МАТЕМАТИКА 2016. Т. 26. Вып. 1

УДК 519.833

© ***Ю. А. Бельских, В. И. Жуковский, С. П. Самсонов***

АЛЬТРУИСТИЧЕСКОЕ РАВНОВЕСИЕ (ПО БЕРЖУ) В МОДЕЛИ ДУОПОЛИИ БЕРТРАНА [1]

В 1883 г. французский математик Жозеф Луи Франсуа Бертран (1822–1900) построил модель ценовой конкуренции на олигопольном рынке, на котором фирмы конкурируют между собой, *меняя цену* продукции. Заметим, что такая модель не «блистала новизной», ибо ровно на 45 лет раньше тоже французский экономист, философ и математик Антуан Огюст Курно (1801–1877) в «Исследовании математических принципов теории богатства» в разделе 7 «О конкуренции производителей» рассмотрел частный случай олигополии — дуополию (при которой участвуют только два производителя). В ней уже математическая модель основывалась на том, что оба производителя выбирают *объем поставляемой продукции*, цена же варьируется в результате равновесия между спросом и предложением. Рыночная цена устанавливается на том же уровне, на котором покупателями будет предъявлен спрос на весь «выкинутый на рынок» товар. Однако Бертран основывался на более естественном поведении продавца, именно на выборе им цены, а не количества «выброшенного» на рынок товара, как у Курно.

Заметим, что покупатели обычно рассматривают продукцию одинакового назначения разных фирм как разные товары. Поэтому будем считать, что на рынок каждая фирма выходит со своим товаром, причем все эти товары взаимозаменяемы.

Математическая модель дуополии Бертрана представлена бескоалиционной игрой двух лиц в нормальной форме. Для нее формализуется два вида равновесия: по Бержу (РБ) и по Нэшу (РН).

Предполагается, что:

a) максимальная цена и себестоимость у обоих игроков совпадают (что естественно для рынка одного товара);

b) запрещена коалиция из двух игроков (в этом — бескоалиционный характер игры);

c) цена больше себестоимости, ибо в противном случае продавцам (игрокам) вряд ли стоит появляться на рынке.

В предлагаемой читателю статье для почти всех значений параметров модели установлен конструктивный способ выбора конкретного равновесия (РБ или РН) в зависимости от установившейся на рынке максимальной цены продукта.

Ключевые слова: бескоалиционная игра, равновесие по Нэшу, равновесие по Бержу, модель дуополии Бертрана.

DOI: 10.20537/vm160103

Введение

В 1883 г. Жозеф Бертран предложил [1] модель ценовой конкуренции на дуопольном рынке, в которой стратегией игрока является цена продукта. Отметим, что Бертран продолжил исследования Антуана Курно [2]. Математическая модель, предложенная Курно, основывалась на том, что оба производителя выбирают объем поставляемой продукции, цена же варьируется в результате равновесия между спросом и предложением. Рыночная цена устанавливается на том же уровне, на котором покупателями будет предъявлен спрос на весь «выкинутый на рынок» товар. Однако Бертран основывался на более естественном поведении продавца, именно на выборе им цены, а не количества «выброшенного» на рынок товара, как у Курно («Цена — стоимость плюс разумное вознаграждение за угрызения совести при назначении цены» — иронизирует американский писатель Амброз Бирс (1842–1914)).

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 14–01–90408 Укр_а) и НАН Украины (грант 03–01–14).

Заметим, что покупатели обычно рассматривают продукцию одинакового назначения разных фирм как разные товары. Поэтому будем считать, что на рынок каждая фирма выходит со своим товаром, причем все эти товары взаимозаменяемы.

Итак, пусть на рынке функционируют две фирмы, производящие один и тот же товар. *Стратегией* фирмы (игрока) пусть будет цена, назначаемая фирмой за свой товар. Таким образом, считаем, что каждая i-ая фирма объявляет свою цену $p_i = \text{const} \geqslant 0$ $(i = 1, 2)$. После объявления цен всеми фирмами складывается *ситуация* (набор цен) — вектор $\vec{p} = (p_1, p_2)$. Спрос на товар i-го игрока ($i \in \{1, 2\}$), возникающий на рынке, предполагаем линейным относительно объявленных цен, именно,

$$Q_1(p) = q - l_1 p_1 + l_2 p_2, \quad Q_2(p) = q - l_1 p_2 + l_2 p_1.$$

Здесь q — начальный спрос, коэффициент эластичности $l_1 = \text{const} > 0$ указывает, насколько *снижается спрос* на предлагаемый товар при повышении цены на единицу. В свою очередь, коэффициент эластичности $l_2 = \text{const} > 0$ показывает, насколько *увеличивается спрос* при увеличении на единицу цены товара-заменителя. Если обозначить себестоимость единицы товара через $c > 0$, то прибыль i-ой фирмы (далее называется *функцией выигрыша* игрока $i \in \{1, 2\}$) будет

$$f_1(\vec{p}) = [q - l_1 p_1 + l_2 p_2](p_1 - c), \quad f_2(\vec{p}) = [q - l_1 p_2 + l_2 p_1](p_2 - c). \tag{1}$$

В результате математическую модель определенного выше конкурентного взаимодействия между фирмами-продавцами можно представить упорядоченной тройкой

$$\Gamma = \big\langle \{1, 2\}, \{P_i = (c, \beta]\}_{i=1,2},\ \{f_i(\vec{p})\}_{i=1,2} \big\rangle.$$

В этой бескоалиционной игре двух лиц в нормальной форме через $\{1, 2\}$ обозначено множество порядковых номеров игроков; $\beta = \text{const} > c$ — максимальная для игроков цена, установленная рынком (и совестью!), порой независимо от желания игрока; *стратегией* игрока i является выбранная им цена $p_i \in (c, \beta]$; в складывающейся на рынке «ценовой политике», *ситуации* $\vec{p} = (p_1, p_2)$, качество функционирования игрока i оценивается его *выигрышем* $f_i(\vec{p})$ — значением *функции выигрыша* $f_i(\vec{p})$ в создавшейся ситуации $\vec{p} = (p_1, p_2) \in P = P_1 \times P_2$, явный вид $f_i(\vec{p})$ задан формулой (1).

Особенности игры Γ:

во-первых, предполагается, что максимальная цена β и себестоимость c для игроков одинаковы (что естественно для рынка одного товара);

во-вторых, правилами ведения игры запрещена коалиция $\{1, 2\}$ (в этом проявляется, в частности, «бескоалиционный характер» игры);

в-третьих, цена $p_i \geqslant c$ $(i = 1, 2)$, ибо в противном случае i-му игроку появляться на рынке вряд ли целесообразно.

§ 1. Формализация двух видов равновесия (по Нэшу и по Бержу) для игры Γ

В 1949 г. двадцатиоднолетний американский математик и экономист Джон Форбс Нэш (1928–2015) — тогда аспирант Принстонского университета, а через 45 лет лауреат Нобелевской премии по экономике — предложил [3] понятие «равновесие», которое для игры Γ примет следующий вид.

Определение 1. Пару $(\vec{p^e},\ \vec{f}(\vec{p^e}) = \vec{f^e}) \in P \times \mathbb{R}^2$ назовем *равновесием по Нэшу* для игры Γ, если

$$\max_{p_i \in P_i} f_i(\vec{p^e} \parallel p_i) = f_i(\vec{p^e}) \quad (i = 1, 2), \tag{2}$$

а *ситуацию* $\vec{p^e} = (p_1^e, p_2^e)$, удовлетворяющую (2), — *равновесной по Нэшу.*

Здесь и далее используется общепринятое в теории бескоалиционных игр обозначение $(\vec{p^e} \parallel p_1) = (p_1, p_2^e)$, $(\vec{p^e} \parallel p_2) = (p_1^e, p_2)$, $\vec{p} = (p_1, p_2)$. Кроме того, применяется также вектор $\vec{f} = (f_1, f_2) \in \mathbb{R}^2$.

Приведенное равновесие оказалось настолько привлекательным в экономике, социологии, военном деле и во многих других областях человеческой деятельности, что вызвало «звездопад» Нобелевских премий по экономике, кстати, не прекращающийся до сих пор. Однако и «на солнце бывают пятна». С нашей точки зрения, требование (2) отвечает «эгоистическому характеру», ибо, согласно (2), каждый игрок стремится увеличить *только свой собственный выигрыш*, забывая об интересах остальных и, в частности, забывая о *Золотом правиле* нравственности: «поступай по отношению к другому так, как ты хотел бы, чтобы он поступил по отношению к тебе». А ведь так диктует Новый Завет, Евангелие от Луки (гл. 6, стих 31): «И как хотите, чтобы с вами поступали люди, так и вы должны поступать с ними». Именно такой «альтруистический подход» проявляется в равновесии по Бержу.

