МАТЕМАТИКА 2016. Т. 26. Вып. 1

УДК 517.977

© *А. Л. Багно, А. М. Тарасьев*

СВОЙСТВА ФУНКЦИИ ЦЕНЫ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С БЕСКОНЕЧНЫМ ГОРИЗОНТОМ [1]

В статье исследуются свойства функции цены задачи оптимального управления на бесконечном горизонте с неограниченным подынтегральным индексом, входящим в функционал качества с дисконтирующим множителем. Выводится оценка аппроксимации функции цены в задаче с бесконечным горизонтом значениями функции цены в задачах с удлиняющимся конечным горизонтом. Выявляется структура функции цены через значения стационарной функции цены, зависящей только от фазовой переменной. Дается описание асимптотики роста значений функции цены для функционалов качества различного вида, принятых в экономическом и финансовом моделировании: логарифмических, степенных, экспоненциальных, линейных. Устанавливается свойство непрерывности функции цены и выводятся оценки гёльдеровских параметров непрерывности. Полученные оценки необходимы для разработки сеточных алгоритмов построения функций цены в задачах оптимального управления с бесконечным горизонтом.

Ключевые слова: оптимальное управление, бесконечный горизонт, функция цены, оценка модуля непрерывности, асимптотические свойства.

DOI: 10.20537/vm160101

Введение

В некоторых приложениях теории оптимального управления встречаются задачи, в которых течение процесса неограниченно. Задачи такого типа возникают, например, при изучении стабилизации движения и в математической экономике.

В статье исследуются свойства функции цены задачи оптимального управления неограниченной продолжительности (с бесконечным горизонтом), функционал качества которой содержит дисконтирующий множитель, а также индекс качества процесса, который может неограниченно расти с течением времени. Подобные задачи рассматривались в работах И. Ц. Капуццо Дольчетта [1], А. И. Субботина [7] и Р. А. Адиатуллиной и А. М. Тарасьева [3]. Однако в них изучался случай, когда подынтегральный индекс качества процесса является ограниченной функцией. В статье М. С. Никольского [2] исследовались свойства функции цены для функционалов качества с подлинейным ростом.

В этой работе продолжены исследования свойств функций цены в задачах оптимального управления с бесконечным горизонтом для функционалов качества логарифмического, степенного, экспоненциального и линейного вида (см. [4]). Обсуждается вопрос о возможности аппроксимации функции цены в задаче с бесконечным горизонтом значениями функций цены задач с удлиняющимся конечным горизонтом и получены оценки аппроксимации. Дается описание структуры функции цены, базис которой составляет стационарная функция цены, зависящая только от фазовой переменной. Изучаются свойства асимптотического роста функций цены для функционалов качества различного типа. Исследуется непрерывность функций цены в задаче с бесконечным горизонтом и строятся оценки для гёльдеровских параметров непрерывности. Следует отметить, что полученные оценки могут служить основой для обоснования оценок точности аппроксимационных сеточных методов построения функции цены в задачах управления с бесконечным горизонтом.

[1] Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 15–11–10018.

§ 1. Динамика системы и функционал качества

В статье рассматривается стационарная управляемая система

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad t \in [t_0, +\infty), \tag{1.1}$$

с начальным условием $x(t_0) = 0$, где $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in P \subset \mathbb{R}^p$, множество P — компакт.

Функционал качества задается равенством

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_{t_0}^{+\infty} e^{-\lambda\tau} g(x(\tau), u(\tau))\, d\tau, \qquad \lambda > 0, \quad t_0 > 0. \tag{1.2}$$

Ставится задача максимизации функционала $J(x(\cdot), u(\cdot))$ (1.2) на траекториях $(x(\cdot), u(\cdot))$ управляемой системы (1.1). Предполагается, что выполнены следующие условия.

1. Функции f и g непрерывны по совокупности переменных на $\mathbb{R}^n \times P$.

2. Для любых $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ при любом p справедливы соотношения Липшица по аргументу x

$$\|f(x_1, p) - f(x_2, p)\| \leqslant L\|x_1 - x_2\|, \qquad |g(x_1, p) - g(x_2, p)| \leqslant L\|x_1 - x_2\|,$$

где L — общая константа Липшица для функций f и g.

3. Для любых x, p выполняется условие подлинейного роста по аргументу x:

$$\|f(x, p)\| \leqslant \varkappa(1 + \|x\|), \tag{1.3}$$

где $\varkappa$ — положительная константа.

§ 2. Структура функции цены

Введем новую координату $y = y(t)$ для функционала платы:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x(t), u(t)) \\ e^{-\lambda t} g(x(t), u(t)) \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим фиксированный отрезок времени $[t_0, T]$. Пусть $\{\Delta_k(\tau_i)\}$ — разбиение этого отрезка. Согласно [5] *ломаной Эйлера* называется абсолютно непрерывная функция $\Delta z_k(\cdot) = (\Delta x_k(\cdot), \Delta y_k(\cdot))$, являющаяся решением уравнения

$$\Delta z_k(t) = z_k^0 + \left(\int_{t_0}^{t} f(\Delta x_k(\tau), u_k(\tau))\, d\tau, \int_{t_0}^{t} e^{-\lambda\tau} g(\Delta x_k(\tau), u_k(\tau))\, d\tau\right), \quad t \in [t_0, T].$$

Движением по [5] называется функция, отображающая $[t_0, +\infty)$ в $\mathbb{R}^{m+1}$, для которой при любом t из отрезка времени существует последовательность ломаных Эйлера $\{\Delta z_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$, равномерно сходящаяся к этой функции при стремлении максимума диаметров разбиения $\max\limits_k \{\Delta_k(\tau_i)\}$ к нулю.

