УДК 517.929.2

© *И. Н. Банщикова, С. Н. Попова*

О СПЕКТРАЛЬНОМ МНОЖЕСТВЕ ЛИНЕЙНОЙ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ С УСТОЙЧИВЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ [1]

Пусть зафиксирован некоторый класс возмущений матрицы коэффициентов $A(\cdot)$ дискретной линейной однородной системы вида
$$x(m+1)=A(m)x(m),\quad m\in\mathbb{Z},\quad x\in\mathbb{R}^n,$$
с вполне ограниченной на $\mathbb{Z}$ матрицей $A(\cdot)$. Спектральным множеством этой системы, отвечающим заданному классу возмущений, называем совокупность полных спектров показателей Ляпунова возмущенных систем, когда возмущения пробегают весь заданный класс. Основное внимание в работе уделено классу $\mathcal{R}$ возмущенных систем вида
$$y(m+1)=A(m)R(m)x(m),\quad m\in\mathbb{Z},\quad y\in\mathbb{R}^n,$$
с вполне ограниченными на $\mathbb{Z}$ матрицами $R(\cdot)$, и его подклассам $\mathcal{R}_\delta$ с матрицами $R(\cdot)$, удовлетворяющими оценке $\sup_{m\in\mathbb{Z}}\|R(m)-E\|<\delta$, где $\delta>0$. Доказано, что если показатели Ляпунова исходной системы устойчивы, то спектральное множество $\lambda(\mathcal{R})$, отвечающее классу $\mathcal{R}$, совпадает с множеством всех упорядоченных по возрастанию наборов из n чисел, при этом для каждого $\Delta>0$ существует такое $\ell=\ell(\Delta)>0$, что для любого $\delta<\Delta$ спектральное множество $\lambda(\mathcal{R}_{\ell\delta})$ содержит в себе δ-окрестность полного спектра показателей Ляпунова невозмущенной системы.

Ключевые слова: линейная система с дискретным временем, показатели Ляпунова, возмущения коэффициентов.

DOI: 10.20537/vm160102

Пусть $\mathbb{R}^n$ — евклидово пространство размерности n с фиксированным ортонормированным базисом $e_1,\dots,e_n$ и стандартной нормой $\|\cdot\|$. Через $M_n(\mathbb{R})$ будем обозначать пространство вещественных матриц размерности $n\times n$ со спектральной нормой, т. е. операторной нормой, индуцируемой в $M_n(\mathbb{R})$ евклидовой нормой в $\mathbb{R}^n$; $E\in M_n(\mathbb{R})$ — единичная матрица. Множество всех упорядоченных по возрастанию наборов из n вещественных чисел будем обозначать $\mathbb{R}^n_\leqslant$. Для фиксированного набора $\mu=(\mu_1,\dots,\mu_n)\in\mathbb{R}^n_\leqslant$ и произвольного $\delta>0$ через $O_\delta(\mu)$ обозначим совокупность всех таких наборов $\nu=(\nu_1,\dots,\nu_n)\in\mathbb{R}^n_\leqslant$, что $\max\limits_{j=1,\dots,n}|\nu_j-\lambda_j(A)|<\delta$. Таким образом, $O_\delta(\mu)$ — это δ-окрестность набора μ во множестве $\mathbb{R}^n_\leqslant$.

Основным объектом исследований является линейная однородная система с дискретным временем
$$x(m+1)=A(m)x(m),\tag{1}$$
где аргумент m пробегает множество $\mathbb{Z}_{m_0}$ целых значений, не меньших фиксированного $m_0\in\mathbb{Z}$; неизвестная функция x принимает значения в $\mathbb{R}^n$; коэффициент $A(m)$ при каждом m принадлежит пространству $M_n(\mathbb{R})$. Всюду ниже будем предполагать, что функция $A(\cdot)$ *вполне ограничена* [1], то есть при каждом m существует $A^{-1}(m)$, и найдется такое a, что
$$\sup_{m\geqslant m_0}\bigl(\|A(m)\|+\|A^{-1}(m)\|\bigr)\leqslant a.$$
Заметим, что при всех m выполнены неравенства
$$\|A(m)\|+\|A^{-1}(m)\|\geqslant\|A(m)\|+\|A(m)\|^{-1}\geqslant 2,$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 16–01–00346).

поэтому $a \geqslant 2$.

Для произвольного нетривиального решения $x(\cdot)$ системы (1) определим его *показатель Ляпунова* равенством

$$\lambda[x] \doteq \overline{\lim_{m\to\infty}}\, m^{-1}\ln\|x(m)\|$$

и обозначим через Λ *спектр показателей Ляпунова* системы (1), то есть множество всех $\lambda \in \mathbb{R}$, для каждого из которых существует нетривиальное решение $x(\cdot)$ системы (1) с показателем λ. Известно [2, с. 51–52], что множество Λ состоит не более, чем из n различных чисел и расположено на отрезке $[-\ln a, \ln a]$. Пусть $\Lambda = \{\Lambda_1, \ldots, \Lambda_p\}$, где $\Lambda_1 < \ldots < \Lambda_p$, $p \leqslant n$. Показатель Ляпунова тривиального решения системы (1) полагаем равным $-\infty$.

Для каждого $j \in \{1, \ldots, p\}$ рассмотрим множество E_j всех решений системы (1), показатели которых не превосходят Λ_j. Множество E_0 считаем состоящим из тривиального решения системы (1). Тогда [2, с. 54] каждое из множеств E_j является линейным подпространством, имеют место строгие вложения $E_0 \subset E_1 \subset \ldots \subset E_p$ и неравенства

$$0 = \dim E_0 < \dim E_1 < \ldots < \dim E_p = n.$$

Положим

$$n_j = \dim E_j - \dim E_{j-1}, \quad j = 1, \ldots, p.$$

Назовем n_j *кратностью* показателя Λ_j. Заметим, что $n_1 + \ldots + n_p = n$. Набор n чисел $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_1, \ldots, \Lambda_p, \ldots, \Lambda_p$, где каждое Λ_j повторяется n_j раз, называется *полным спектром показателей Ляпунова* системы (1). В дальнейшем будем обозначать его

$$\lambda(A) = \bigl(\lambda_1(A), \ldots, \lambda_n(A)\bigr),$$

считая при этом, что $\lambda_1(A) \leqslant \lambda_2(A) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A)$. Таким образом, $\lambda(A) \in \mathbb{R}^n_{\leqslant}$.

Нас будет интересовать вопрос о поведении полного спектра показателей Ляпунова системы (1) под действием различных возмущений ее коэффициентов.

Определение 1. Пусть зафиксирован некоторый класс возмущений матрицы коэффициентов $A(\cdot)$ системы (1). *Спектральным множеством* системы (1), отвечающим заданному классу возмущений, будем называть совокупность полных спектров показателей Ляпунова возмущенных систем, когда возмущения пробегают весь заданный класс.