Определение 2. Пару $(\vec{p}^B,\ \vec{f}(\vec{p}^B)) \in P \times \mathbb{R}^2$ назовем *равновесием по Бержу* для игры Γ, если

$$\max_{\vec{p} \in P} f_i(\vec{p} \parallel p_i^B) = f_i(\vec{p}^B) \quad (i = 1, 2), \tag{3}$$

а *ситуацию* $\vec{p}^B = (p_1^B, p_2^B)$, удовлетворяющую (3), — *равновесной по Бержу.*

Понятие «равновесная по Бержу ситуация» возникло в России [4–6] в 1994 г. в диссертации Константина Семеновича Вайсмана (тогда аспиранта Орехово-Зуевского педагогического института; он скоропостижно скончался, не дожив до 36 лет). Само понятие появилось в процессе изучения книги Клода Бержа [7] и «мозговой атаки» на достоинства и недостатки равновесной по Нэшу ситуации $\vec{p^e}$. Оно сводится к замене в (2) $\vec{p^e}$ на $\vec{p}^B$, p_i на p_i^B и $\vec{p^e} \parallel p_i$ на $\vec{p} \parallel p_i^B$. Однако именно такая замена снимает «эгоистический характер» равновесия по Нэшу. Действительно, следуя своим стратегиям из равновесной по Бержу ситуации $\vec{p}^B$, игроки «забывают» о себе, о своих интересах и направляют свои усилия на увеличение выигрышей всех оставшихся игроков. Такой альтруистический подход свойственен родственным отношениям (конечно, в дружных и любящих семьях!), в религиозных сообществах, элементы такого альтруизма присутствуют при благотворительности, в спонсорской поддержке и вообще в отношениях между родными. Заметим, что в силу (3) применение равновесных по Бержу ситуаций заведомо исключает вооруженные столкновения, кровопролития и войны. Эта ситуация также решает проблему Таккера в известной игре «дилемма заключенных».

Судьба монографии [7], к сожалению, незавидна. Ее публикация вызвала резкую рецензию известного в математической теории игр специалиста Мартина Шубика [8], в которой указывалось (по нашему мнению, совершенно *справедливо*), что в книге [7] «...никакого внимания не уделено приложению к экономике...» и (опять-таки по нашему мнению, *несправедливо*) «...книга мало интересна экономистам...». Как раз последние слова и «подтолкнули» опубликовать [9], где проведено подробное исследование ситуаций равновесия по Бержу и по Нэшу в известной модели конкурентной олигополии Курно [2], а также выявлены случаи, когда одна из них доставляет всем выигрыши большие, чем другая. Такой же задаче, но уже для модели дуополии Бертрана посвящена предлагаемая читателю настоящая статья. В ней приведен сравнительный анализ применения равновесий по Бержу и по Нэшу в зависимости от наибольшей цены «поставляемого на рынок» товара.

По ситуациям равновесия по Бержу имеются обзоры [10], [11, с. 53–56]. Как показали эти обзоры, большинство упомянутых там публикаций посвящено свойствам равновесия по Бержу, особенностям, модификациям этого понятия, связям с равновесием по Нэшу. Представляется, что в зарождающейся теории равновесия по Бержу уже наступил этап становления строгой математической теории. На смену интенсивного накопления фактов приходит, вероятно, этап эволюционного развития. Нам представляется, что ко второму этапу относятся настоящая статья и работы [12–16].

§ 2. Построение явного вида равновесий по Бержу и по Нэшу

Итак, задана игра Γ. Перейдем к нахождению явного вида равновесия по Нэшу и по Бержу (см. определения 1 и 2 соответственно).

Равновесие по Бержу.

На основе определения 2 получаем

Утверждение 1. *При $l_2 > l_1$ равновесие по Бержу игры* Γ *имеет вид*

$$(\vec{p}^B,\ \vec{f}(\vec{p}^B)) = (p_1^B, p_2^B, f_1(\vec{p}^B), f_2(\vec{p}^B)),$$

где $\vec{p}^B = (p_1^B, p_2^B)$, $p_i^B = \beta \quad (i = 1, 2)$, а вектор равновесных по Бержу выигрышей $\vec{f}(\vec{p}^B) = (f_1(\vec{p}^B), f_2(\vec{p}^B))$ будет

$$f_i(\vec{p}^B) = (l_2 - l_1)(\beta - c)^2 + (q + c(l_2 - l_1))(\beta - c) \quad (i = 1, 2). \tag{4}$$

Напомним, что β — максимальная цена товара, сложившаяся на рынке в результате равенства спроса и предложения.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В самом деле, пусть p — сложившаяся цена на рынке. Тогда для каждого $i = 1, 2$ будет

$$f_i(\vec{p}) = [q + p(l_2 - l_1)](p - c) = (l_2 - l_1)p(p - c) + q(p - c) = (l_2 - l_1)(p - c)^2 + (q + c(l_2 - l_1))(p - c),$$

причем цена $p \in (c, \beta]$. Вследствие $l_2 > l_1$ и $\dfrac{\partial^2 f_i(\vec{p})}{\partial (p - c)^2} = 2(l_2 - l_1) > 0$ каждая функция выигрыша $f_i(\vec{p})$ строго выпукла и возрастает с увеличением p. Поэтому максимум каждой $f_i(\vec{p})$ достигается при $p = \beta$, а значит $p_1^B = p_2^B = \beta$. Отсюда как раз и следует справедливость утверждения 1. □

Равновесие по Нэшу.

Используя определение 1 и требование (2), получим

Утверждение 2. *При $l_2 \neq 2l_1$ равновесие по Нэшу игры* Γ *имеет вид*

$$(\vec{p^e},\ \vec{f}(\vec{p^e})) = (p_1^e, p_2^e, f_1(\vec{p^e}), f_2(\vec{p^e})),$$

где

$$\vec{p^e} = (p_1^e, p_2^e), \quad p_i^e = \frac{q + l_1 c}{2l_1 - l_2} = p^N \quad (i = 1, 2), \tag{5}$$

а вектор равновесных по Нэшу выигрышей

$$f_i(\vec{p^e}) = l_1(p^H - c)^2 = l_1\left(\frac{q + (l_2 - l_1)c}{2l_1 - l_2}\right)^2 \quad (i = 1, 2). \tag{6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно явному виду $f_i(\vec{p})$ из (1) имеем $\dfrac{\partial^2 f_i(\vec{p^e} \parallel p_i)}{\partial {p_i}^2} = -2l_i < 0$. Отсюда получаем строгую вогнутость $f_i(\vec{p})$ по p_i, и тогда, например,

$$\max_{p_1 \in P_1} f_1(p_1, p_2^e)$$

достигается на p_1^e, если

$$\left.\frac{\partial f_1(p_1, p_2^e)}{\partial p_1}\right|_{p_1 = p_1^e} = q - 2l_1 p_1^e + l_2 p_2^e + l_1 c = 0, \tag{7}$$

аналогично
$$\frac{\partial f_2(p_1^e, p_2)}{\partial p_2}\bigg|_{p_2=p_2^e} = q + l_2 p_1^e - 2l_1 p_2^e + l_1 c = 0.$$

Итак, для нахождения равновесной по Нэшу ситуации $\vec{p^e} = (p_1^e, p_2^e)$ получаем систему из двух линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами
$$\begin{cases} -2l_1 p_1^e + l_2 p_2^e = -(q + l_1 c), \\ \ \ l_2 p_1^e - 2l_1 p_2^e = -(q + l_1 c). \end{cases}$$

Решением ее при $l_2 \neq 2l_1$ будет
$$p_1^e = p_2^e = \frac{q + l_1 c}{2l_1 - l_2} = p^H.$$

Из (7) также следует равенство
$$q - l_1 p_1^e + l_2 p_2^e = l_1(p^H - c),$$

и поэтому, с учетом обозначений из (5), будет $f_i(\vec{p^e}) = l_1(p^H - c)^2$. Отсюда и из (5), а также из (1) сразу следует справедливость (6). В заключении доказательства отметим, что естественно полагать $p^H > c$, ибо в противном случае применение равновесия по Нэшу приведет к убыткам. □

§ 3. Использовать равновесие по Бержу иногда более выгодно, чем применять равновесие по Нэшу!

Замечание 1. С учетом (4) и (6) построим при $l_2 > l_1$ и $l_2 \neq 2l_1$ вспомогательную скалярную функцию
$$F(l_1, l_2, \beta) = f_i(\vec{p}^B) - f_i(\vec{p^e}) =$$
$$= (l_2 - l_1)(\beta - c)^2 + [q + c(l_2 - l_1)](\beta - c) - l_1\left(\frac{q + c(l_2 - l_1)}{2l_1 - l_2}\right)^2 \quad (i = 1, 2). \tag{8}$$

Из (8), а также из утверждений 1 и 2 получаем:

во-первых, если удалось найти тройку положительных чисел (l_1, l_2, β) таких, что $f_i(\vec{p}^B) - f_i(\vec{p^e}) = F(l_1, l_2, \beta) > 0$ $(<, =)$, то равновесие по Бержу при таких (l_1, l_2, β) доставляет обоим игрокам большие (соответственно, меньшие или равные) выигрыши, чем равновесие по Нэшу;

во-вторых, при этом необходимо проследить, чтобы при указанных (l_1, l_2, β) все выбранные игроками цены и сложившаяся максимальная цена не были бы меньше, чем себестоимость (в противном случае сама торговля товаром для получения прибыли становится бессмысленной).

Выделим два случая соотношений между коэффициентами эластичности: $l_2 > l_1$, $\quad l_2 < l_1$.

Случай I: $l_2 > l_1 > 0$.

