_j, $j \in I(m)$, существуют такие кусочно-программные контрстратегии преследователей P_i, $i \in I(n)$, что найдутся множество $\Lambda \in \Omega(b)$, номера $j_\alpha \in I(m)$ и момент $\tau \in [t_0, T_0]$, $\alpha \in \Lambda$, для которых

$$x_\alpha(\tau) = y_{j_\alpha}(\tau) \text{ при всех } \alpha \in \Lambda.$$

Определение 5. В игре Γ возможна *одновременная b-кратная поимка*, если существует конечный момент $T_0 = T_0(X_i^0, Y_j^0)$ такой, что для любых разбиения σ и кусочно-программной стратегии убегающих E_j, $j \in I(m)$, существуют такие кусочно-программные контрстратегии преследователей P_i, $i \in I(n)$, что найдутся множество $\Lambda \in \Omega(b)$, номера $j_\alpha \in I(m)$ и момент $\tau \in [t_0, T_0]$, $\alpha \in \Lambda$, для которых

$$x_\alpha(\tau) = y_{j_\alpha}(\tau), \ x_\alpha(s) \neq y_{j_\alpha}(s) \text{ при всех } s \in [t_0, \tau), \ \alpha \in \Lambda.$$

Отметим, что при $b = 1$ вышеприведенные определения поимок совпадают (в этом случае кратность поимки можно не указывать). Если $b \geqslant 2$, то возможность b-кратной поимки является необходимым условием осуществления нестрогой одновременной b-кратной поимки, которая, в свою очередь, необходима для реализации одновременной b-кратной поимки.

§ 2. Задача простого преследования одного убегающего (случай $A(t) \equiv O$ и $m = 1$)

Сначала исследуем систему (1.1) для случая простых движений ($A(t) \equiv O$ — нуль-матрица) с одним убегающим ($m = 1$), в этом случае она примет вид

$$\begin{array}{lllll} P_i & : & \dot{x}_i = u_i, & u_i \in U(t), & x_i(t_0) = X_i^0, \quad i \in I(n), \\ E & : & \dot{y} = v, & v \in U(t), & y(t_0) = Y^0 \end{array} \tag{2.1}$$

(для краткости здесь опустим индекс $j = 1$).

Для всех $w \in W$, $\xi \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$, где W — произвольный компакт в $\mathbb{R}^k$, определим величину

$$\lambda(w, \xi; W) = \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : (w - \lambda\xi) \in W\bigr\}. \tag{2.2}$$

Отметим, что $\lambda(w, \xi; S(0,1))$ — максимальный корень уравнения $\|w - \lambda\xi\| \leqslant 1$, откуда

$$\lambda(w, \xi; S(0,1)) = \frac{\langle w, \xi\rangle + \sqrt{\langle w, \xi\rangle^2 + \|\xi\|^2(1 - \|w\|^2)}}{\|\xi\|^2} \text{ для всех } w \in S(0,1), \ \xi \neq 0. \tag{2.3}$$

Будем считать, что выполнено

Предположение 1. Существует непрерывная и невырожденная на $[t_0, \infty)$ квадратная матрица $B(t)$ порядка k такая, что

$$B(t)U(t) = S(0,1) \text{ для всех } [t_0, \infty). \tag{2.4}$$

Далее из (2.2), (2.3), (2.4) получим, что для всех $\xi \neq 0$, $w \in U(t)$, $t \in [t_0, \infty)$

$$\begin{aligned}\lambda(w,\xi;U(t)) &= \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : (w-\lambda\xi) \in U(t)\bigr\} = \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : B(t)(w-\lambda\xi) \in B(t)U(t)\bigr\} = \\ &= \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : (B(t)w - \lambda B(t)\xi) \in S(0,1)\bigr\} = \lambda(B(t)w, B(t)\xi; S(0,1)) = \\ &= \frac{\langle B(t)w, B(t)\xi\rangle + \sqrt{\langle B(t)w, B(t)\xi\rangle^2 + \|B(t)\xi\|^2(1-\|B(t)w\|^2)}}{\|B(t)\xi\|^2}.\end{aligned} \tag{2.5}$$

Учитывая, что $X_i^0 \neq Y^0$, $i \in I(n)$, а также равенство (2.5) получим, что каждая функция

$$\lambda_i(v,t) = \lambda(v, X_i^0 - Y^0; U(t)) = \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : (v - \lambda(X_i^0 - Y^0)) \in U(t)\bigr\} \tag{2.6}$$

непрерывна на множестве $U(t)\times[t_0,\infty)$. Следовательно, при любом допустимом управлении $v(t)$ получаем функции $\lambda_i(v(t),t)$ (одного аргумента t) измеримые по Лебегу на $[t_0, \infty)$.

Введем обозначения

$$J_i(t) = \int_{t_0}^{t} \lambda_i(v(s),s)\,ds, \quad \delta_0(t) = \min_{v\in U(t)} \max_{\Lambda\in\Omega(b)} \min_{\alpha\in\Lambda} \lambda_\alpha(v,t), \quad \Delta_0 = \int_{t_0}^{\infty} \delta_0(s)\,ds. \tag{2.7}$$

Лемма 1. *Пусть выполнено предположение* 1 *и* $\Delta_0 = \infty$. *Тогда существует конечный момент* $T > t_0$ *такой, что для любого допустимого управления* $v(t)$ *найдется такое множество* $\Lambda \in \Omega(b)$, *что* $J_\alpha(T) \geqslant 1$ *для всех* $\alpha \in \Lambda$.