Сначала рассмотрим возмущенную систему в виде

$$y(m+1) = \bigl(A(m) + Q(m)\bigr)y(m), \quad m \in \mathbb{Z}_{m_0},\ y \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Систему (2) будем называть *аддитивно возмущенной* по отношению к системе (1), а сами возмущения $Q(\cdot)$ — *аддитивными*. Чтобы возмущенная система (2) обладала полным спектром показателей Ляпунова, состоящим из n чисел, достаточно потребовать от аддитивного возмущения $Q(\cdot)$ полной ограниченности матрицы $A(\cdot) + Q(\cdot)$. По этой причине введем понятие допустимого аддитивного возмущения.

Определение 2. Аддитивное возмущение $Q(\cdot)$ будем называть *допустимым* для системы (1), если матрица $A(\cdot) + Q(\cdot)$ вполне ограничена на $\mathbb{Z}_{m_0}$.

Лемма 1. *Аддитивное возмущение $Q(\cdot)$ допустимо для системы* (1) *в том и только в том случае, когда существует такая вполне ограниченная матрица $R : \mathbb{Z}_{m_0} \to M_n(\mathbb{R})$, что*

$$Q(m) = A(m)R(m) - A(m), \quad m \in \mathbb{Z}_{m_0}. \tag{3}$$

МАТЕМАТИКА 2016. Т. 26. Вып. 1

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть аддитивное возмущение $Q(\cdot)$ допустимо для (1). Положим

$$R(m) = A^{-1}(m)\big(A(m) + Q(m)\big), \quad m \in \mathbb{Z}_{m_0}.$$

Тогда равенство (3) выполнено, а из полной ограниченности матриц $A(\cdot)$ и $A(\cdot)+Q(\cdot)$ вытекает полная ограниченность $R(\cdot)$.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть $R(\cdot)$ вполне ограничена. Определим матрицу $Q(\cdot)$ равенством (3). Тогда

$$A(m) + Q(m) = A(m)R(m), \quad m \in \mathbb{Z}_{m_0}, \tag{4}$$

и полная ограниченность матрицы $A(\cdot) + Q(\cdot)$ вытекает из полной ограниченности $A(\cdot)$ и $R(\cdot)$. Лемма доказана.

Равенство (4) позволяет записать возмущенную по отношению к (1) систему в виде

$$y(m+1) = A(m)R(m)y(m), \quad m \in \mathbb{Z}_{m_0},\ y \in \mathbb{R}^n. \tag{5}$$

Матрицу $R(\cdot)$ в этом случае называем *мультипликативным возмущением* системы (1), а саму систему (5) — *мультипликативно возмущенной* по отношению к системе (1). Если матрица $A(\cdot)R(\cdot)$ вполне ограничена, то полный спектр показателей Ляпунова возмущенной системы (5) состоит из n чисел. Так как по условию матрица $A(\cdot)$ вполне ограничена, то приходим к следующему определению.

Определение 3. Мультипликативное возмущение $R(\cdot)$ будем называть *допустимым*, если матрица $R(\cdot)$ вполне ограничена на $\mathbb{Z}_{m_0}$.

Из леммы 1 и определений 2 и 3 вытекает следствие.

Следствие 1. *Множество $\mathcal{Q}$ всех допустимо аддитивно возмущенных систем вида* (2) *совпадает со множеством $\mathcal{R}$ всех допустимо мультипликативно возмущенных систем вида* (5).

Теперь рассмотрим подмножества множеств $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{R}$. Для произвольного $\delta > 0$ обозначим через $\mathcal{Q}_\delta$ множество всех допустимо аддитивно возмущенных систем вида (2), возмущения $Q(\cdot)$ которых удовлетворяют неравенству $\sup_{m\geqslant m_0}\|Q(m)\| < \delta$, а через $\mathcal{R}_\delta$ — множество всех допустимо мультипликативно возмущенных систем вида (5), возмущения $R(\cdot)$ которых удовлетворяют неравенству $\sup_{m\geqslant m_0}\|R(m) - E\| < \delta$.

Лемма 2. *Для каждого $\delta > 0$ справедливы включения $\mathcal{Q}_\delta \subset \mathcal{R}_{a\delta}$, $\mathcal{R}_\delta \subset \mathcal{Q}_{a\delta}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем сначала первое включение. Пусть допустимое аддитивное возмущение $Q(\cdot)$ таково, что $\sup_{m\geqslant m_0}\|Q(m)\| < \delta$. Тогда система (2) с матрицей коэффициентов $A(\cdot) + Q(\cdot)$ принадлежит множеству $\mathcal{Q}_\delta$. Положим

$$R(m) = E + A^{-1}(m)Q(m), \quad m \in \mathbb{Z}_{m_0}.$$

Тогда из леммы 1 следует, что $R(\cdot)$ — допустимое мультипликативное возмущение, причем $R(m) - E = A^{-1}(m)Q(m)$, поэтому $\sup_{m\geqslant m_0}\|R(m) - E\| < a\delta$. Это означает, что система (5) с матрицей коэффициентов $A(\cdot)R(\cdot)$ принадлежит множеству $\mathcal{R}_{a\delta}$. Но при всех m справедливы равенства $A(m)R(m) = A(m) + Q(m)$, откуда вытекает доказываемое включение.

Теперь докажем второе включение. Пусть допустимое мультипликативное возмущение $R(\cdot)$ таково, что $\sup_{m\geqslant m_0}\|R(m) - E\| < \delta$. Тогда система (5) с матрицей коэффициентов $A(\cdot)R(\cdot)$ принадлежит множеству $\mathcal{R}_\delta$. Определим матрицу $Q(\cdot)$ равенством (3). Тогда из леммы 1 следует, что $Q(\cdot)$ — допустимое аддитивное возмущение, причем

$$\sup_{m\geqslant m_0}\|Q(m)\| \leqslant \sup_{m\geqslant m_0}\big(\|A(m)\|\,\|R(m) - E\|\big) < a\delta.$$

Это означает, что система (2) с матрицей коэффициентов $A(\cdot)+Q(\cdot)$ принадлежит множеству $\mathcal{Q}_{a\delta}$. Но при всех m справедливы равенства $A(m)R(m)=A(m)+Q(m)$, что и доказывает лемму.

Для произвольного допустимого аддитивного возмущения $Q(\cdot)$ обозначим через

$$\lambda(A+Q)=\big(\lambda_1(A+Q),\ldots,\lambda_n(A+Q)\big)\in\mathbb{R}^n_{\leqslant}$$

полный спектр показателей Ляпунова системы (2). Спектральное множество системы (1), отвечающее классу всевозможных допустимых для этой системы аддитивных возмущений, будем обозначать $\lambda(\mathcal{Q})$. Аналогично для произвольного $\delta>0$ положим $\lambda(\mathcal{Q}_\delta)$ — спектральное множество системы (1), отвечающее классу допустимых аддитивных возмущений $Q(\cdot)$, удовлетворяющих оценке $\sup_{m\geqslant m_0}\|Q(m)\|<\delta$.