Тогда корни уравнения $(l_2 - l_1)(\beta - c)^2 + [q + c(l_2 - l_1)](\beta - c) - l_1\left(\dfrac{q + c(l_2 - l_1)}{2l_1 - l_2}\right)^2 = 0$ будут
$$(\beta - c)_\pm = \frac{-[q + c(l_2 - l_1)] \pm \sqrt{[q + c(l_2 - l_1)]^2 + \dfrac{4l_1(l_2 - l_1)[q + c(l_2 - l_1)]^2}{(2l_1 - l_2)^2}}}{2(l_2 - l_1)} =$$
$$= \frac{-[q + c(l_2 - l_1)] \pm |q + c(l_2 - l_1)| \dfrac{l_2}{|2l_1 - l_2|}}{2(l_2 - l_1)}. \tag{9}$$

Подслучай Ia: $2l_1 - l_2 > 0$.

Из (9) тогда имеем

$$(\beta^{(1)} - c)_+ = \frac{[q + c(l_2 - l_1)]\left(-1 + \dfrac{l_2}{2l_1 - l_2}\right)}{2(l_2 - l_1)} = \frac{q + c(l_2 - l_1)}{2l_1 - l_2} > 0,$$

$$(\beta - c)_- = \frac{[q + c(l_2 - l_1)]\left(-1 - \dfrac{l_2}{2l_1 - l_2}\right)}{2(l_2 - l_1)} = -\frac{[q + c(l_2 - l_1)]l_1}{(l_2 - l_1)(2l_1 - l_2)} < 0,$$

откуда

$$\beta^{(1)} = \frac{q + c(l_2 - l_1)}{2l_1 - l_2} + c = \frac{q + cl_1}{2l_1 - l_2} = p^H > c. \tag{10}$$

Итак, график функции $F = F(l_1, l_2, \beta)$ при каждой фиксированной паре постоянных $(l_1, l_2) \in \{(l_1, l_2) | 2l_1 > l_2 > l_1 > 0\}$ имеет вид, представленный на рис. 1 (учитываем при этом неравенство $|(\beta - c)_-| > [(\beta^{(1)} - c)_+])$.

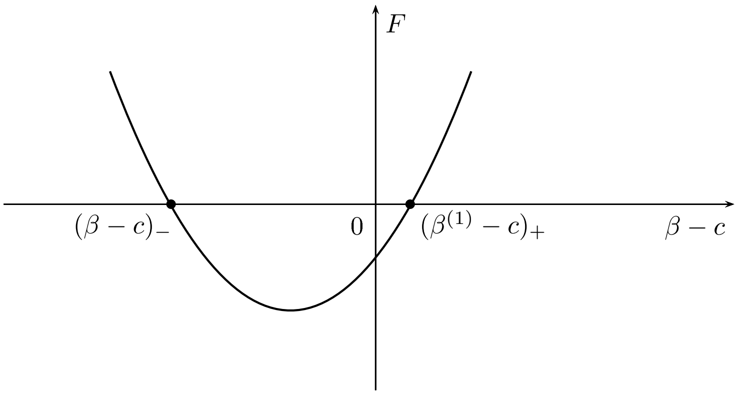

Рис. 1. График $F(l_1, l_2, \beta)$ при $2l_1 > l_2 > l_1 > 0$

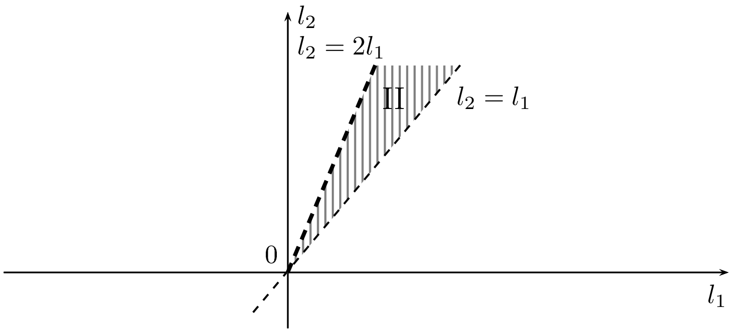

Рис. 2. Множество $l = (l_1, l_2)$ при $0 < l_1 < l_2 < 2l_1$

Объединяя утверждения 1 и 2, требования $l_2 > l_1$ и $2l_1 > l_2$ (рис. 2), а также замечание 1 и формулу (10), получаем

Утверждение 3. *Пусть в игре* Γ *будет* $0 < l_1 < l_2 < 2l_1$*. Тогда при* $i = 1, 2$ *имеем*

$$f_i(\vec{p}^B) > f_i(\vec{p^e}) \text{ при } \beta > \beta^{(1)} = \frac{q + cl_1}{2l_1 - l_2} = p^H,$$
$$f_i(\vec{p}^B) = f_i(\vec{p^e}) \text{ при } \beta = \beta^{(1)},$$
$$f_i(\vec{p}^B) < f_i(\vec{p^e}) \text{ при } \beta \in (c, \beta^{(1)}),$$

где ситуация равновесия по Бержу $\vec{p}^B = (\beta, \beta)$*, равновесия по Нэшу* $\vec{p^e} = (p_1^e, p_2^e)$*,* $p_1^e = p_2^e = \frac{q + cl_1}{2l_1 - l_2}$*; наконец, выигрыши игроков в этих ситуациях равновесия*

$$f_i(\vec{p}^B) = (l_2 - l_1)(\beta - c)^2 + [q + c(l_2 - l_1)](\beta - c),$$
$$f_i(\vec{p^e}) = l_1 \left(\frac{q + c(l_2 - l_1)}{2l_1 - l_2} \right)^2 \quad (i = 1, 2). \tag{11}$$

Замечание 2. Согласно утверждению 1, для любых (l_1, l_2) из внутренности заштрихованной на рис. 2 области при максимальной цене товара $\beta > p^H$ выигрыши обоих игроков в ситуации равновесия по Бержу $\vec{p}^B$ будут больше, чем в ситуации равновесия по Нэшу $\vec{p^e}$ (меньше при $c < \beta < p^H$ и равны для $\beta = p^H$).

Подслучай Ib: $l_2 > 2l_1$**.**

Утверждение 4. *Пусть в игре* Γ *будет* $l_2 > 2l_1$*. Тогда при* $i = 1, 2$ *имеем*

$$f_i(\vec{p}^B) > f_i(\vec{p^e}) \text{ при } \beta > \beta^{(2)} = \frac{ql_1 + c(l_2 - l_1)^2}{(l_2 - l_1)(l_2 - 2l_1)} > c,$$
$$f_i(\vec{p}^B) = f_i(\vec{p^e}) \text{ при } \beta = \beta^{(2)},$$
$$f_i(\vec{p}^B) < f_i(\vec{p^e}) \text{ при } \beta \in (c, \beta^{(2)}),$$

причем в ситуации равновесия по Бержу $\vec{p}^B = (\beta, \beta)$ *и по Нэшу* $\vec{p^e} = (p_1^e, p_2^e)$*,* $p_i^e = \frac{q + cl_1}{2l_1 - l_2}$ $(i = 1, 2)$ *выигрыши обоих игроков снова имеют вид* (11)*.*

Напомним, что β — максимальная цена.

Замечание 3. Доказательство утверждения 4 основывается на:
во-первых, импликации $[l_2 > 2l_1] \Rightarrow [l_2 > l_1]$ и двух корнях уравнения $F(l_1, l_2, p) = 0$:

$$(\beta^{(2)} - c)_+ = \frac{[q + c(l_2 - l_1)]l_1}{(l_2 - l_1)(l_2 - 2l_1)} > 0, \quad (\beta - c)_- = -\frac{q + c(l_2 - l_1)}{l_2 - 2l_1} < 0;$$

во-вторых, представленном на рис. 3 графике функции $F(l_1, l_2, \beta) = f_i(\vec{p}^B) - f_i(\vec{p^e})$;
в-третьих, цепочке соотношений

$$\beta^{(2)} = (\beta^{(2)} - c)_+ + c = \frac{ql_1 + c(l_2 - l_1)^2}{(l_2 - l_1)(l_2 - 2l_1)} > c;$$

в-четвертых, неравенстве

$$(\beta^{(2)} - c)_+ > |(\beta - c)_-| = \beta^{(1)} - c.$$

Согласно утверждению 4, для любых (l_1, l_2) из внутренности заштрихованного клина (см. рис. 4) без границы — точек прямых $l_1 = 0$ и $l_2 = 2l_1$ при максимальной цене $\beta > \beta^{(2)}$ выигрыши обоих игроков в ситуации равновесия по Бержу больше, чем при равновесии по Нэшу (меньше для $\beta \in (c, \beta^{(2)})$ и равны при $\beta = \beta^{(2)}$).