Доказательство. Имеют место неравенства

$$\max_{\Lambda\in\Omega(b)} \min_{\alpha\in\Lambda} J_\alpha(t) \geqslant \frac{1}{C_n^b} \sum_{\Lambda\in\Omega(b)} \Bigl(\min_{\alpha\in\Lambda} \int_{t_0}^{t} \lambda_\alpha(v(s),s)\,ds\Bigr) \geqslant \frac{1}{C_n^b} \int_{t_0}^{t} \delta_0(s)\,ds.$$

Так как $\Delta_0 = \infty$, то существует конечный момент T, определяемый из условия

$$\frac{1}{C_n^b} \int_{t_0}^{T} \delta_0(s)\,ds \geqslant 1,$$

для которого найдется такое множество $\Lambda \in \Omega(b)$, что $J_\alpha(T) \geqslant 1$ для всех $\alpha \in \Lambda$.

Лемма 1 доказана. □

Пусть

$$T_0 = T_0(X_i^0, Y^0) = \min\{T > t_0 : \inf_{v(\cdot)} \max_{\Lambda\in\Omega(b)} \min_{\alpha\in\Lambda} J_\alpha(T) \geqslant 1\}, \tag{2.8}$$

где инфимум берется по всем допустимым управлениям $v(t)$.

Из леммы 1 следует, что $T_0 < \infty$ при $\Delta_0 = \infty$.

Теорема 1. *Пусть выполнено предположение* 1, $A(t) \equiv O$, $m = 1$ *и* $\Delta_0 = \infty$. *Тогда в игре* Γ *возможна нестрогая одновременная* b-*кратная поимка.*

Доказательство. При любых допустимых управлениях решения (2.1) имеют вид

$$x_i(t) = X_i^0 + \int_{t_0}^{t} u_i(s)\,ds, \quad y(t) = Y^0 + \int_{t_0}^{t} v(s)\,ds \text{ для всех } i \in I(n),\ t \in [t_0, \infty).$$

Следовательно, для всех $i \in I(n)$, $t \in [t_0, \infty)$

$$x_i(t) - y(t) = (X_i^0 - Y^0) + \int_{t_0}^{t} (u_i(s) - v(s))\,ds.$$

Пусть $v(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant T_0$, — произвольное допустимое управление убегающего E. Из определения момента T_0 следует, что существует момент $\tau \in (t_0, T_0]$, являющийся корнем уравнения

$$1 - \max_{\Lambda\in\Omega(b)} \min_{\alpha\in\Lambda} J_\alpha(t) = 0,$$

а также множество $\Lambda_0 \in \Omega(b)$ такое, что $1 - J_\alpha(\tau) \leqslant 0$ для всех $\alpha \in \Lambda_0$. Пусть $\tau_i \in [t_0, \infty)$ — минимальное значение такое, что $1 - J_i(\tau_i) = 0$. Отметим, что

$$\tau_\alpha \in (t_0, \tau] \subset (t_0, T_0] \text{ для всех } \alpha \in \Lambda_0.$$

Задаем допустимые управления преследователей P_i следующим образом:

$$u_i(t) = \begin{cases} v(t) - \lambda_i(v(t),t)(X_i^0 - Y^0), & t \in [t_0, \min\{\tau_i, T_0\}] \\ v(t), & t > \min\{\tau_i, T_0\}. \end{cases}$$

Тогда для всех $\alpha \in \Lambda_0$

$$x_\alpha(\tau) - y(\tau) = (X_\alpha^0 - Y^0)\Big(1 - \int_{t_0}^{\tau_\alpha} \lambda_\alpha(v(s),s)ds\Big) = (X_\alpha^0 - Y^0)\Big(1 - J_\alpha(\tau_\alpha)\Big) = 0.$$

Теорема 1 доказана. □

Для каждого единичного вектора $l \in \mathbb{R}^k$ и всех $t \in [t_0, \infty)$ определим функцию

$$v_l(t) \in \partial U(t) \text{ из условия: } \langle u(t) - v_l(t), l \rangle < 0 \text{ для всех } u(t) \in U(t) \setminus \{v_l(t)\}. \tag{2.9}$$

Отметим, что функция $v_l(t)$ при каждом зафиксированном l определена однозначно и непрерывна на интервале $[t_0, \infty)$ в силу свойств многозначного отображения $U(t)$.