Далее, пусть

$$\lambda(AR)=\big(\lambda_1(AR),\ldots,\lambda_n(AR)\big)\in\mathbb{R}^n_{\leqslant}$$

— полный спектр показателей Ляпунова системы (5) для произвольного допустимого мультипликативного возмущения $R(\cdot)$. Спектральное множество системы (1), отвечающее классу всевозможных мультипликативных возмущений, обозначаем $\lambda(\mathcal{R})$, а для произвольного $\delta>0$ положим $\lambda(\mathcal{R}_\delta)$ — спектральное множество системы (1), отвечающее классу допустимых мультипликативных возмущений $R(\cdot)$, удовлетворяющих оценке $\sup_{m\geqslant m_0}\|R(m)-E\|<\delta$.

Тогда из следствия 1 и леммы 2 получаем такое утверждение.

Следствие 2. *Множества $\lambda(\mathcal{Q})$ и $\lambda(\mathcal{R})$ совпадают. Для каждого $\delta>0$ имеют место включения $\lambda(\mathcal{Q}_\delta)\subset\lambda(\mathcal{R}_{a\delta})$, $\lambda(\mathcal{R}_\delta)\subset\lambda(\mathcal{Q}_{a\delta})$.*

Наша задача — исследовать спектральные множества $\lambda(\mathcal{R})$ и $\lambda(\mathcal{R}_\delta)$. В этой статье поставленная задача решается для случая, когда показатели Ляпунова системы (1) устойчивы.

Определение 4. Показатели Ляпунова системы (1) называются *устойчивыми*, если для каждого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что для всякой аддитивно возмущенной системы вида (2) из множества $\mathcal{Q}_\delta$ выполнены неравенства

$$|\lambda_i(A)-\lambda_i(A+Q)|<\varepsilon,\quad i=1,\ldots,n,$$

то есть имеет место включение $\lambda\big(\mathcal{Q}_\delta\big)\subset O_\varepsilon\big(\lambda(A)\big)$.

Определение 4 представляет собой непосредственный перенос на линейные системы с дискретным временем аналогичного определения для линейных систем с непрерывным временем (см., например, [3, с. 72]).

Из леммы 2 вытекает, что определение 4 эквивалентно следующему определению.

Определение 5. Показатели Ляпунова системы (1) называются *устойчивыми*, если для каждого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что для всякой мультипликативно возмущенной системы вида (5) из множества $\mathcal{R}_\delta$ выполнены неравенства

$$|\lambda_i(A)-\lambda_i(AR)|<\varepsilon,\quad i=1,\ldots,n,$$

то есть имеет место включение $\lambda\big(\mathcal{R}_\delta\big)\subset O_\varepsilon\big(\lambda(A)\big)$.

Пусть $X(m,s)$ — матрица Коши системы (1), то есть такое отображение $X:\mathbb{Z}_{m_0}\times\mathbb{Z}_{m_0}\to M_n(\mathbb{R})$, что для каждого решения $x(\cdot)$ этой системы имеет место равенство

$$x(m)=X(m,s)x(s)\quad\text{для всех } m\in\mathbb{Z}_{m_0},\ s\in\mathbb{Z}_{m_0}.$$

Тогда [2, с. 13–14]

$$X(m,s)=\begin{cases}\prod\limits_{l=s}^{m-1}A(l) & \text{при } m>s,\\ E & \text{при } m=s,\\ X^{-1}(s,m) & \text{при } m<s.\end{cases}$$

Здесь и всюду ниже полагаем $\prod\limits_{l=s}^{m-1} A(l)=A(m-1)A(m-2)\cdot\ldots\cdot A(s)$, то есть матрицы перемножаются в порядке убывания индекса.

По аналогии с системами с непрерывным временем, введем понятия центральных показателей системы (1). Эти показатели играют ключевую роль в поведении показателей Ляпунова при возмущениях коэффициентов системы (1).

Определение 6. *Верхним центральным показателем* (Винограда) системы (1) будем называть величину

$$\Omega(A)=\lim_{T\to\infty}\overline{\lim_{m\to\infty}}\frac{1}{mT}\sum_{j=m_0+1}^{m}\ln\big\|X\big(jT,(j-1)T\big)\big\|=\lim_{T\to\infty}\overline{\lim_{m\to\infty}}\frac{1}{mT}\sum_{j=m_0+1}^{m}\ln\Big\|\prod_{l=(j-1)T}^{jT-1}A(l)\Big\|,$$

младшим центральным показателем (Миллионщикова) — величину

$$\overline{\omega}(A)=\lim_{T\to\infty}\overline{\lim_{m\to\infty}}\frac{1}{lT}\sum_{j=m_0+1}^{m}\ln\big\|X\big((j-1)T,jT\big)\big\|^{-1}=\lim_{T\to\infty}\overline{\lim_{m\to\infty}}\frac{1}{mT}\sum_{j=m_0+1}^{m}\ln\Big\|\Big(\prod_{l=(j-1)T}^{jT-1}A(l)\Big)^{-1}\Big\|^{-1}.$$

Величины T и m здесь считаем пробегающими $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}_{m_0}$ соответственно.

Замечание 1. Понятие верхнего центрального показателя для систем с непрерывным временем было введено Р. Э. Виноградом в работе [4], а понятие младшего центрального показателя — В. М. Миллионщиковым в работе [5].

Определение 7. *Преобразованием Ляпунова* системы (1) называется линейное преобразование вида

$$z=L(m)x, \tag{6}$$

где матрица $L:\mathbb{Z}_{m_0}\to M_n(\mathbb{R})$ вполне ограничена. Матрица $L(\cdot)$ при этом называется *матрицей Ляпунова.*

Замечание 2. Преобразование (6) переводит систему (1) в систему

$$z(m+1)=L(m+1)x(m+1)=L(m+1)A(m)x(m)=L(m+1)A(m)L^{-1}(m)z(m) \tag{7}$$

с вполне ограниченной матрицей коэффициентов, сохраняя при этом такие асимптотические (при $m\to\infty$) характеристики системы, как полный спектр показателей Ляпунова, центральные показатели, свойство устойчивости и т.п.

Можно доказать, что для линейных систем с дискретным временем имеет место следующий критерий устойчивости показателей Ляпунова. Для систем с непрерывным временем он был установлен В. М. Миллионщиковым в работе [6] и Б. Ф. Быловым, Н. А. Изобовым в работе [7].