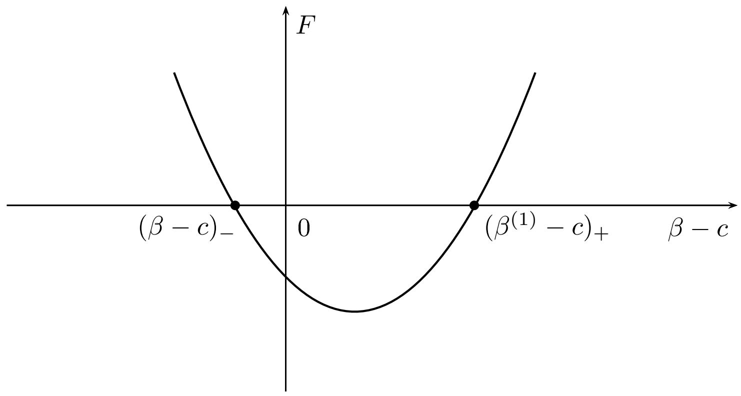

Рис. 3. График $F(l_1, l_2, \beta)$ при $l_2 > 2l_1$

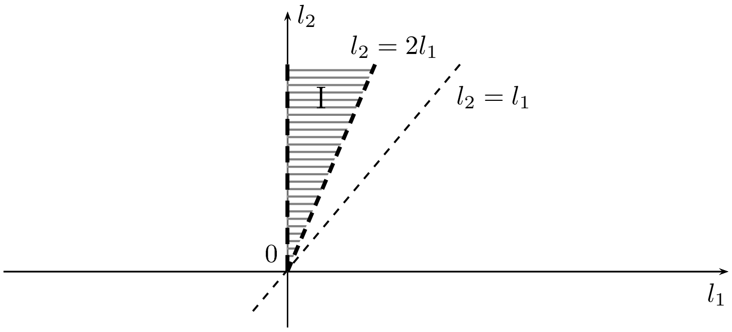

Рис. 4. Множество $l = (l_1, l_2)$ при $l_2 > 2l_1 > 0$

Случай II: $l_1 > l_2 > 0$.
Выделим два подслучая: $q + c(l_2 - l_1) > 0$ и $q + c(l_2 - l_1) < 0$.

Подслучай IIa: $q + c(l_2 - l_1) > 0$.

Утверждение 5. *Если коэффициенты эластичности* l_1 *и* l_2 *из* (1) *удовлетворяют цепочке неравенств*

$$l_1 > l_2 > l_1 - \frac{q}{c}, \tag{12}$$

то равновесие по Бержу игры Γ *имеет вид*

$$\begin{gathered}(\vec{p}^B; \vec{f}(\vec{p}^B)) = (\beta, \beta; f_1(\vec{p}^B), f_2(\vec{p}^B)) = \\ = \left(\frac{q + c(l_1 - l_2)}{2(l_1 - l_2)}, \frac{q + c(l_1 - l_2)}{2(l_1 - l_2)}; \frac{[q + c(l_2 - l_1)]^2}{4(l_1 - l_2)}, \frac{[q + c(l_2 - l_1)]^2}{4(l_1 - l_2)}\right).\end{gathered} \tag{13}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (12) следуют две импликации

$$[l_1 > l_2] \Rightarrow [2l_1 - l_2 > 0], \quad \left[l_2 > l_1 - \frac{q}{c}\right] \Rightarrow [q + c(l_2 - l_1) > 0].$$

Множество двухкомпонентных векторов $l = (l_1, l_2) \in \left\{(l_1, l_2) | \left[l_1 > l_2 > l_1 - \dfrac{q}{c}\right] \wedge [l_i > 0 \ (i = 1, 2)]\right\}$ представлено на рис. 5.

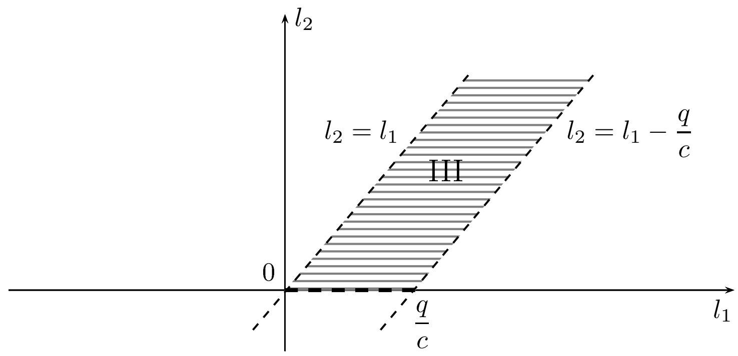

Рис. 5. Множество $\Big\{(l_1, l_2)| \Big[l_1 > l_2 > l_1 - \dfrac{q}{c}\Big] \wedge [l_i > 0 \ (i = 1, 2)]\Big\}$

Напомним еще раз (см. конец введения), что себестоимость c и максимальную цену товара β считаем одинаковыми для обоих игроков. Тогда, следуя (1), введем две совпадающие функции

$$f_i[\beta] = [q + \beta(l_2 - l_1)](\beta - c) = (l_2 - l_1)(\beta - c)^2 + [q + c(l_2 - l_1)](\beta - c) \quad (i = 1, 2). \tag{14}$$

Для $f_i[\beta]$ $(i = 1, 2)$, согласно (14), получаем $\dfrac{d^2 f_i[\beta]}{d(\beta - c)^2} = 2(l_2 - l_1) < 0$, и поэтому $f_i[\beta]$ строго вогнута по $\beta - c$. График $f_i[\beta]$ пересекает ось $\beta - c$ в точках $(\beta - c)_1 = 0$ и $(\beta - c)_2 = -\dfrac{q + c(l_2 - l_1)}{l_2 - l_1} > 0$, а максимум $f_i[\beta]$ достигается в точке $(\beta - c)_* = \dfrac{q + c(l_2 - l_1)}{2(l_1 - l_2)}$ и равен $f_i[\beta_*] = \dfrac{[q + c(l_2 - l_1)]^2}{4(l_1 - l_2)}$, где $\beta_* = (\beta - c)_* + c = \dfrac{q + c(l_1 - l_2)}{2(l_1 - l_2)}$ (см. рис. 6).

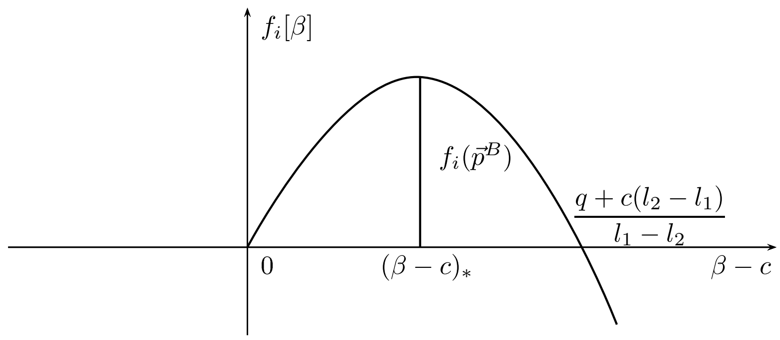

Рис. 6. График $f_i[\beta]$ при $l_1 > l_2 > l_1 - \dfrac{q}{c}$

В результате получили, что при выполнении ограничений (12) критерий $f_i[\beta]$, определяющий максимальную цену β_*, достигает наибольшего значения $f_i[\beta_*] = \dfrac{[q + c(l_2 - l_1)]^2}{4(l_1 - l_2)}$ в точке $\beta_* = \dfrac{q + c(l_1 - l_2)}{2(l_1 - l_2)}$. Отсюда как раз и следует справедливость утверждения 5. $\square$

Из утверждений 5 и 2 получаем

Утверждение 6. *Пусть в игре* Γ *для коэффициентов эластичности* $l_i = \text{const} > 0$ $(i = 1, 2)$ *выполнены ограничения*

$$l_1 > l_2 > l_1 - \frac{q}{c}.$$

Тогда в ситуации равновесия по Бержу $\vec{p}^B$ *оба игрока получают большие выигрыши, чем в ситуации равновесия по Нэшу, то есть*

$$f_i(\vec{p}^B) > f_i(\vec{p}^e) \quad (i = 1, 2), \tag{15}$$

причем равновесие по Бержу имеет вид (13), *а равновесие по Нэшу* — (5) *и* (6).

Д о к а з а т е л ь с т в о. В первую очередь отметим цепочку импликаций $[l_1 > l_2] \Rightarrow [2l_1 > > l_2] \Rightarrow [2l_1 - l_2 > 0]$, и тогда, согласно утверждению 2, существует равновесие по Нэшу $(\vec{p^e}; \vec{f}(\vec{p^e}))$, определенное в (5) и (6). Напомним также две импликации $[l_1 > l_2] \Rightarrow [l_1 - l_2 > 0]$ и $[l_2 > l_1 - \frac{q}{c}] \Rightarrow [q + c(l_2 - l_1) > 0]$ из начала доказательства предыдущего утверждения 5. Согласно ему в Г существует равновесие по Бержу, определенное в (13). Сравнивая (13) с (6), получим

$$f_i(\vec{p}^B) - f_i(\vec{p^e}) = \frac{[q + c(l_2 - l_1)]^2}{4(l_1 - l_2)} - l_1 \frac{[q + c(l_2 - l_1)]^2}{(2l_1 - l_2)^2} = \frac{[q + c(l_2 - l_1)]^2 {l_2}^2}{4(l_1 - l_2)(2l_1 - l_2)^2} > 0 \quad (i = 1, 2).$$

Отсюда сразу приходим к справедливости (15). □

Замечание 4. Можно говорить о двояком применении утверждения 6. Во-первых, к исследованию уже функционирующих конкурентных экономик, описываемых математической моделью дуополии по Бертрану, во-вторых, при аналитическом конструировании таких рынков.

Первый способ.

Шаг 1. Для уже функционирующего конкурентного рынка идентифицировать *численные* значения параметров:

l_1^*, l_2^* — коэффициенты эластичности,
c — себестоимость,
q — величина начального спроса,
β — максимальная цена.

Шаг 2. С помощью найденных на предыдущем шаге двух чисел c и q построить в первой четверти плоскости $\{l_1, l_2\}$ рисунок 5.