Лемма 2. *Пусть $A(t) \equiv O$, $m = 1$. Если в ходе игры Γ для некоторого единичного вектора $l \in \mathbb{R}^k$, номера $p \in I(n)$ и момента $\theta_q \geqslant t_0$ реализовалась ситуация*

$$\langle x_p(\theta_q) - y(\theta_q), l \rangle \leqslant 0, \quad x_p(\theta_q) \neq y(\theta_q),$$

то, определяя допустимое продолжение управления убегающего E равенством

$$v(t) = v_l(t) \text{ для всех } t \in [\theta_q, \infty),$$

получим выполнимость неравенств

$$\langle x_p(t) - y(t), l \rangle \leqslant 0, \quad x_p(t) \neq y(t) \text{ для всех } t \in [\theta_q, \infty)$$

при всех допустимых продолжениях управления $u_p(t)$, $t \in [\theta_q, \infty)$, преследователя P_p.

Доказательство. В силу (2.9), условий леммы и теоремы Коши

$$\langle x_p(t) - y(t), l \rangle = \langle x_p(\theta_q) - y(\theta_q), l \rangle + \int_{\theta_q}^{t} \langle u_p(s) - v_l(s), l \rangle\, ds \leqslant 0 \text{ для всех } t \in [\theta_q, \infty),$$

причем равенство возможно только в случае, если $u_p(s) = v_l(s)$ почти всюду на $[\theta_q, t]$, но в этом случае $x_p(t) \neq y(t)$, так как $x_p(\theta_q) \neq y(\theta_q)$. Если

$$\langle x_p(t) - y(t), l \rangle < 0,$$

то $x_p(t) \neq y(t)$. Следовательно, $x_p(t) \neq y(t)$ для всех $t \in [\theta_q, \infty)$.

Лемма 2 доказана. □

Условие 1. $Y^0 \in \operatorname{Int} \operatorname{co} \{X_p^0,\ p \in K\}$ для всех множеств $K \in \Omega(n - b + 1)$.

Теорема 2. *При $A(t) \equiv O$, $m = 1$ условие 1 является необходимым для осуществления b-кратной поимки в игре Γ.*

Доказательство. Пусть условие 1 не выполнено. Тогда существует (хотя бы одно) множество $Q \in \Omega(n-b+1)$ такое, что $Y^0 \notin \operatorname{Int} \operatorname{co} \{X_q^0, q \in Q\}$. Из теоремы отделимости следует, что существует единичный вектор $l \in \mathbb{R}^k$ такой, что $\langle h, l \rangle \leqslant 0$ для всех $h \in \operatorname{co}\{X_q^0 - Y^0, q \in Q\}$, поэтому

$$\langle X_q^0 - Y^0, l \rangle \leqslant 0 \text{ для всех } q \in Q.$$

По (2.9) определим допустимое управление убегающего E следующим образом:

$$v(t) = v_l(t) \text{ для всех } t \in [t_0, \infty).$$

В силу леммы 2 при любых допустимых управлениях $u_i(t)$ преследователей P_i выполнено неравенство $x_q(t) \neq y(t)$ для всех $t \in [t_0, \infty)$, $q \in Q$.

Оставшиеся $|I(n) \setminus Q| = n - (n - b + 1) = b - 1$ преследователей не могут осуществить b-кратную поимку.

Теорема 2 доказана. □

§ 3. Преследование одного убегающего (случай $A(t) \not\equiv O$ и $m = 1$)

Рассмотрим общий случай ($A(t) \not\equiv O$) системы (1.1) с одним убегающим ($m = 1$), в этом случае она примет вид

$$\begin{array}{lllll} P_i & : & \dot{x}_i = A(t)x_i + u_i, & u_i \in U(t), & x_i(t_0) = X_i^0, \quad i \in I(n), \\ E & : & \dot{y} = A(t)y + v, & v \in U(t), & y(t_0) = Y^0 \end{array} \tag{3.1}$$

(индекс $j = 1$ для краткости вновь опустим).

Пусть $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица системы $\dot{\varphi} = A(t)\varphi$ такая, что $\Phi(t_0) = \mathcal{I}$, где $\mathcal{I}$ — единичная матрица. Отметим, что $\Phi^{-1}(t)$ невырожденна и непрерывна на $[t_0, \infty)$, а $\Phi^{-1}(t_0) = \mathcal{I}$.

В системе (3.1) проведем неособое линейное преобразование координат

$$\begin{array}{ll} x_i^*(t) = \Phi^{-1}(t)x_i(t), & y^*(t) = \Phi^{-1}(t)y(t), \\ u_i^*(t) = \Phi^{-1}(t)u_i(t) \in \Phi^{-1}(t)U(t), & v^*(t) = \Phi^{-1}(t)v(t). \end{array} \tag{3.2}$$

В новых координатах конфликтно управляемая система (3.1) преобразуется [3] к задаче простого группового преследования

$$\begin{array}{lllll} P_i & : & \dot{x}_i^* = u_i^*, & u_i^* \in V(t) = \Phi^{-1}(t)U(t), & x_i^*(t_0) = X_i^0, \quad i \in I(n), \\ E & : & \dot{y}^* = v^*, & v^* \in V(t) = \Phi^{-1}(t)U(t), & y^*(t_0) = Y^0. \end{array} \tag{3.3}$$

Отметим, что в полученной (3.3) и в исходной (3.1) системах поимка означает точное совпадение координат. Кроме того, между решениями этих систем существует взаимно однозначное соответствие (3.2).