Теорема 1. *Показатели Ляпунова системы* (1) *устойчивы тогда и только тогда, когда существует преобразование Ляпунова* (6), *приводящее систему* (1) *к системе*

$$z(m+1)=D(m)z(m),\quad m\in\mathbb{Z}_{m_0},\ z\in\mathbb{R}^n, \tag{8}$$

с блочно-диагональной матрицей $D(m)=\operatorname{diag}\big(D_1(m),\ldots,D_p(m)\big)$, *обладающей следующими свойствами:*
1) *для каждого* $j\in\{1,\ldots,p\}$ *матрица* $D_j(m)$ *нижняя треугольная размерами* $n_j\times n_j$;
2) *имеют место равенства* $\Omega(D_j)=\overline{\omega}(D_j)=\Lambda_j,\ j=1,\ldots,p$;
3) *блоки* $D_1(\cdot),\ldots D_p(\cdot)$ *интегрально отделены, то есть существуют такие* $\alpha>1$ *и* $\gamma>0$, *что при всех* $m>s$ *и* $j\in\{1,\ldots,p-1\}$ *справедливы неравенства*

$$\Big\|\Big(\prod_{l=s}^{m-1}D_{j+1}(l)\Big)^{-1}\Big\|^{-1}\geqslant\gamma\alpha^{m-s}\Big\|\prod_{l=s}^{m-1}D_j(l)\Big\|.$$

Замечание 3. Из свойства 2) теоремы 1 вытекает (см. [6, 7]), что диагональные элементы $d_{ii}(m)$ матрицы $D(m)$ таковы, что при всех $j \in \{1, \ldots, p\}$ и $i \in n_j$

$$\overline{d_{ii}} \doteq \varlimsup_{m\to\infty} m^{-1} \sum_{l=m_0}^{m-1} \ln|d_{ii}(l)| = \Lambda_j;$$

запись $i \in n_j$ здесь и ниже означает, что $i \in \{n_0 + \ldots + n_{j-1} + 1, \ldots, n_0 + \ldots + n_j\}$, где $n_0 \doteq 0$.

Нас будет интересовать поведение решений нижних треугольных систем. Докажем сначала одно утверждение, касающееся скалярного линейного неоднородного уравнения

$$\varphi(m+1) = a(m)\varphi(m) + g(m), \quad m \in \mathbb{Z}_{m_0},\ \varphi \in \mathbb{R}, \tag{9}$$

где функция $a : \mathbb{Z}_{m_0} \to \mathbb{R}$ вполне ограничена. Положим $h(m) = \prod_{l=m_0}^{m-1} a(l)$ при $m > m_0$ и $h(m_0) = 1$.

Утверждение 1. *Общее решение уравнения* (9) *имеет вид*

$$\varphi(m;C) = h(m)\Big(C + \sum_{s=m_0}^{m-1} h^{-1}(s+1)g(s)\Big), \quad m \in \mathbb{Z}_{m_0},\ C \in \mathbb{R};$$

здесь считаем, что $\sum_{s=m_0}^{m-1} h^{-1}(s+1)g(s) = 0$ *при* $m = m_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что общее решение линейного однородного уравнения

$$\varphi(m+1) = a(m)\varphi(m), \quad m \in \mathbb{Z}_{m_0},\ \varphi \in \mathbb{R}, \tag{10}$$

имеет вид $\varphi_0(m;C) = h(m)C$, $m \in \mathbb{Z}_{m_0}$, $C \in \mathbb{R}$. Общее решение уравнения (9) есть сумма общего решения уравнения (10) и частного решения уравнения (9). Для поиска частного решения уравнения (9) воспользуемся методом вариации произвольной постоянной — это решение будем искать в виде $\varphi(m) = h(m)C(m)$, где $C : \mathbb{Z}_{m_0} \to \mathbb{R}$ — неизвестная функция. Пусть $C(m_0) = 0$. Докажем индукцией по $m > m_0$, что

$$C(m) = \sum_{s=m_0}^{m-1} h^{-1}(s+1)g(s). \tag{11}$$

Действительно, $\varphi(m_0) = 0$, $\varphi(m_0+1) = h(m_0+1)C(m_0+1)$ и, в силу (9), $\varphi(m_0+1) = a(m_0)\varphi(m_0) + g(m_0) = g(m_0)$, поэтому $C(m_0+1) = h^{-1}(m_0+1)g(m_0)$, то есть равенство (11) при $m = m_0 + 1$ выполнено.

Пусть равенство (11) установлено при некотором $m > m_0$. Докажем его для $m+1$. Так как

$$\varphi(m+1) = h(m+1)C(m+1) = a(m)\varphi(m)+g(m) = a(m)h(m)C(m)+g(m) = h(m+1)C(m)+g(m),$$

то

$$C(m+1) = C(m) + h^{-1}(m+1)g(m) = \sum_{s=m_0}^{m} h^{-1}(s+1)g(s).$$

Утверждение доказано.

Следствие 3. *Для каждого решения* $\varphi(\cdot)$ *уравнения* (9) *имеет место равенство*

$$\varphi(m) = h(m)\Big(\varphi(m_0) + \sum_{s=m_0}^{m-1} h^{-1}(s+1)g(s)\Big), \quad m \in \mathbb{Z}_{m_0}.$$

Рассмотрим теперь линейную однородную систему с дискретным временем

$$y(m+1)=F(m)y(m), \quad m\in\mathbb{Z}_{m_0},\ y\in\mathbb{R}^k, \tag{12}$$

с вполне ограниченной на $\mathbb{Z}_{m_0}$ нижней треугольной матрицей $F(m)=\{f_{ij}(m)\}_{i,j=1}^k$. Положим $h_i(m)=\prod\limits_{l=m_0}^{m-1}f_{ii}(l)$ при $m>m_0$ и $h_i(m_0)=1$.

Системе (12) поставим в соответствие систему

$$\varphi(m+1)=\widehat{F}(m)\varphi(m), \quad m\in\mathbb{Z}_{m_0},\ \varphi\in\mathbb{R}^k, \tag{13}$$

матрица $\widehat{F}$ которой имеет вид

$$\widehat{F}(m)=\begin{pmatrix} |f_{11}(m)| & 0 & \ldots & 0\\ 1 & |f_{22}(m)| & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & \ldots & |f_{kk}(m)| \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим также мультипликативно возмущенную по отношению к (12) систему

$$z(m+1)=F(m)\operatorname{diag}\bigl(e^{\mu_1},\ldots,e^{\mu_k}\bigr)z(m), \quad m\in\mathbb{Z}_{m_0},\ z\in\mathbb{R}^k. \tag{14}$$

Лемма 3. *Пусть $j\in\{1,\ldots,k\}$ фиксировано, $\varphi(\cdot)=\operatorname{col}\bigl(\varphi_1(\cdot),\ldots,\varphi_k(\cdot)\bigr)$ — решение системы (13) с начальным условием $\varphi(m_0)=e_j$. Тогда для произвольного набора чисел $\mu_1\geqslant\ldots\geqslant\mu_k$ координаты решения $z(\cdot)=\operatorname{col}\bigl(z_1(\cdot),\ldots,z_k(\cdot)\bigr)$ системы (14) с начальным условием $z(m_0)=e_j$ удовлетворяют оценкам*

$$|z_i(m)|\leqslant\alpha^{i-j}e^{\mu_j(m-m_0)}\varphi_i(m), \quad i\in\{1,\ldots,k\},\ m\in\mathbb{Z}_{m_0}, \tag{15}$$

где $\alpha\doteq\sup\{1;|f_{ij}(m)|,\ i,j=1,\ldots,k,\ m\in\mathbb{Z}_{m_0}\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем $j\in\{1,\ldots,k\}$. Найдем координаты $\varphi_i(\cdot)$ решения $\varphi(\cdot)$ системы (13), удовлетворяющего начальному условию $\varphi(m_0)=e_j$.