Шаг 3. Ответить на два вопроса:

a) Принадлежит ли точка $l^* = (l_1^*, l_2^*)$ внутренности заштрихованной на рис. 5 «дорожки»?

b) Совпадает ли число β с $\dfrac{q + c(l_1^* - l_2^*)}{2(l_1^* - l_2^*)}$?

Шаг 4. При утвердительном ответе на оба вопроса обоим игрокам лучше использовать свои стратегии из ситуации равновесия по Бержу

$$\vec{p}^B = (p_1^B, p_2^B) = (\beta, \beta) = \left(\frac{q + c(l_1^* - l_2^*)}{2(l_1^* - l_2^*)}, \frac{q + c(l_1^* - l_2^*)}{2(l_1^* - l_2^*)} \right)$$

и получить при этом свои выигрыши $f_i(\vec{p}^B) = \dfrac{[q + c(l_2^* - l_1^*)]^2}{4(l_1^* - l_2^*)}$ $(i = 1, 2)$, которые оказываются больше выигрышей $f_i(\vec{p}^e) = l_1 \left(\dfrac{q + c(l_2^* - l_1^*)}{2l_1^* - l_2^*} \right)^2$ $(i = 1, 2)$ в ситуации равновесия по Нэшу $\vec{p^e} = \left(\dfrac{q + l_1^* c}{2l_1^* - l_2^*}, \dfrac{q + l_1^* c}{2l_1^* - l_2^*} \right)$.

Второй способ возникает при *проектировании* конфликтных экономик.

Шаг 1. По *желательным числовым значениям* себестоимости c и начального спроса q построить в первой четверти координатной плоскости $\{l_1, l_2\}$ биссектрису $l_2 = l_1$ и параллельно перенести (сдвинуть ее вправо) на $\dfrac{q}{c}$ (см. рис. 7).

Получим «дорожку» в первой четверти плоскости $\{l_1, l_2\}$ с «тупиком» $[0, \frac{q}{c}]$ на оси l_1 (см. рис. 7).

Шаг 2. С помощью экономических, государственных и прочих «рычагов» довести максимальную цену β до величины $\dfrac{q + c(l_1 - l_2)}{2(l_1 - l_2)}$.

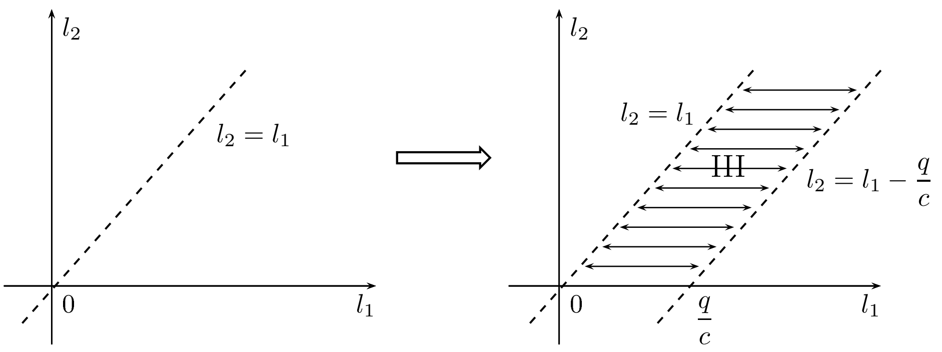

Рис. 7. Схема построения области $\left\{l = (l_1, l_2) | l_1 > l_2 > l_1 - \frac{q}{c}\right\}$

Шаг 3. Тогда для всех точек $l = (l_1, l_2)$, лежащих внутри построенной «тупиковой дорожки» (образованной двумя полупрямыми $l_2 = l_1$, $l_2 = l_1 - \frac{q}{c}$, $l_i > 0$ $(i = 1, 2)$ и оканчивающейся «тупиком» $[0, \frac{q}{c}]$ на оси l_1), заштрихованной на рис. 7, игрокам выгоднее использовать свои стратегии $\beta = \frac{q + c(l_1 - l_2)}{2(l_1 - l_2)}$ из равновесной по Бержу ситуации $\vec{p}^B = (\beta, \beta)$, ибо они обеспечат выигрыши $\frac{[q + c(l_2 - l_1)]^2}{4(l_1 - l_2)}$ большие, чем $l_1 \left(\frac{q + c(l_1 - l_2)}{2l_1 - l_2}\right)^2$ (достигаемых в ситуации равновесия по Нэшу $\vec{p^e} = \left(\frac{q + cl_1}{2l_1 - l_2}, \frac{q + cl_1}{2l_1 - l_2}\right)$).

Подслучай IIb: $\left[l_2 < l_1 - \frac{q}{c}\right] \Leftrightarrow [q + c(l_2 - l_1) < 0]$**.**

Утверждение 7. *Пусть в игре* Γ *будет* $l_2 < l_1 - \frac{q}{c}$*. Тогда для любых* $\beta > c$ *имеем*

$$f_i(\vec{p^e}) > 0 > f_i(\vec{p}^B) \quad (i = 1, 2), \tag{16}$$

причем равновесные по Нэшу выигрыши $f_i(\vec{p^e})$ *заданы в* (6) *и стратегии* p_i^e — *в* (5).

Д о к а з а т е л ь с т в о. В первую очередь здесь отметим, что

$$\left[l_2 < l_1 - \frac{q}{c}\right] \Rightarrow [l_2 < l_1] \Rightarrow [l_2 - 2l_1 < 0],$$

кроме того, $q + c(l_2 - l_1) < 0$. Тогда множество $\left\{l = (l_1, l_2) | 0 < l_2 < l_1 - \frac{q}{c}\right\}$ будет внутренностью острого угла, примыкающего к оси l_1 (рис. 8).

Этот угол IV образуют лучи $l_2 = 0$ и $l_2 = l_1 - \frac{q}{c}$ с вершиной в точке $(\frac{q}{c}, 0)$.

Для любых $l = (l_1, l_2) \in \operatorname{int} \mathrm{IV}$ будет $l_2 < l_1$ и $q + c(l_2 - l_1) < 0$. Отсюда и из (1) имеем

$$f_i(\beta, \beta) = (l_2 - l_1)(\beta - c)^2 + [q + c(l_2 - l_1)](\beta - c) < 0 \quad \forall \beta > c \quad (i = 1, 2),$$

что и доказывает правое неравенство в (16).

Далее, при любых $l = (l_1, l_2) \in \operatorname{int} \mathrm{IV}$, согласно $2l_1 - l_2 \neq 0$ и $q + c(l_2 - l_1) < 0$, а также утверждению 2, будет

$$f_i(\vec{p^e}) = l_1 \left(\frac{q + c(l_2 - l_1)}{2l_1 - l_2}\right)^2 > 0 \quad (i = 1, 2).$$

Тем самым доказано левое неравенство из (16). □

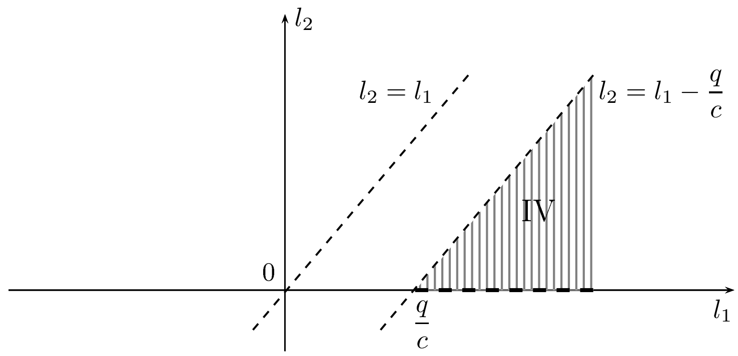

Рис. 8. Множество $l = (l_1, l_2) \in \left\{(l_1, l_2) | 0 < l_2 < l_1 < l_1 - \frac{q}{c}\right\}$

Замечание 5. Согласно утверждению 7, обоим игрокам при $l_2 < l_1 - \frac{q}{c}$ и всяких $\beta > c$ выгоднее придерживаться ситуации равновесия по Нэшу, чем по Бержу, конечно, если только точка $l = (l_1, l_2)$ «попадает» *внутрь* заштрихованного на рис. 8 клина IV.

Замечание 6. С помощью приведенных выше утверждений 3–7 можно, в зависимости от местоположения точки $l = (l_1, l_2)$ в первой четверти плоскости $\{l_1, l_2\}$ и максимальной цены β, выбрать, какое из равновесий (по Бержу или по Нэшу) обеспечивает большие выигрыши, если только точка $l = (l_1, l_2)$ попадает *внутрь* заштрихованных на рис. 2, 4, 5 и 8 областей I–IV (рис. 9).

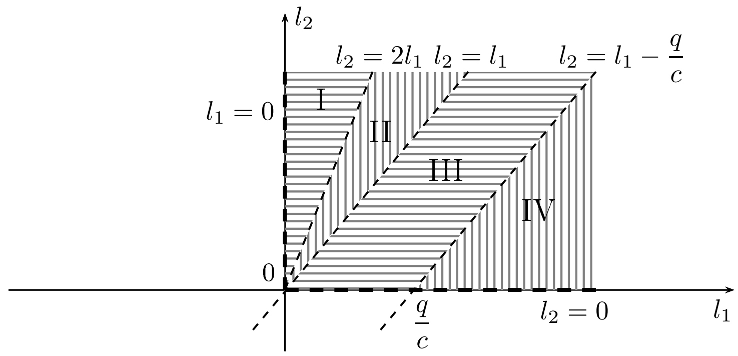

Рис. 9. Схема выбора вида равновесия

Какое же из равновесий (РН или РБ) выбрать, если точка $l = (l_1, l_2)$ попала на границы множеств I–IV? Ответу на этот вопрос посвящен следующий раздел настоящей работы.