По форме системы (3.3) и (2.1) совпадают, но, чтобы применить результаты предыдущего параграфа, необходимо убедиться, что многозначное отображение $V(t) = \Phi^{-1}(t)U(t)$ сохраняет свойства многозначного отображения $U(t)$, для этого достаточно показать, что справедлива

Лемма 3. 1. *Многозначное отображение $V(t) = \Phi^{-1}(t)U(t)$ является непрерывным в метрике Хаусдорфа на $[t_0, \infty)$ и при каждом $t \in [t_0, \infty)$ строго выпуклым компактом в $\mathbb{R}^k$ с гладкой границей.*

2. *Если выполнено предположение 1, то существует такая непрерывная и невырожденная на $[t_0, \infty)$ квадратная матрица $B^*(t)$ порядка k, что $B^*(t)V(t) = S(0, 1)$ для всех $[t_0, \infty)$.*

Доказательство. 1. Выберем любые $v'(t), v''(t) \in V(t)$ при произвольном $t \in [t_0, \infty)$. В силу определения $V(t) = \Phi^{-1}(t)U(t)$ найдутся такие $u'(t), u''(t) \in U(t)$, что $v'(t) = \Phi^{-1}(t)u'(t)$, $v''(t) = \Phi^{-1}(t)u''(t)$. Строгая выпуклость $V(t)$ следует непосредственно из определения и строгой выпуклости $U(t)$ при каждом $t \in [t_0, \infty)$, так как

$$\alpha v'(t) + (1-\alpha)v''(t) = \Phi^{-1}(t)(\alpha u'(t) + (1-\alpha)u''(t)) \in \Phi^{-1}(t) \operatorname{Int} U(t) = \operatorname{Int} V(t), \quad \alpha \in (0, 1).$$

Гладкость границы $V(t)$ при каждом $t \in [t_0, \infty)$ следует из леммы 1.2.4 [9].

Пусть $c(V(t), \psi)$ — опорная функция $V(t)$ на $[t_0, \infty)$. Для выпуклых множеств и невырожденных матриц имеет место равенство

$$c(V(t), \psi) = c(\Phi^{-1}(t)U(t), \psi) = c(U(t), (\Phi^{-1}(t))^{\mathrm{T}}\psi),$$

где $(\cdot)^{\mathrm{T}}$ — операция транспонирования. Далее, опорная функция $c(U(t), \psi)$ непрерывна по совокупности переменных, а так как функция $(\Phi^{-1}(t))^{\mathrm{T}}\psi$ непрерывна по t при каждом фиксированном $\psi \in \mathbb{R}^k$, то $c(U(t), (\Phi^{-1}(t))^{\mathrm{T}}\psi)$, а с учетом равенства и $c(V(t), \psi)$, непрерывны по t при каждом фиксированном $\psi \in \mathbb{R}^k$. Из критерия о связи непрерывности многозначного отображения и его опорной функции следует непрерывность $V(t)$ на $[t_0, \infty)$.

2. В силу предположения 1 матрица $B^*(t) = B(t)\Phi(t)$ является непрерывной и невырожденной на $[t_0, \infty)$ квадратной матрицей порядка k, как произведение двух матриц с аналогичными свойствами, и $B^*(t)V(t) = B(t)\Phi(t)\Phi^{-1}(t)U(t) = B(t)U(t) = S(0, 1)$ для всех $[t_0, \infty)$.

Лемма 3 доказана. □

Из леммы 3 следует, что теоремы 1, 2 справедливы для системы (3.3). Перепишем их для системы (3.1) с учетом преобразования координат (3.2), а также (2.6) и (2.7). По функциям

$$\lambda_i^1(v, t) = \lambda(v, X_i^0 - Y^0; \Phi^{-1}(t)U(t)) = \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : (v - \lambda(X_i^0 - Y^0)) \in \Phi^{-1}(t)U(t)\bigr\},$$

непрерывным на множестве $U(t) \times [t_0, \infty)$, определим величины

$$\delta_1(t) = \min_{v \in U(t)} \max_{\Lambda \in \Omega(b)} \min_{\alpha \in \Lambda} \lambda_\alpha^1(v, t), \quad \Delta_1 = \int_{t_0}^{\infty} \delta_1(s)\, ds.$$

Теорема 3. *Пусть выполнено предположение* 1, $m = 1$ *и* $\Delta_1 = \infty$. *Тогда в игре* Γ *возможна нестрогая одновременная* b*-кратная поимка.*

Теорема 4. *При* $m = 1$ *условие* 1 *является необходимым для осуществления* b*-кратной поимки в игре* Γ.

В данной работе выражение «функция (определенная на $[t_0, \infty)$) является почти периодической в смысле Бора» означает, что ее можно доопределить при всех $t < t_0$ так, чтобы полученная функция стала почти периодической по Бору [14].

Теорема 5. *Пусть выполнено предположение* 1, $m = 1$, *матрица* $\Phi(t)$ *является почти периодической в смысле Бора и* $U(t) = U = \mathrm{const}$. *Тогда условие* 1 *является необходимым и достаточным для осуществления нестрогой одновременной* b*-кратной поимки в игре* Γ.