При всех $i\in\{1,\ldots,j-1\}$: $\varphi_i(m)\equiv0$. Координата $\varphi_j(\cdot)$ является решением задачи Коши $\varphi_j(m+1)=|f_{jj}(m)|\varphi_j(m)$, $\varphi_j(m_0)=1$, поэтому $\varphi_j(m)=|h_j(m)|,\quad m\in\mathbb{Z}_{m_0}$. А при $i>j$ координата $\varphi_i(\cdot)$ удовлетворяет линейному неоднородному уравнению

$$\varphi_i(m+1)=|f_{ii}(m)|\varphi_i(m)+\sum_{l=j}^{i-1}\varphi_l(m)$$

и начальному условию $\varphi_i(m_0)=0$, поэтому, в силу следствия 3, справедливо равенство

$$\varphi_i(m)=|h_i(m)|\sum_{s=m_0}^{m-1}|h_i^{-1}(s+1)|\sum_{l=j}^{i-1}\varphi_l(s), \quad m\in\mathbb{Z}_{m_0}.$$

Теперь будем доказывать оценки (15).

1) При $i\in\{1,\ldots,j-1\}$: $|z_i(m)|=\varphi_i(m)\equiv0$, и (15) выполнено.

2) Функция $z_j(\cdot)$ является решением задачи Коши $z_j(m+1)=f_{jj}(m)e^{\mu_j}z_j(m)$, $z_j(m_0)=1$, поэтому

$$z_j(m)=\prod_{l=m_0}^{m-1}f_{jj}(l)e^{\mu_j}=h_j(m)e^{\mu_j(m-m_0)}, \quad m\in\mathbb{Z}_{m_0},$$

$$|z_j(m)|=|h_j(m)|e^{\mu_j(m-m_0)}=\varphi_j(m)e^{\mu_j(m-m_0)},$$

и оценка (15) при $i=j$ обращается в точное равенство.

3) Пусть неравенство (15) доказано при всех $i \in \{j,\ldots,p-1\}$, где $p \in \{j+1,\ldots,k\}$. Докажем его для $i=p$. Функция $z_p(\cdot)$ является решением задачи Коши

$$z_p(m+1)=f_{pp}(m)e^{\mu_p}z_p(m)+\sum_{l=j}^{p-1} f_{pl}(m)e^{\mu_l}z_l(m), \quad z_p(m_0)=0,$$

поэтому, в силу следствия 3,

$$z_p(m)=h_p(m)e^{\mu_p(m-m_0)}\sum_{s=m_0}^{m-1} h_p^{-1}(s+1)e^{-\mu_p(s+1-m_0)}\sum_{l=j}^{p-1} f_{pl}(s)e^{\mu_l}z_l(s),$$

откуда

$$|z_p(m)| \leqslant |h_p(m)|e^{\mu_p(m-m_0)}\sum_{s=m_0}^{m-1} |h_p^{-1}(s+1)|e^{-\mu_p(s+1-m_0)}\sum_{l=j}^{p-1} |f_{pl}(s)|e^{\mu_l}|z_l(s)| \leqslant$$

$$\leqslant |h_p(m)|e^{\mu_p(m-m_0)}\sum_{s=m_0}^{m-1} |h_p^{-1}(s+1)|e^{-\mu_p(s+1-m_0)}\alpha\sum_{l=j}^{p-1} e^{\mu_l}\alpha^{l-j}e^{\mu_j(s-m_0)}\varphi_l(s) \leqslant$$

$$\leqslant |h_p(m)|e^{\mu_p(m-m_0)}\sum_{s=m_0}^{m-1} |h_p^{-1}(s+1)|e^{-\mu_p(s+1-m_0)}\alpha\cdot\alpha^{p-1-j}e^{\mu_j}e^{\mu_j(s-m_0)}\sum_{l=j}^{p-1}\varphi_l(s)=$$

$$=\alpha^{p-j}|h_p(m)|e^{\mu_p(m-m_0)}\sum_{s=m_0}^{m-1} |h_p^{-1}(s+1)|e^{(\mu_j-\mu_p)(s+1-m_0)}\sum_{l=j}^{p-1}\varphi_l(s) \leqslant$$

$$\leqslant \alpha^{p-j}|h_p(m)|e^{\mu_p(m-m_0)}e^{(\mu_j-\mu_p)(m-m_0)}\sum_{s=m_0}^{m-1} |h_p^{-1}(s+1)|\sum_{l=j}^{p-1}\varphi_l(s)=$$

$$=\alpha^{p-j}|h_p(m)|e^{\mu_j(m-m_0)}\sum_{s=m_0}^{m-1} |h_p^{-1}(s+1)|\sum_{l=j}^{p-1}\varphi_l(s)=\alpha^{p-j}e^{\mu_j(m-m_0)}\varphi_p(m), \quad m\in\mathbb{Z}_{m_0}.$$

Лемма доказана.

Пусть $F_0(\cdot)=\mathrm{diag}\big(f_{11}(\cdot),\ldots,f_{kk}(\cdot)\big)$ — матрица диагонального приближения для матрицы $F(\cdot)$ системы (12). Заметим, что

$$\Omega(F_0)=\lim_{T\to\infty}\varlimsup_{m\to\infty}\frac{1}{mT}\sum_{j=m_0+1}^{m}\ln\Big\|\prod_{l=(j-1)T}^{jT-1}F_0(l)\Big\|=\lim_{T\to\infty}\varlimsup_{m\to\infty}\frac{1}{mT}\sum_{j=m_0+1}^{m}\max_{i=1,\ldots,k}\sum_{l=(j-1)T}^{jT-1}\ln|f_{ii}(l)|,$$

$$\overline{\omega}(F_0)=\lim_{T\to\infty}\varlimsup_{m\to\infty}\frac{1}{mT}\sum_{j=m_0+1}^{m}\ln\Big\|\Big(\prod_{l=(j-1)T}^{jT-1}F_0(l)\Big)^{-1}\Big\|^{-1}=$$

$$=\lim_{T\to\infty}\varlimsup_{m\to\infty}\frac{1}{mT}\sum_{j=m_0+1}^{m}\min_{i=1,\ldots,k}\sum_{l=(j-1)T}^{jT-1}\ln|f_{ii}(l)|.$$

Аналогично случаю систем с непрерывным временем [8, с. 120–121], можно доказать, что центральные показатели треугольных систем и систем их диагонального приближения совпадают, поэтому в нашем случае $\Omega(F)=\Omega(\widehat{F})=\Omega(F_0)$, $\overline{\omega}(F)=\overline{\omega}(\widehat{F})=\overline{\omega}(F_0)$.