§ 4. Выбор концепции равновесия на границах построенных областей I–IV

В этом разделе статьи ответим на вопрос: как осуществить выбор конкретного равновесия, если точка l «попала» на *границы* заштрихованных областей (на рисунке 9 эти границы выделены штрих-пунктирными линиями и их образуют лучи $l_1 = 0$, $l_2 = 2l_1$, $l_2 = l_1$, $l_2 = l_1 - \frac{q}{c}$ и $l_2 = 0$ при $l_i \geqslant 0$ $(i = 1, 2)$).

Граница $l_1 = 0$.

Утверждение 8. *Пусть в игре* Γ *будет* $l_1 = 0$. *Тогда для любых* $\beta > c$ *имеем*

$$f_i(\vec{p}^B) > f_i(\vec{p^e}) \quad (i = 1, 2),$$

то есть для получения больших выигрышей при $l_1 = 0$ *обоим игрокам выгоднее применять равновесие по Бержу* $\vec{p}^B = (\beta, \beta)$ *и тем самым добиться для обоих выигрышей*

$$f_i(\vec{p}^B) = l_2(\beta - c)^2 + [q + l_2 c](\beta - c).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно (8) при $l_1 = 0$ получаем

$$F(0, l_2, \beta) = l_2(\beta - c)^2 + [q + cl_2](\beta - c).$$

Тогда $\dfrac{\partial F(0, l_2, \beta)}{\partial(\beta - c)} = 2l_2(\beta - c) + [q + cl_2]$ и $\dfrac{\partial^2 F(0, l_2, \beta)}{\partial(\beta - c)^2} = 2l_2 > 0$. Поэтому функция $F(0, l_2, \beta)$ строго выпукла по $\beta - c$, возрастает с увеличением $(\beta - c) > 0$ (см. рис. 10) и пересекает ось $\beta - c$ в двух точках $(\beta - c)_1 = 0$ и $(\beta - c)_2 = -\dfrac{q + l_2 c}{2l_2} < 0$.

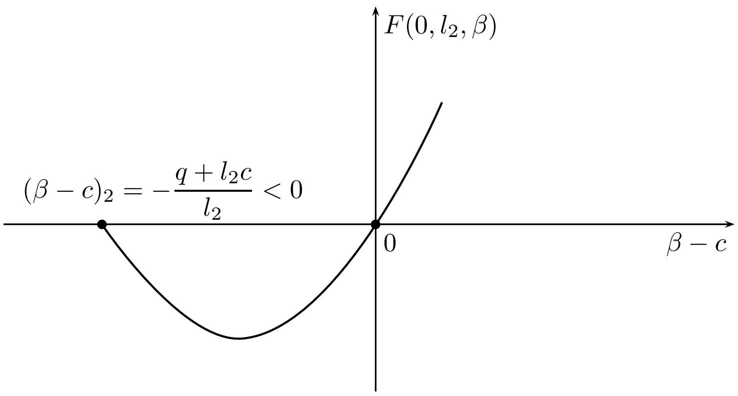

Рис. 10. График $F(0, l_2, \beta)$ при $l_1 = 0$

Из рис. 10 и $F(0, l_2, \beta) = f_i(\vec{p}^B) - f_i(\vec{p^e}) > 0$ для $\forall \beta > c$ сразу следует утверждение 8. $\square$

Граница $l_1 = l_2 > 0$.

Утверждение 9. *Пусть в игре* Γ *будет* $l_2 = l_1$. *Тогда при каждом* $i = 1, 2$ *имеем*

$$f_i(\vec{p}^B) > f_i(\vec{p^e}) \text{ при } \beta > c + \frac{q}{l_1},$$
$$f_i(\vec{p}^B) < f_i(\vec{p^e}) \text{ при } \beta < c + \frac{q}{l_1},$$
$$f_i(\vec{p}^B) = f_i(\vec{p^e}) \text{ при } \beta = c + \frac{q}{l_1},$$

где $\vec{p}^B = (\beta, \beta)$, $\vec{p^e} = (p_1^e, p_2^e)$, $p_1^e = p_2^e = \dfrac{q + l_1 c}{l_1}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для $l_1 = l_2$ из (8) получаем вид функции

$$F(l_1, l_2, \beta) = q(\beta - c) - l_1 \frac{q^2}{(2l_1 - l_2)^2} = q\left[\beta - c - \frac{q}{l_1}\right]$$

(здесь учтено равенство $l_1 = l_2$). Тогда

$$F(l_1, l_2, \beta) = f_i(\vec{p}^B) - f_i(\vec{p^e}) = q\left[\beta - c - \frac{q}{l_1}\right],$$

откуда (и из замечания 1) сразу следует справедливость утверждения 9. $\square$

Граница $l_2 = l_1 - \dfrac{q}{c}$.

Утверждение 10. *Пусть в игре* Γ *имеет место* $l_2 = l_1 - \dfrac{q}{c}$. *Тогда наибольшего выигрыша оба игрока достигают в ситуации равновесия по Нэшу* $\vec{p^e} = (p_1^e, p_2^e) = (c, c)$, *которая совпадает с равновесной по Бержу.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (8) и из импликации $\left[l_2 = l_1 - \dfrac{q}{c}\right] \Rightarrow [q + c(l_2 - l_1) = 0]$ сразу получаем

$$F(l_1, l_2, \beta) = f_i(\vec{p^B}) - f_i(\vec{p^e}) = (l_2 - l_1)(\beta - c)^2 = -\frac{q}{c}(\beta - c)^2 < 0$$

(здесь учтено также равенство $l_2 - l_1 = -\dfrac{q}{c}$). Если принять во внимание, что согласно (6) и $q + c(l_2 - l_1) = 0$ будет $f_i(\vec{p^e}) = 0$ $(i = 1, 2)$, то здесь придется расширить множество допустимых стратегий, добавив точку $\beta = c$. Тогда $\vec{p^B} = (c, c) = \vec{p^e}$. □

Граница $l_2 = 0$**.**

Опять используем формулу (8), из которой при $l_2 = 0$ получаем

$$F(l_1, 0, \beta) = -l_1(\beta - c)^2 + (q - cl_1)(\beta - c) - \frac{(q - cl_1)^2}{4l_1}.$$

Учитывая, что $\dfrac{\partial F(l_1, 0, \beta)}{\partial(\beta - c)} = -2l_1(\beta - c) + [q - cl_1]$ и $\dfrac{\partial^2 F(l_1, 0, \beta)}{\partial(\beta - c)^2} = -2l_1 < 0$, получаем, что функция $F(l_1, 0, \beta)$ вогнута по $\beta - c$. Далее выделим два подслучая: $q > cl_1$ и $q < cl_1$.

Подслучай $q > cl_1$**.**

Утверждение 11. *Пусть в игре* Γ *будет* $l_2 = 0$ *и* $q > cl_1$. *Тогда при каждом* $i = 1, 2$ *имеем*

$$f_i(\vec{p^B}) = f_i(\vec{p^e}) \text{ при } \beta = \frac{q + cl_1}{2l_1} = p^H,$$
$$f_i(\vec{p^B}) < f_i(\vec{p^e}) \text{ при } [\beta > c] \wedge [\beta \neq p^H],$$

причем $\vec{p^e} = \left(\dfrac{q + l_1 c}{2l_1}, \dfrac{q + l_1 c}{2l_1}\right)$, $f_i(\vec{p^e}) = \dfrac{(q - l_1 c)^2}{4l_1}$, $\vec{p^B} = (\beta, \beta)$, $f_i(\vec{p^B}) = -l_1(\beta - c)^2 +$ $+(q - cl_1)(\beta - c)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно импликации $[q > cl_1] \Rightarrow [q - cl_1 > 0]$, строгой вогнутости $F(l_1, 0, \beta)$ по $\beta - c$ и тому факту, что график $F(l_1, 0, \beta)$ касается оси $\beta - c$ только в одной точке $\beta - c = \dfrac{q - cl_1}{2l_1} > 0$, ибо $F(l_1, 0, \beta) = -l_1\left[(\beta - c) - \dfrac{q - cl_1}{2l_1}\right]^2 \leqslant 0$, график $F(l_1, 0, \beta)$ примет вид, представленный на рис. 11.