Доказательство. Необходимость выполнения условия 1 для осуществления b-кратной (а следовательно и нестрогой одновременной b-кратной) поимки следует из теоремы 4. В работе [13] при указанных условиях доказано, что если имеет место условие 1, то $\Delta_1 = \infty$, и достаточность следует из теоремы 3. Теорема 5 доказана. □

Отметим, что матрица $\Phi(t)$ является почти периодической в смысле Бора, в частности, когда матрица $A(t) \equiv O$ или $A(t) = A = \mathrm{const}$, а все ее собственные числа являются простыми и чисто мнимыми.

Пример 1. В $\mathbb{R}^2$ рассмотрим игру Γ_1 $2 + 2q$ $(q \geqslant 1)$ лиц: преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_{1+2q}$ и убегающего E вида (1.1), где

$$A(t) \equiv O, \quad U(t) \equiv S\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 1\right), \quad X_i^0 = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{2\pi i}{1+2q} \\ \sin\dfrac{2\pi i}{1+2q} \end{pmatrix}, \quad i \in I(1+2q), \quad Y^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что начальные позиции преследователей образуют правильный $(1 + 2q)$-угольник с центром в начальной позиции убегающего. Проверяя, получаем, что при $b = 1, 2, \ldots, q$ условие 1 имеет место, а при $b \geqslant q + 1$ условие 1 не выполнено. Из теоремы 5 следует

Утверждение 1. *В игре Γ_1 возможна нестрогая одновременная q-кратная поимка, причем поимка большей кратности невозможна.*

Пример 2. В $\mathbb{R}^3$ рассмотрим игру Γ_2 $2+3q$ ($q \geqslant 1$) лиц: преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_{1+3q}$ и убегающего E вида (1.1), где

$$A(t) \equiv O, \quad U(t) \equiv S\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 1\right), \quad X_i^0 = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{2\pi i}{1+2q} \\ \sin\dfrac{2\pi i}{1+2q} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_l^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad Y^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$i \in I(1+2q)$, $l = 2+2q, 3+2q, \ldots, 1+3q$. Из теоремы 5 следует

Утверждение 2. *В игре Γ_2 возможна нестрогая одновременная q-кратная поимка, причем поимка большей кратности невозможна.*

Пример 3. В $\mathbb{R}^{2k}$ ($k \geqslant 1$) рассмотрим игру Γ_3 $n+1$ лиц: преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и убегающего E вида (1.1), где

$$U(t) \equiv S\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\right), \quad A(t) = A = \begin{pmatrix} 0 & -a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_k & 0 \end{pmatrix},$$

$a_1, a_2, \ldots, a_k$ — некоторые отличные от нуля и не совпадающие друг с другом по абсолютной величине числа. Корни характеристического уравнения

$$\det(A - \lambda\mathcal{I}) = (\lambda^2 + a_1^2)(\lambda^2 + a_2^2)\ldots(\lambda^2 + a_k^2) = 0$$

равны $\pm a_1\iota$, $\pm a_2\iota, \ldots, \pm a_k\iota$ (ι — мнимая единица), и матрица $\Phi(t)$ является почти периодической в смысле Бора. Предположение 1 выполнено при $B(t) \equiv 2\mathcal{I}$. Из теоремы 5 следует

Утверждение 3. *В игре Γ_3 возможна нестрогая одновременная b-кратная поимка тогда и только тогда, когда выполнено условие* 1.

Пример 4. В $\mathbb{R}^2$ рассмотрим игру Γ_4 $n+1$ лиц: преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и убегающего E вида (1.1), где

$$U(t) \equiv \left\{\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \frac{e_1^2}{4} + \frac{e_2^2}{9} \leqslant 1\right\}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} \sin t & 0 \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix}.$$

Тогда предположение 1 выполнено при

$$B(t) \equiv \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}, \text{ а } \Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{1-\cos t} & 0 \\ e^{1-\cos t}\sin t & e^{1-\cos t} \end{pmatrix}$$

является почти периодической в смысле Бора. Из теоремы 5 следует

Утверждение 4. *В игре Γ_4 возможна нестрогая одновременная b-кратная поимка тогда и только тогда, когда выполнено условие* 1.

Покажем, что условие 1 в общем случае не является достаточным (см. теоремы 2, 4) для осуществления b-кратной поимки.

Пример 5. В $\mathbb{R}^2$ рассмотрим игру Γ_5 6 лиц: преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_5$ и убегающего E вида (1.1), где $t_0 = 0$,

$$A(t) \equiv O, \quad U(t) = S\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e^{-t}\right), \quad X_i^0 = \begin{pmatrix} 5\cos\dfrac{2\pi i}{5} \\ 5\sin\dfrac{2\pi i}{5} \end{pmatrix}, \quad i \in I(5), \quad Y^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что выполнены предположение 1 ($B(t) = e^t\mathcal{I}$) и условие 1 при $b = 1, 2$. При всех допустимых управлениях

$$x_i(t) \in X_i^0 + S\left((0,0)^{\mathrm{T}}, 1\right), \quad i \in I(5), \quad y(t) \in S\left((0,0)^{\mathrm{T}}, 1\right), \quad t \in [0, \infty).$$

Поскольку $|X_i^0| = 5$, то

$$\left(X_i^0 + S\left((0,0)^{\mathrm{T}}, 1\right)\right) \bigcap S\left((0,0)^{\mathrm{T}}, 1\right) = \varnothing,$$

следовательно $x_i(t) \neq y(t)$, $i \in I(5)$, $t \in [0, \infty)$ при любых допустимых управлениях.