Теорема 2. *Пусть матрица $F(\cdot)$ системы (12) такова, что $\Omega(F_0)=\overline{\omega}(F_0)=\lambda$. Тогда для любого набора чисел $\mu_1\geqslant\ldots\geqslant\mu_k$ полный спектр показателей Ляпунова возмущенной системы (14) состоит из чисел $\lambda+\mu_k\leqslant\ldots\leqslant\lambda+\mu_1$.*

Доказательство. Из условий теоремы следует, что показатели Ляпунова системы (12) устойчивы, а ее полный спектр показателей Ляпунова состоит из k чисел λ. Такими же свойствами обладает и система (13). Отсюда вытекает, что показатель Ляпунова всякого нетривиального решения системы (13) равен числу λ. Кроме того, для всех $i \in \{1,\ldots,k\}$

$$\overline{f_{ii}} \doteq \varlimsup_{m\to\infty} m^{-1} \sum_{l=m_0}^{m-1} \ln|f_{ii}(l)| = \lambda.$$

Зафиксируем произвольное $j \in \{1,\ldots,k\}$ и рассмотрим решения $z(\cdot) = \operatorname{col}(z_1(\cdot),\ldots,z_k(\cdot))$ и $\varphi(\cdot) = \operatorname{col}(\varphi_1(\cdot),\ldots,\varphi_k(\cdot))$ систем (14) и (13) соответственно, удовлетворяющие начальным условиям $z(m_0) = \varphi(m_0) = e_j$. Тогда при всех $i \in \{1,\ldots,k\}$ справедливы неравенства $\lambda[\varphi_i] \leqslant \lambda[\varphi] = \lambda$. Найдем показатель Ляпунова функции $z(\cdot)$. Из леммы 3 получаем, что при всех $i \in \{1,\ldots,k\}$ имеют место оценки (15), поэтому

$$\lambda[z_i] = \lambda[|z_i|] = \lambda[e^{\mu_j(m-m_0)}] + \lambda[\varphi_i] \leqslant \mu_j + \lambda,$$

при этом

$$\lambda[z_j] = \lambda[e^{\mu_j(m-m_0)}] + \lambda[\varphi_j] = \mu_j + \lambda[|h_j(m)|] =$$

$$= \mu_j + \varlimsup_{m\to\infty} m^{-1} \ln|h_j(m)| = \mu_j + \varlimsup_{m\to\infty} m^{-1} \ln \prod_{l=m_0}^{m-1} |f_{jj}(l)| = \mu_j + \overline{f_{jj}} = \mu_j + \lambda.$$

Следовательно,

$$\lambda[z] = \max_{i=1,\ldots,k} \lambda[z_i] = \lambda + \mu_j.$$

Построим фундаментальную систему решений $Z(\cdot) = \{z^1(\cdot),\ldots,z^k(\cdot)\}$ системы (14), такую, что $z^j(m_0) = e_j$, $j = 1,\ldots,k$. Тогда $\lambda[z^j] = \lambda + \mu_j$, причем этот показатель реализуется j-й координатой решения $z^j(\cdot)$. Докажем, что $Z(\cdot)$ несжимаема [2, с. 55], то есть для любой нетривиальной линейной комбинации $\sum_{j=1}^k \gamma_j z^j(\cdot)$ входящих в $Z(\cdot)$ решений имеет место равенство

$$\lambda\Big[\sum_{j=1}^k \gamma_j z^j\Big] = \max_{j\colon \gamma_j \neq 0} \lambda[z^j].$$

Пусть $\gamma = \operatorname{col}(\gamma_1,\ldots,\gamma_k) \in \mathbb{R}^k$ — произвольный ненулевой вектор, и $l \in \{1,\ldots,k\}$ — наименьший индекс, для которого $\gamma_l \neq 0$. Рассмотрим

$$z(m) = Z(m)\gamma = \sum_{j=1}^k \gamma_j z^j(m) = \sum_{j=l}^k \gamma_j z^j(m).$$

Тогда

$$\lambda[z] \leqslant \max_{j=l,\ldots,k} \lambda[z^j] = \lambda + \mu_l.$$

С другой стороны, фундаментальная матрица $Z(\cdot)$ нижняя треугольная (см. доказательство леммы 3), поэтому l-я координата $z_l^j(\cdot)$ решения $z^j(\cdot)$ равна тождественно нулю при всех $j > l$, и для l-й координаты функции $z(\cdot)$ справедливо равенство

$$z_l(m) = \sum_{j=l}^k \gamma_j z_l^j(m) = \gamma_l z_l^l(m), \quad m \in \mathbb{Z}_{m_0}.$$

Тогда $\lambda[z] \geqslant \lambda[z_l] = \lambda[z_l^l] = \lambda + \mu_l$. Следовательно,

$$\lambda[z] = \lambda + \mu_l = \max_{j\colon \gamma_j \neq 0} \lambda[z^j].$$

Итак, фундаментальная система решений $Z(\cdot)$ несжимаема. Но тогда в силу теоремы Ляпунова о нормальности [2, с. 55–56] фундаментальная система $Z(\cdot)$ нормальна [2, с. 53], а потому реализует полный спектр показателей Ляпунова системы (14). Следовательно, полный спектр этой системы состоит из чисел $\lambda + \mu_k,\ldots,\lambda + \mu_1$. Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть показатели Ляпунова системы* (1) *устойчивы. Тогда спектральное множество* $\lambda(\mathcal{R})$ *системы* (1) *при всевозможных допустимых мультипликативных возмущениях ее коэффициентов совпадает со множеством* $\mathbb{R}^n_{\leqslant}$ *всех упорядоченных по возрастанию наборов из* n *чисел, при этом для каждого* $\Delta > 0$ *найдется такое* $\ell = \ell(\Delta) > 0$*, что для любого* $\delta \in (0, \Delta)$ *имеет место включение* $O_\delta\big(\lambda(A)\big) \subset \lambda(\mathcal{R}_{\ell\delta})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В соответствии с теоремой 1 построим преобразование Ляпунова (6), приводящее систему (1) к виду (8). Из (7) и (8) следует, что