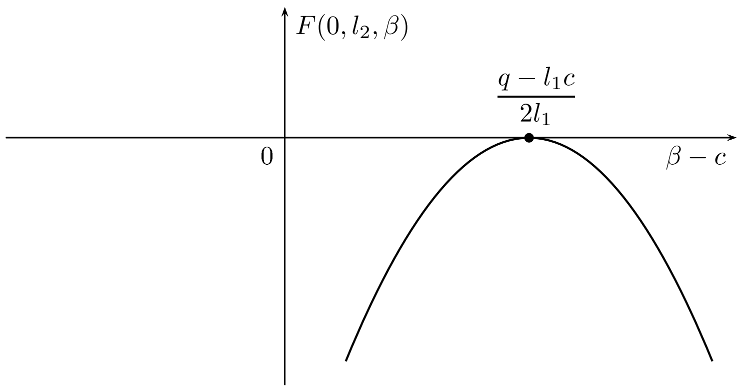

Рис. 11. График $F(l_1, 0, \beta)$ при $l_2 = 0$ и $q > cl_1$

Итак, получаем, что $F(l_1,0,\beta)<0$ для $\beta-c\neq\dfrac{q-cl_1}{2l_1}$ и $F(l_1,0,\beta)=0$ только при $\beta=$ $=\dfrac{q-cl_1}{2l_1}+c=\dfrac{q+cl_1}{2l_1}=p_i^e$ $(i=1,2)$. Отсюда и из замечания 1 сразу следует справедливость утверждения 11. $\square$

Подслучай $q<cl_1$.

Утверждение 12. *Пусть в игре Γ будет $l_2=0$ и $q<cl_1$. Тогда при каждом $i=1,2$ имеем*

$$f_i(\vec{p^e})>f_i(\vec{p^B})\ \text{при}\ \forall\beta>c,$$

где, как и в утверждении 11, $\vec{p^e}=\left(\dfrac{q+l_1c}{2l_1},\dfrac{q+l_1c}{2l_1}\right)$, $f_i(\vec{p^e})=\dfrac{(q-l_1c)^2}{4l_1}$, $\vec{p^B}=(\beta,\beta)$, $f_i(\vec{p^B})=$ $=-l_1(\beta-c)^2+(q-cl_1)(\beta-c)$.

Доказательство сразу получаем из (8) и $F(l_1,0,\beta)=-l_1\left[(\beta-c)-\dfrac{q-cl_1}{2l_1}\right]^2<0$ при $\forall\beta>c$, а также согласно замечанию 1. Здесь уже график $F(l_1,0,\beta)$ имеет вид, представленный на рис. 12.

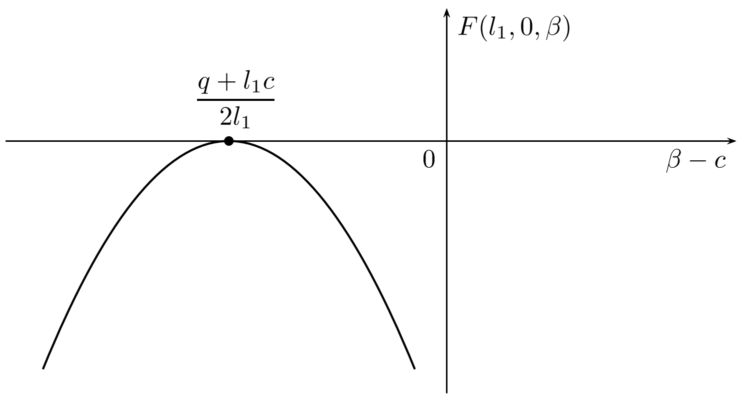

Рис. 12. График $F(l_1,0,\beta)$ при $l_2=0$ и $q<cl_1$

Замечание 7. Для границы $l_2=2l_1$ авторам не удалось получить законченные результаты.

Заключение

Как известно, в любой бескоалиционной игре и, конечно, в математической модели дуополии по Бертрану, игроки стремятся выбирать свои стратегии так, чтобы добиться максимально больших выигрышей для каждого участника конфликта. Пока ограничим их только двумя возможностями:

во-первых, следовать «эгоистической» концепции равновесия по Нэшу (РН);

во-вторых, применять «альтруистическую» концепцию равновесия по Бержу (РБ).

Мы исключаем концепцию активного равновесия и ее частные случаи — равновесие угроз и контругроз, то есть решаем вопрос в рамках сравнения только РН и РБ.

1. Здесь, как часто «пропагандируется» в теории бескоалиционных игр, большую роль может играть «психологический фактор». Если игрок – убежденный эгоист, который заботится только о своих интересах, то ему «прямая дорога» применять свою стратегию из равновесной по Нэшу ситуации (согласно утверждению 2). Если игрок – убежденный альтруист, то ему нужно использовать свою стратегию, диктуемую Золотым правилом, то есть следовать своей стратегии из равновесной по Бержу ситуации (утверждение 1).

2. В настоящей работе мы исключаем «психологический фактор» и предлагаем решать вопрос с точки зрения достижения больших выигрышей (в РН или в РБ). Для этого предлагаем воспользоваться следующей схемой (диктуемой содержанием настоящей статьи).

Шаг 1. Зная числовые значения параметров q, c, l_1 и l_2, найти три числа

$$\beta^{(1)} = \frac{q + cl_1}{2l_1 - l_2}, \quad \beta^{(2)} = \frac{ql_1 + c(l_2 - l_1)^2}{(l_2 - l_1)(l_2 - 2l_1)}, \quad f_i(\vec{p^e}) = l_1 \left[\frac{q + (l_2 - l_1)c}{2l_1 - l_2}\right]^2 \ (i = 1, 2).$$

Шаг 2. В первой четверти плоскости $\{l_1, l_2\}$ полупрямыми $l_1 = 0, l_2 = l_1, l_2 = 2l_1, l_2 = l_1 - \dfrac{q}{c}$, $l_2 = 0$ выделить множества I, II, III и IV (см. рис. 9).

Шаг 3. По паре числовых значений $(l_1, l_2) = l^*$ найти, какому из четырех множеств I–IV (на рис. 9) принадлежит точка l^*. Дальнейшие этапы посвящены выбору концепции равновесия (по Нэшу или по Бержу), явному виду стратегий игроков и их выигрышам при таком выборе. Решают эти три вопроса два обстоятельства: *во-первых,* знание максимальной цены товара β, установившейся на рынке сбыта в результате равенства спроса и предложения; *во-вторых,* множество из I–IV, которому принадлежит указанная на шаге 3 точка l^*.

a) Пусть $l^* \in$ I, тогда (по утверждению 4) в случае
$a1$) $\beta > \beta^{(2)}$ следует использовать РБ ситуацию $\vec{p^B} = (\beta, \beta)$ и получить каждому игроку выигрыш

$$f_i(\vec{p^B}) = (l_2 - l_1)(\beta - c)^2 + [q + c(l_2 - l_1)](\beta - c) \quad (i = 1, 2); \tag{17}$$

$a2$) $c < \beta < \beta^{(2)}$ игрокам следует применить РН ситуацию $\vec{p^e} = (p_1^H, p_2^H)$, $p_i^H = \dfrac{q + cl_1}{2l_1 - l_2}$ $(i = 1, 2)$ и получить РН выигрыши

$$f_i(\vec{p^e}) = l_1 \left[\frac{q + (l_2 - l_1)c}{2l_1 - l_2}\right]^2 \ (i = 1, 2); \tag{18}$$

$a3$) $\beta = \beta^{(2)}$ как при ситуации $\vec{p^B}$, так и при $\vec{p^e}$ выигрыши в обеих ситуациях РБ и РН будут совпадать.

b) Пусть $l^* \in$ II, тогда (по утверждению 3) в случае
$b1$) $\beta > \beta^{(1)}$ выбрать РБ ситуацию $\vec{p^B} = (\beta, \beta)$, каждому игроку при этом достанется выигрыш (17);
$b2$) $c < \beta < \beta^{(1)}$ применять РН ситуацию $\vec{p^e}$ и получить выигрыши (18);
$b3$) $\beta = \beta^{(1)}$, выигрыши в ситуациях РБ и РН совпадают с $l_1 \left[\dfrac{q + (l_2 - l_1)c}{2l_1 - l_2}\right]^2$.

c) Пусть $l^* \in$ III, тогда (по утверждению 6) при $\forall \beta > c$ использовать РБ ситуацию (β, β) и при этом получить выигрыши (17).

d) Пусть $l^* \in$ IV, тогда (по утверждению 7) при $\forall \beta > c$ игрокам для получения больших выигрышей нужно следовать РН ситуации $\vec{p^e}$ и получить РН выигрыши (18).

Если же точка $l^* = (l_1, l_2)$ «попадает» на границы множеств I–IV, то для решения вопроса «какую из ситуаций РБ или РН использовать?» рекомендуем воспользоваться таблицей 1

Таблица 1

$l_1 = 0,\ l_2 > 0$	Утверждение 8
$l_2 = l_1 > 0$	Утверждение 9
$l_2 = l_1 - q/c > 0$	Утверждение 10
$l_1 > 0,\ l_2 = 0, q > cl_1$	Утверждение 11
$l_1 > 0,\ l_2 = 0,\ q < cl_1$	Утверждение 12

или рис. 13 — «путеводителем» по настоящей статье.