Утверждение 5. *В игре* Γ_5 *поимка невозможна.*

Пример 6. В $\mathbb{R}^k$ ($k \geqslant 2$) рассмотрим игру Γ_6 $n+1$ лиц: преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и убегающего E вида (1.1), где

$$A(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\mathcal{I}, \quad U(t) = S\left((0, 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}, a(t)\right),$$

$a(t)$ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция такая, что $a(t_0) = 1$ и $a(t) > 0$ для всех $[t_0, \infty)$. Тогда предположение 1 выполнено ($B(t) = a^{-1}(t)\mathcal{I}$) и

$$\Phi(t) = a(t)\mathcal{I}, \quad \Phi^{-1}(t) = a^{-1}(t)\mathcal{I}, \quad V(t) = \Phi^{-1}(t)U(t) = S\left((0, 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}, 1\right).$$

Отметим, что если выполнено условие 1, то $\Delta_1 = \infty$, при этом $\Phi(t)$ не всегда является почти периодической в смысле Бора (например, при $a(t) = 1 + (t - t_0)^2$). Из теорем 3, 4 следует

Утверждение 6. *В игре* Γ_6 *возможна нестрогая одновременная b-кратная поимка тогда и только тогда, когда выполнено условие* 1.

§ 4. Преследование группы убегающих (случай $m \geqslant 2$)

По функциям

$$\lambda_i^2(v, t; j) = \lambda(v, X_i^0 - Y_j^0; \Phi^{-1}(t)U(t)) = \sup\left\{\lambda \geqslant 0 : (v - \lambda(X_i^0 - Y_j^0)) \in \Phi^{-1}(t)U(t)\right\}, \quad i \in I(n),$$

непрерывным на множестве $U(t) \times [t_0, \infty)$ при любом значении параметра $j \in I(m)$, определим величины, зависящие от n параметров,

$$\delta_2(t; j_i, i \in I(n)) = \min_{v \in U(t)} \max_{\Lambda \in \Omega(b)} \min_{\alpha \in \Lambda} \lambda_\alpha^2(v, t; j_\alpha), \quad \Delta_2(j_i, i \in I(n)) = \int_{t_0}^{\infty} \delta_2(s; j_i, i \in I(n))\, ds.$$

Условие 2. Для каждого $i \in I(n)$ найдется номер $j_i \in I(m)$, что $\Delta_2(j_i, i \in I(n)) = \infty$.

Теорема 6. *Пусть выполнены предположение* 1 *и условие* 2. *Тогда в игре* Γ *возможна нестрогая одновременная b-кратная поимка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В $\mathbb{R}^k$ определим вспомогательную игру Γ^* $n+1$ лиц: n преследователей P_{ij_i} и убегающего E с законами движения и начальными условиями (при $t=t_0$)

$$\begin{array}{llllll} P_{ij_i} & : & \dot{x}^*_{ij_i} = A(t)x^*_{ij_i} + u^*_{ij_i}, & u^*_{ij_i} \in U(t), & x^*_{ij_i}(t_0) = X^0_i - Y^0_{j_i}, & i \in I(n), \\ E & : & \dot{y}^* = A(t)y^* + v^*, & v^* \in U(t), & y^*(t_0) = 0, & j \in I(m). \end{array} \tag{4.1}$$

По формуле Коши для всех допустимых управлений $u^*_{ij_i}(t), v^*(t)$ и момента времени $t \geqslant t_0$

$$x^*_{ij_i}(t) = \Phi(t)(X^0_i - Y^0_{j_i}) + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)u^*_{ij_i}(s)\,ds, \quad y^*(t) = \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)v^*(s)\,ds.$$

Пусть в игре Γ^*, определяемой системой (4.1), убегающий E использует управление, выбранное убегающими E_j в игре Γ, заданной уравнением (1.1), то есть

$$v^*(t) = v(t) \text{ для всех } t \geqslant t_0.$$

В этом случае имеет место равенство

$$y_{j_i}(t) = y^*(t) + \Phi(t)Y^0_{j_i}. \tag{4.2}$$

Из теоремы 3 следует, что в игре Γ^* возможна нестрогая одновременная b-кратная поимка. Пусть $u^*_{ij_i}(t)$ — допустимые управления преследователей P_{ij_i}, решающие указанную задачу, значит, найдутся множество $\Lambda \in \Omega(b)$ и момент $\tau \in [t_0, T_0]$, для которых

$$x^*_{\alpha j_\alpha}(\tau) = y^*(\tau) \text{ при всех } \alpha \in \Lambda. \tag{4.3}$$

Зададим управление преследователей P_i в игре Γ следующим образом:

$$u_i(t) = u^*_{ij_i}(t) \text{ для всех } t \geqslant t_0.$$

Тогда

$$x_i(t) = x^*_{ij_i}(t) + \Phi(t)Y^0_{j_i}. \tag{4.4}$$

Объединяя (4.2), (4.3), (4.4), получим, что в игре Γ

$$x_\alpha(\tau) = y_{j_\alpha}(\tau) \text{ при всех } \alpha \in \Lambda.$$

Теорема 6 доказана. □

Условие 3. Для каждого $i \in I(n)$ найдется номер $j_i \in I(m)$, что $0 \in \operatorname{Int}\operatorname{co}\{X^0_p - Y^0_{j_p}, p \in K\}$ для всех множеств $K \in \Omega(n-b+1)$.