$$D(m) = L(m+1)A(m)L^{-1}(m). \tag{16}$$

Пусть $\Delta > 0$ фиксировано. Выберем произвольное $\delta \in (0, \Delta)$ и произвольный набор чисел $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n) \in O_\delta\big(\lambda(A)\big)$ и обозначим $\mu_j = \nu_j - \lambda_j(A)$, $j \in \{1, \ldots, n\}$. Тогда $|\mu_j| < \delta$ при всех j. Зафиксируем $i \in \{1, \ldots, p\}$. Для каждого $i \in n_j$ имеет место равенство $\mu_j = \nu_j - \Lambda_i(A)$, поэтому числа μ_j, $j \in n_i$, упорядочены по возрастанию. Упорядочим их по убыванию и полученный набор чисел обозначим η_j, $j \in n_i$. Пусть H_i — диагональная $n_i \times n_i$-матрица, диагональные элементы которой совпадают с e^{η_j}, $j \in n_i$. Тогда матрица $H \doteq \operatorname{diag}\big(e^{\eta_1}, \ldots, e^{\eta_n}\big)$ совпадает с блочно-диагональной матрицей $\operatorname{diag}(H_1, \ldots, H_p)$. Рассмотрим мультипликативно возмущенную по отношению к (8) систему

$$\psi(m+1) = D(m)H\psi(m), \quad m \in \mathbb{Z}_{m_0},\ \psi \in \mathbb{R}^n. \tag{17}$$

Это система с блочно-диагональной матрицей, диагональные блоки которой — нижние треугольные матрицы $D_i(m)H_i$, $i = 1, \ldots, p$. Рассмотрим фундаментальную систему решений $\Psi(\cdot) = \{\psi^1(\cdot), \ldots, \psi^n(\cdot)\}$ системы (17), такую, что $\Psi(m_0) = E$. Так как матрица системы (17) блочно-нижнетреугольная, то такую же структуру имеет и $\Psi(\cdot)$. Из доказательства теоремы 2 следует, что $\lambda[\psi^j] = \eta_j + \Lambda_i(A) \doteq \beta_j$, $j \in n_i$, $i \in \{1, \ldots, p\}$. Заметим, что набор чисел $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ совпадает с набором $\{\nu_1, \ldots, \nu_n\}$, но второй набор упорядочен по возрастанию. Кроме того, для каждого $i \in \{1, \ldots, p\}$ набор $\{\beta_j\}_{j \in n_i}$ совпадает с набором $\{\nu_j\}_{j \in n_i}$, но первый упорядочен по убыванию, а второй по возрастанию. Отсюда следует, что $\max\limits_{j \in n_{i-1}} \beta_j \leqslant \min\limits_{j \in n_i} \beta_j$ при всех $i \in \{2, \ldots, p\}$.

Докажем несжимаемость $\Psi(\cdot)$. Из нее будет следовать нормальность $\Psi(\cdot)$ и то, что полный спектр показателей Ляпунова возмущенной системы (17) состоит из чисел $\nu_1 \leqslant \ldots \leqslant \nu_n$.

Действительно, рассмотрим произвольную нетривиальную линейную комбинацию входящих в $\Psi(\cdot)$ решений: $\psi(\cdot) = \sum\limits_{j=1}^{n} \gamma_j \psi^j(\cdot)$. Пусть $k \in \{1, \ldots, n\}$ — произвольно, причем $k \in n_i$. Обозначим $I_k \doteq \{j \in n_i : j \leqslant k\}$. Так как $\Psi(\cdot)$ блочно-нижнетреугольная, то для k-й координаты решения $\psi(\cdot)$ имеем равенство $\psi_k(\cdot) = \sum\limits_{j \in I_k} \gamma_j \psi^j_k(\cdot)$, откуда $\lambda[\psi_k] \leqslant \max\limits_{j \in I_k} \lambda[\psi^j_k] \leqslant \max\limits_{j \in I_k} \lambda[\psi^j]$. Пусть $s \in \{1, \ldots, n\}$ — наибольший индекс, для которого $\gamma_s \neq 0$, и пусть $s \in n_{i_0}$. Найдем наименьший индекс $l \in n_{i_0}$, для которого $\gamma_l \neq 0$. Тогда $\max\limits_{j\colon \gamma_j \neq 0} \lambda[\psi^j] = \beta_l$. Для доказательства несжимаемости $\Psi(\cdot)$ надо установить, что $\lambda[\psi] = \beta_l$. В самом деле, $\lambda[\psi_k] \leqslant \max\limits_{j \in n_{i_0 - 1}} \beta_j \leqslant \beta_l$ при всех $k \in \{1, \ldots, l-1\}$. Для координаты $\psi_l(\cdot)$ справедливы равенства $\psi_l(\cdot) = \sum\limits_{j \in I_l} \gamma_j \psi^j_l(\cdot) = \gamma_l \psi^l_l(\cdot)$, поэтому $\lambda[\psi_l] = \lambda[\gamma_l \psi^l_l] = \lambda[\psi^l_l] = \beta_l$. Наконец, при $k \in \{l+1, \ldots, s\}$: $\lambda[\psi_k] \leqslant \max\limits_{j \in I_k\colon \gamma_j \neq 0} \lambda[\psi^j] = \beta_l$. Следовательно, $\lambda[\psi] = \max\limits_{k=1,\ldots,n} \lambda[\psi_k] = \beta_l$. Таким образом, фундаментальная система решений $\Psi(\cdot)$ несжимаема, и полный спектр системы (17) состоит из чисел $\nu_1 \leqslant \ldots \leqslant \nu_n$.

К системе (17) применим обратное преобразование Ляпунова $\psi = L(m)y$. Тогда, с учетом равенства (16),

$$y(m+1) = L^{-1}(m+1)\psi(m+1) = L^{-1}(m+1)D(m)H\psi(m) =$$

$$= L^{-1}(m+1)L(m+1)A(m)L^{-1}(m)H\psi(m) =$$
$$= A(m)L^{-1}(m)H\psi(m) = A(m)L^{-1}(m)HL(m)y(m),\ m \in \mathbb{Z}_{m_0}.$$

Положим

$$R(m) = L^{-1}(m)HL(m), \quad m \in \mathbb{Z}_{m_0}. \tag{18}$$

Из полной ограниченности матрицы Ляпунова $L(\cdot)$ и невырожденности H вытекает полная ограниченность матрицы $R(\cdot)$. Таким образом, имеем допустимо мультипликативно возмущенную по отношению к (1) систему вида (5). Так как преобразование Ляпунова сохраняет полный спектр, то показатели Ляпунова построенной системы (5) — это набор чисел $\nu_1 \leqslant \ldots \leqslant \nu_n$.