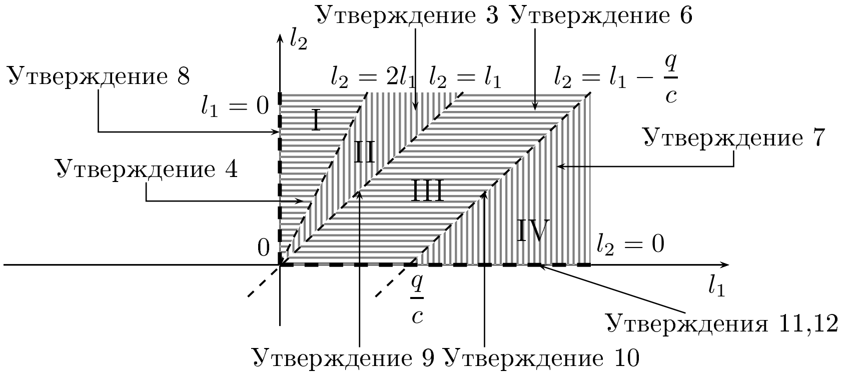

Рис. 13.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bertrand J. Book review of theorie mathematique de la richesse sociale and of recherches sur les principes mathematiques de la theorie des richesses // Journal des Savants. 1883. Vol. 67. P. 499–508.
2. Cournot A.A. Recherches sur les principes mathematiques de la theorie des richesses. Paris: Hachette, 1838.
3. Nash J.F. Equilibrium points in N-person games // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 1950. Vol. 36. № 8. P. 48–49.
4. Вайсман К.С. Равновесие по Бержу: автореф. дис. … канд. физ.-матем. наук. СПбГУ, 1995. 16 с.
5. Вайсман К.С. Равновесие по Бержу // Линейно-квадратичные дифференциальные игры / В.И. Жуковский, А.А. Чикрий. Киев: Наукова Думка, 1994. Раздел 3.2. С. 119–142.
6. Zhukovskiy V.I., Salukvadze M.E., Vaisman K.S. The Berge equilibrium: preprint. Tbilisi: Institute of Control Systems, 1994. 28 p.
7. Берж С. Общая теория игр нескольких лиц. М.: Физматгиз, 1961. 126 с.
8. Shubik M. Review of C. Berge «General theory of n-person games» // Econometrica. 1961. Vol. 29. № 4. P. 821.
9. Жуковский В.И., Кудрявцев К.Н., Горбатов А.С. Равновесие по Бержу в модели олигополии Курно // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2015. Т. 25. № 2. С. 147–156.
10. Colman A.M., Körner T.W., Musy O., Tazdait T. Mutual support in games: some properties of Berge equilibria // Journal of Mathematical Psychology. 2011. Vol. 55. Issue 2. P. 166–175.
11. Мащенко С.О. Концепция равновесия по Нэшу и ее развитие // Журнал обчисловальной та прикладноі математики. 2012. № 1. С. 40–61.
12. Zhukovskiy V.I., Topchishvili A., Sachkov S.N. Application of probability measures to the existence problem of Berge–Vaisman guaranteed equilibrium // Model Assisted Statistics and Applications. 2014. Vol. 9. № 3. P. 223–239.
13. Zhukovskiy V.I., Sachkov S.N. Bilanciamento confilitti friendly // Italian Science Review. 2014. Vol. 18. № 9. P. 169–179.
14. Жуковский В.И., Сачков С.Н. Об одном необычном, но доброжелательном способе уравновешивания конфликтов // Международный независимый институт Математики и Систем. Ежемесячный научный журнал. 2014. № 10. С. 61–64.
15. Zhukovskiy V.I., Sachkov S.N., Gorbatov A.S. Mathematical model of the "Golden rule" // Science, Technology and Life–2014. Proceedings of the International Scientific Conference. Czech Republic, Karlovy Vary, 27–28 December 2014. P. 16–23.
16. Жуковский В.И., Чикрий А.А., Солдатова Н.Г. Равновесие по Бержу в конфликтах при неопределенности // XII Всероссийское совещание по проблемам управления (ВСПУ–2014): Труды. М.: ИПУ РАН, 2014. С. 8290–8302.

Поступила в редакцию 25.11.2015

Бельских Юлия Анатольевна, к. ф.-м. н., доцент, Московский государственный университет технологий и управления им. К. Г. Разумовского (Орехово-Зуевский филиал), 142601, Россия, Московская область, г. Орехово-Зуево, ул. Шулайкиной, 2.
E-mail: fozbelskih@rambler.ru

Жуковский Владислав Иосифович, д. ф.-м. н., профессор, кафедра оптимального управления, факультет вычислительной математики и кибернетики, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119991, Россия, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы.
E-mail: zhkvlad@yandex.ru

Самсонов Сергей Петрович, к. ф.-м. н., доцент, кафедра оптимального управления, факультет вычислительной математики и кибернетики, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119991, Россия, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы.
E-mail: samsonov@cs.msu.ru

Yu. A. Bel'skikh, V. I. Zhukovskii, S. P. Samsonov
Altruistic (Berge) equilibrium in the model of Bertrand duopoly

Keywords: non-cooperative game, Nash equilibrium, Berge equilibrium, model of Bertrand duopoly.

MSC: 91A10, 91B26

In 1883 the French mathematician J. Bertrand (1822–1900) constructed the model of price competition on oligopoly market in which firms compete between themselves changing the price of goods.

The mathematical model of Bertrand duopoly is represented by a non-cooperative game of two persons in normal form. Two equilibriums are formalized for it: Berge equilibrium (BE) and Nash equilibrium (NE).

It is assumed that

a) maximal price and cost price of both players coincide (it's naturally for the market of one product);

b) the coalition of two players is prohibited (this is non-cooperative character of the game);

c) the price is higher than the cost price for otherwise the sellers (players) would hardly appear on the market.

In the present article for almost all values of parameters of the model (except the measure-null) the constructive method of the choice of concrete equilibrium (BE or NE) depending on the maximal price of the product established in the market is suggested.

REFERENCES

1. Bertrand J. Book review of theorie mathematique de la richesse sociale and of recherches sur les principes mathematiques de la theorie des richesses, *Journal des Savants*, 1883, vol. 67, pp. 499–508.
2. Cournot A.A. *Recherches sur les principes mathematiques de la theorie des richesses*, Paris: Hachette, 1838.
3. Nash J.F. Equilibrium points in N-person games, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 1950, vol. 36, no. 8, pp. 48–49.
4. Vaisman K.S. The Berge equilibrium, *Abstract of Cand. Sci. (Phys.-Math.) Dissertation*, St. Petersburg, 1995, 16 p (in Russian).
5. Vaisman K.S. *The Berge equilibrium*, in book: Zhukovskii V.I., Chikrii A.A. *Lineino-kvadratichnye differensial'nye igry* (Linear-quadratic differential games), Kiev: Naukova Dumka, 1994, Section 3.2, pp. 119–142 (in Russian).
6. Zhukovskii V.I., Salukvadze M.E., Vaisman K.S. *The Berge equilibrium: Preprint*, Tbilisi: Institute of Control Systems, 1994, 28 p.
7. Berge C. *Théorie genérale des jeux n personnes*, Paris: Gauthier-Villars, 1957, 114 p. Translated under the title *Obshchaya teoriya igr neskol'kikh lits*, Moscow: Fizmatgiz, 1961, 126 p.
8. Shubik M. Review of C. Berge "General theory of n-person games", *Econometrica*, 1961, vol. 29, no. 4, p. 821.
9. Zhukovskii V.I., Kudryavtsev K.N., Gorbatov A.S. The Berge equilibrium in Cournot's model of oligopoly, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2015, vol. 25, no. 2, pp. 147–156 (in Russian).
10. Colman A.M., Körner T.W., Musy O., Tazdait T. Mutual support in games: some properties of Berge equilibria, *Journal of Mathematical Psychology*, 2011, vol. 55, issue 2, p. 166–175.

11. Mashchenko S.O. The concept of Nash equilibrium and its development, *Zh. Obchysl. Prykl. Mat.*, 2012, no. 1, pp. 40–61 (in Russian).
12. Zhukovskiy V.I., Topchishvili A., Sachkov S.N. Application of probability measures to the existence problem of Berge–Vaisman guaranteed equilibrium, *Model Assisted Statistics and Applications*, 2014, vol. 9, no. 3, pp. 223–239.
13. Zhukovskii V.I., Sachkov S.N. Bilanciamento confilitti friendly, *Italian Science Review*, 2014, vol. 18, no. 9, pp. 169–179.
14. Zhukovskii V.I., Sachkov S.N. About an unusual but friendly method of balancing of conflicts, *International Independent Institute of Mathematics and Systems. Monthly Scientific Journal*, 2014, no. 10, pp. 61–64 (in Russian).
15. Zhukovskii V.I., Sachkov S.N., Gorbatov A.S. Mathematical model of the "Golden rule", *Science, Technology and Life–2014. Proceedings of the International Scientific Conference*, Czech Republic, Karlovy Vary, 27–28 December 2014, pp. 16–23.
16. Zhukovskii V.I., Chikrii A.A., Soldatova N.G. The Berge equilibrium in the conflicts under uncertainty, *XII Vserossiiskoe soveshchanie po problemam upravleniya (VSPU–2014): Trudy* (Proc. XII All-Russia Conf. on Control Problems (RCCP–2014)), Moscow: Inst. of Control Problems, 2014, pp. 8290–8302 (in Russian).

Received 25.11.2015

Bel'skikh Yuliya Anatol'evna, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Moscow State University of Technologies and Management named after K. G. Rasumovskii, ul. Shulaikinoi, 2, Orekhovo-Zuevo, 142601, Russia.
E-mail: fozbelskih@rambler.ru

Zhukovskii Vladislav Iosifovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Optimal Control, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University, GSP-1, Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia.
E-mail: zhkvlad@yandex.ru

Samsonov Sergei Petrovich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Optimal Control, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University, GSP-1, Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia.
E-mail: samsonov@cs.msu.ru