Аналогично теореме 5 доказывается

Теорема 7. *Пусть выполнено предположение* 1, *матрица* $\Phi(t)$ *является почти периодической в смысле Бора и* $U(t) = U = \text{const}$. *Тогда условие* 3 *является достаточным для осуществления нестрогой одновременной* b*-кратной поимки в игре* Γ.

Пример 7. В $\mathbb{R}^2$ рассмотрим игру Γ_7 5 лиц: преследователей P_1, P_2, P_3 и убегающих E_1, E_2 вида (1.1), где $A(t) \equiv O$,

$$U(t) \equiv S\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, 1\right), \quad X^0_1 = \begin{pmatrix}0\\10\end{pmatrix}, \quad X^0_2 = \begin{pmatrix}-1\\-10\end{pmatrix}, \quad X^0_3 = \begin{pmatrix}1\\-10\end{pmatrix}, \quad Y^0_1 = \begin{pmatrix}-10\\0\end{pmatrix}, \quad Y^0_2 = \begin{pmatrix}10\\0\end{pmatrix}.$$

Отметим, что

$$Y^0_1 \notin \operatorname{Int}\operatorname{co}\{X^0_1, X^0_2, X^0_3\} \quad \text{и} \quad Y^0_2 \notin \operatorname{Int}\operatorname{co}\{X^0_1, X^0_2, X^0_3\}.$$

Это означает, что если рассмотреть аналогичную игру, но только с одним убегающим или с двумя убегающими, каждый из которых имеет свое независимое управление (v_1 и v_2), то в ней поимка невозможна (см. теорему 2). В игре Γ_7 условие 3 при $b=1$ выполнено, например,

$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \in \operatorname{Int}\operatorname{co}\{X^0_1 - Y^0_1, X^0_2 - Y^0_2, X^0_3 - Y^0_1\} = \operatorname{Int}\operatorname{co}\left\{\begin{pmatrix}10\\10\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-11\\-10\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}11\\-10\end{pmatrix}\right\}.$$

Из теоремы 7 следует

Утверждение 7. *В игре* Γ_7 *возможна поимка.*

Пример 8. В $\mathbb{R}^2$ рассмотрим игру Γ_8 $2+4q$ ($q \geqslant 1$) лиц: преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_{1+2q}$ и убегающих $E_1, E_2, \ldots, E_{1+2q}$ вида (1.1), где $U(t) \equiv S\big((0,0)^{\mathrm{T}}, 1\big)$,

$$A(t) = \begin{pmatrix} \cos t \sin t & -\cos t \\ 2\cos t - \cos^3 t & -\cos t \sin t \end{pmatrix}, \quad X_i^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Y_j^0 = \begin{pmatrix} \cos \dfrac{2\pi j}{1+2q} \\ \sin \dfrac{2\pi j}{1+2q} \end{pmatrix},$$

$i, j \in I(1+2q)$. Тогда $\Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & -\sin t \\ \sin t & \cos^2 t \end{pmatrix}$ является почти периодической в смысле Бора. Проверяя, получаем, что при $b = 1, 2, \ldots, q$ условие 3 имеет место (достаточно выбрать $j_i = i$, см. пример 1). Из теоремы 7 следует

Утверждение 8. *В игре* Γ_8 *возможна нестрогая одновременная* q*-кратная поимка.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 479 с.
2. Понтрягин Л.С. Линейная дифференциальная игра убегания // Труды Математического института им. В.А. Стеклова. 1971. Т. 112. С. 30–63.
3. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука. 1974. 456 с.
4. Петросян Л.А. Дифференциальные игры преследования. Л.: Изд-во Ленинградского университета, 1977. 222 с.
5. Черноусько Ф.Л., Меликян А.А. Игровые задачи управления и поиска. М.: Наука, 1978. 272 с.
6. Петросян Л.А. Игры преследования «с линией жизни» со многими участниками // Известия АН Арм. ССР. Математика. 1966. Т. 1. № 5. С. 331–340.
7. Пшеничный Б.Н. Простое преследование несколькими объектами // Кибернетика. 1976. № 3. С. 145–146.
8. Григоренко Н.Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во МГУ, 1990. 197 с.
9. Чикрий А.А. Конфликтно управляемые процессы. Киев: Наук. думка, 1992. 380 с.
10. Петров Н.Н. Многократная поимка в примере Понтрягина с фазовыми ограничениями // Прикладная математика и механика. 1997. Т. 61. Вып. 5. С. 747–754.
11. Благодатских А.И., Петров Н.Н. Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: Изд-во Удмуртского университета, 2009. 266 с.
12. Благодатских А.И. Одновременная многократная поимка в задаче простого преследования // Прикладная математика и механика. 2009. Т. 73. Вып. 1. С. 54–59.
13. Благодатских А.И. Одновременная многократная поимка в конфликтно управляемом процессе // Прикладная математика и механика. 2013. Т. 77. Вып. 3. С. 433–440.
14. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.