Пусть $l \doteq \sup\limits_{m\geqslant m_0} \bigl(\|L(m)\| + \|L^{-1}(m)\|\bigr)$. Обозначим $\ell = \ell(\Delta) = l^2(e^{\Delta}-1)/\Delta$. Докажем, что построенная мультипликативно возмущенная система (5) принадлежит классу $\mathcal{R}_{\ell\delta}$. Действительно, из равенства (18) получаем, что $R(m)-E = L^{-1}(m)\bigl(H-E\bigr)L(m)$, поэтому $\sup\limits_{m\geqslant m_0} \|R(m)-E\| \leqslant l^2\|H-E\|$. Далее, $\|H-E\| = \max\limits_{j=1,\ldots,n} |e^{\eta_j}-1| = \max\limits_{j=1,\ldots,n} |e^{\mu_j}-1| \leqslant \max\limits_{j=1,\ldots,n} \bigl(e^{|\mu_j|}-1\bigr) < e^{\delta}-1$. Заметим, что функция $f(t) = (e^t-1)/t$ строго возрастает на множестве $t>0$. Поэтому для каждого $\delta \in (0,\Delta)$ имеем неравенство $\bigl(e^{\delta}-1\bigr)/\delta < \bigl(e^{\Delta}-1\bigr)/\Delta$, откуда $e^{\delta}-1 < \dfrac{e^{\Delta}-1}{\Delta}\delta$. Следовательно,

$$\sup_{m\geqslant m_0} \|R(m)-E\| < l^2\frac{e^{\Delta}-1}{\Delta}\delta = \ell\delta.$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Демидович В.Б. Об одном признаке устойчивости разностных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5. № 7. С. 1247–1255.
2. Гайшун И.В. Системы с дискретным временем. Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2001. 400 с.
3. Изобов Н.А. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Математический анализ. М.: ВИНИТИ, 1974. Т. 12. С. 71–146.
4. Виноград Р.Э. О центральном характеристическом показателе системы дифференциальных уравнений // Математический сборник. 1957. Т. 42. № 2. С. 207–222.
5. Миллионщиков В.М. Доказательство достижимости центральных показателей линейных систем // Сибирский математический журнал. 1969. Т. 10. № 1. С. 99–104.
6. Миллионщиков В.М. Грубые свойства линейных систем дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5. № 10. С. 1775–1784.
7. Былов Б.Ф., Изобов Н.А. Необходимые и достаточные условия устойчивости характеристических показателей линейной системы // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5. № 10. С. 1794–1803.
8. Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова. М.: Наука, 1966. 576 с.

Поступила в редакцию 01.02.2016

Банщикова Ирина Николаевна, аспирант, кафедра дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1;
ассистент, кафедра высшей математики, Ижевская государственная сельскохозяйственная академия, 426069, Россия, г. Ижевск, ул. Студенческая, 11.
E-mail: banshhikova.irina@mail.ru

Попова Светлана Николаевна, д. ф.-м. н., зав. кафедрой дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1;
ведущий научный сотрудник, отдел динамических систем, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
E-mail: ps@uni.udm.ru

МАТЕМАТИКА 2016. Т. 26. Вып. 1

I. N. Banshchikova, S. N. Popova

On the spectral set of a linear discrete system with stable Lyapunov exponents

Keywords: discrete time-varying linear system, Lyapunov exponents, perturbations of coefficients.

MSC: 39A06, 39A30

Let us fix a certain class of perturbations of the coefficient matrix $A(\cdot)$ for a discrete time-varying linear system

$$x(m+1)=A(m)x(m),\quad m\in\mathbb{Z},\quad x\in\mathbb{R}^n,$$

where $A(\cdot)$ is completely bounded on $\mathbb{Z}$, i.e., $\sup_{m\in\mathbb{Z}}\bigl(\|A(m)\|+\|A^{-1}(m)\|\bigr)<\infty$. The spectral set of this system, corresponding to a given class of perturbations, is a collection of all Lyapunov spectra (with multiplicities) for perturbed systems, when the perturbations range over this class all. The main attention is paid to the class $\mathcal{R}$ of perturbed systems

$$y(m+1)=A(m)R(m)y(m),\quad m\in\mathbb{Z},\quad y\in\mathbb{R}^n,$$

where $R(\cdot)$ is completely bounded on $\mathbb{Z}$, as well as its subclasses $\mathcal{R}_\delta$, where $\sup_{m\in\mathbb{Z}}\|R(m)-E\|<\delta$, $\delta>0$. For an original system with stable Lyapunov exponents, we prove that the spectral set $\lambda(\mathcal{R})$ of class $\mathcal{R}$ coincides with the set of all ordered ascending sets of n numbers. Moreover, for any $\Delta>0$ there exists an $\ell=\ell(\Delta)>0$ such that for any $\delta<\Delta$ the spectral set $\lambda(\mathcal{R}_{\ell\delta})$ contains the δ-neighborhood of the Lyapunov spectrum of the unperturbed system.

REFERENCES

1. Demidovich V.B. On a criterion of stability for difference equations, *Differ. Uravn.*, 1969, vol. 5, no. 7, pp. 1247–1255 (in Russian).
2. Gaishun I.V. *Sistemy s diskretnym vremenem* (Discrete-time systems), Minsk: Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, 2001, 400 p.
3. Izobov N.A. Linear systems of ordinary differential equations, *Journal of Soviet Mathematics*, 1976, vol. 5, issue 1, pp. 46–96.
4. Vinograd R.E. On the central characteristic exponent of a system of differential equations, *Mat. Sb. (N. S.)*, 1957, vol. 42, no. 2, pp. 207–222 (in Russian).
5. Millionshchikov V.M. Proof of attainability of central exponents of linear systems, *Sib. Mat. Zh.*, 1969, vol. 10, no. 1, pp. 99–104 (in Russian).
6. Millionshchikov V.M. Robust properties of linear systems of differential equations, *Differ. Uravn.*, 1969, vol. 5, no. 10, pp. 1775–1784 (in Russian).
7. Bylov B.F., Izobov N.A. Necessary and sufficient conditions for stability of characteristic exponents of linear system, *Differ. Uravn.*, 1969, vol. 5, no. 10, pp. 1794–1803 (in Russian).
8. Bylov B.F., Vinograd R.E., Grobman D.M., Nemytskii V.V. *Teoriya pokazatelei Lyapunova* (Theory of Lyapunov exponents), Moscow: Nauka, 1966, 576 p.

Received 01.02.2016

Banshchikova Irina Nikolaevna, Post-Graduate Student, Department of Differential Equations, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia;
Assistant Lecturer, Department of Higher Mathematics, Izhevsk State Agricultural Academy, ul. Studencheskaya, 11, Izhevsk, 426069, Russia.
E-mail: banshhikova.irina@mail.ru

Popova Svetlana Nikolaevna, Doctor of Physics and Mathematics, Head of the Department of Differential Equations, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia;
Leading Researcher, Department of Dynamical Systems, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia.
E-mail: ps@uni.udm.ru