Поступила в редакцию 20.02.2016

Благодатских Александр Иванович, к. ф.-м. н., доцент, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: aiblag@mail.ru

A. I. Blagodatskikh
Multiple capture of rigidly coordinated evaders

Keywords: capture, multiple capture, simultaneous multiple capture, pursuit, evasion, differential games, conflict-controlled processes.

МАТЕМАТИКА 2016. Т. 26. Вып. 1

MSC: 49N70, 49N75

The present paper deals with the problem of pursuit of a group of rigidly coordinated evaders in a nonstationary conflict-controlled process with equal opportunities

$$\begin{array}{lcll} P_i & : & \dot{x}_i = A(t)x_i + u_i, \quad u_i \in U(t), \quad x_i(t_0) = X_i^0, & i = 1, 2, \ldots, n, \\ E_j & : & \dot{y}_j = A(t)y_j + v, \quad v \in U(t), \quad y_j(t_0) = Y_j^0, & j = 1, 2, \ldots, m. \end{array}$$

We say that a multiple capture in the problem of pursuit holds if the specified number of pursuers catch evaders, possibly at different times

$$x_\alpha(\tau_\alpha) = y_{j_\alpha}(\tau_\alpha), \quad \alpha \in \Lambda, \quad \Lambda \subset \{1, 2, \ldots, n\}, \quad |\Lambda| = b \quad (n \geqslant b \geqslant 1), \quad j_\alpha \subset \{1, 2, \ldots, m\}.$$

The problem of nonstrict simultaneous multiple capture requires that capture moments coincide

$$x_\alpha(\tau) = y_{j_\alpha}(\tau), \quad \alpha \in \Lambda.$$

The problem of a simultaneous multiple capture requires that lowest capture moments coincide

$$x_\alpha(\tau) = y_{j_\alpha}(\tau), \quad x_\alpha(s) \neq y_{j_\alpha}(s), \quad s \in [t_0, \tau), \quad \alpha \in \Lambda.$$

In this paper we obtain necessary and sufficient conditions for simultaneous multiple capture and nonstrict simultaneous multiple capture.

REFERENCES

1. Isaacs R. *Differential games: a mathematical theory with applications to warfare and pursuit, control and optimization*, New York: John Wiley and Sons, 1965, 384 p. Translated under the title *Differentsial'nye igry*, Moscow: Mir, 1967, 479 p.
2. Pontryagin L.S. A linear differential evasion game, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 1971, vol. 112, pp. 27–60.
3. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Positsionnye differentsial'nye igry* (Positional differential games), Moscow: Fizmatlit, 1974, 456 p.
4. Petrosyan L.A. *Differentsial'nye igry presledovaniya* (Differential games of pursuit), Leningrad: Leningrad State University, 1977, 222 p.
5. Chernous'ko F.L., Melikyan A.A. *Igrovye zadachi upravleniya i poiska* (Control and search game problems), Moscow: Nauka, 1978, 272 p.
6. Petrosyan L.A. "Life-line" pursuit games with several players, *Izvestiya Akademii Nauk Armyanskoi SSR. Matematika*, 1966, vol. 1, no. 5, pp. 331–340 (in Russian).
7. Pshenichnyi B.N. Simple pursuit by several objects, *Kibernetika*, 1976, no. 3, pp. 145–146 (in Russian).
8. Grigorenko N.L. *Matematicheskie metody upravleniya neskol'kimi dinamicheskimi protsessami* (Mathematical methods of control over multiple dynamic processes), Moscow: Moscow State University, 1990, 197 p.
9. Chikrii A.A. *Konfliktno upravlyaemye protsessy* (Conflict controlled processes), Kiev: Naukova Dumka, 1992, 380 p.
10. Petrov N.N. Multiple capture in Pontryagin's example with phase constraints, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1997, vol. 61, no. 5, pp. 725–732.
11. Blagodatskikh A.I., Petrov N.N. *Konfliktnoe vzaimodeistvie grupp upravlyaemykh ob"ektov* (Conflict interaction of groups of controlled objects), Izhevsk: Udmurt State University, 2009, 266 p.
12. Blagodatskikh A.I. Simultaneous multiple capture in a simple pursuit problem, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2009, vol. 73, no. 1, pp. 36–40.
13. Blagodatskikh A.I. Simultaneous multiple capture in a conflict-controlled process, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2013, vol. 77, no. 3, pp. 314–320.
14. Demidovich B.P. *Lektsii po matematicheskoi teorii ustoichivosti* (Lectures on the mathematical stability theory), Moscow: Nauka, 1967, 472 p.

Received 20.02.2016

Blagodatskikh Aleksandr Ivanovich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: aiblag@mail.ru