Через $\Delta z_k^*(t)$ обозначим ломаную Эйлера $(\Delta x_k^*(t),\ \Delta y_k^*(t))$, где

$$(\Delta x_k^*(t),\ \Delta y_k^*(t)) = (\Delta x_k(t + t_0),\ (\Delta y_k(t + t_0) - \Delta y_k(t_0))e^{\lambda t_0}).$$

Через $z^*(t)$ обозначим движение $(x^*(t),\ y^*(t))$, где

$$(x^*(t),\ y^*(t)) = (x(t + t_0),\ (y(t + t_0) - y(t_0))e^{\lambda t_0}).$$

Лемма 1. *Для любого момента времени $t_0 \in [0, +\infty)$ функция $z(t)$, где $t \in [t_0, T]$, представима в виде*

$$z(t) = (x^*(t - t_0), y_0 + e^{-\lambda t_0} y^*(t - t_0)).$$

Также верно и обратное. Для любого момента времени $t_0 \in [0, +\infty)$ функция $z^*(t) = (x^*,\ y^*)$ представима в виде

$$z^*(t) = (x(t + t_0),\ (y(t + t_0) - y_0)e^{\lambda t_0}).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $0 \leqslant t_0 < T < +\infty$. По определению ломаной Эйлера для движения $z(\cdot)$ существует равномерно сходящаяся к нему последовательность $\{\Delta z_k(\cdot)\}_1^\infty$ такая, что

$$\Delta x_k(t) = \Delta x_k(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(\Delta x_k(\tau), u_k(\tau))\, d\tau,$$

$$\Delta y_k(t) = \Delta y_k(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-\lambda\tau} g(x_k(\tau), u_k(\tau))\, d\tau.$$

Сделаем под интегралом замену $s = \tau - t_0$. Тогда наши выражения примут вид

$$\Delta x_k(t + t_0) = \Delta x_k(t_0) + \int_{0}^{t} f(\Delta x_k(s + t_0), u_k(s + t_0))\, ds,$$

$$\Delta y_k(t + t_0) = \Delta y_k(t_0) + e^{-\lambda t_0} \int_{0}^{t} e^{-\lambda s} g(x_k(s + t_0), u_k(s + t_0))\, ds.$$

Мы получим вектор

$$(\Delta x_k^*(t),\ \Delta y_k^*(t)) = \Delta z_k^*(t).$$

Можно увидеть, что выражение для $\Delta z_k^*(t)$ представляет собой ломаную Эйлера с начальным условием $\Delta z_k^*(0) = (\Delta x_k^*(t_0), 0)$. Кроме того, последовательность $\{\Delta z_k^*(\cdot)\}_1^\infty$ равномерно сходится к $z^*(\cdot) = (\Delta x(t + t_0),\ (\Delta y(t + t_0) - \Delta y_0)e^{\lambda t_0})$, что следует из выбора ломаной Эйлера $\{\Delta z_k^*(\cdot)\}_1^\infty$ и ее построения.

В обратную сторону доказательство проводится аналогично. Коротко опишем его. По определению ломаной Эйлера записывается последовательность, равномерно сходящаяся к движению $z^*(\cdot)$. В полученном выражении под интегралом можно сделать замену $s = \tau + t_0$. В результате получим выражение, которое представляет собой ломаную Эйлера для $\Delta z_k(\cdot)$. Осталось заметить, что последовательность $\{\Delta z_k(\cdot)\}_1^\infty$ равномерно сходится к $z(\cdot)$. Это завершает доказательство леммы. □

Лемма 2. *Пусть $0 < T < \theta < +\infty$. Для любого движения $z(\cdot)$, для каждого интервала времени $[T, \theta)$ справедливо неравенство*

$$|\Delta y_k(T) - \Delta y_k(\theta)| \leqslant \frac{K(T)e^{-\lambda T}}{\lambda},$$

где $K(T)$ — положительная константа, которая зависит, вообще говоря, от временного параметра T.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Опираясь на определение движения (см. [5, с. 33, 34]), мы можем заключить, что функции $x(t)$, $y_k(t)$ непрерывны и содержатся в компактном множестве решений на ограниченном интервале времени. Для доказательства леммы достаточно показать, что

$$|y_k(T) - y_k(\theta)| \leqslant \frac{K(T)(e^{-\lambda T} - e^{-\lambda\theta})}{\lambda}.$$

Из определения ломаной Эйлера следует, что

$$\Delta y_k(\theta) = \Delta y_k(T) + \int_{T}^{\theta} e^{-\lambda\tau} g(x_k(\tau), u_k(\tau))\, d\tau.$$

При конечных значениях t функция $g(x(\cdot), u(\cdot))$ будет ограничена: $|g(x(t), u(t))| \leqslant K(T)$. Отсюда следует, что при конечных значениях x справедлива оценка

$$|\Delta y_k(T) - \Delta y_k(\theta)| \leqslant \int_{T}^{\theta} K(T)e^{-\lambda\tau}\, d\tau = \frac{K(T)(e^{-\lambda T} - e^{-\lambda\theta})}{\lambda}. \tag{2.1}$$

Лемма доказана. □

Для доказательства следующей леммы нам потребуются дополнительные свойства функции g и ее первых частных производных.

1. Функция g дважды непрерывно дифференцируема.

2. Частные производные функции g удовлетворяют неравенству

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x_1}, \frac{\partial g}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial g}{\partial x_n}\right) > 0,$$

то есть g строго монотонно возрастает по каждому x_i.

3. Матрица вторых производных функции g отрицательно определена:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} < 0.$$

Из отрицательной определенности матрицы вторых производных следует, что функция g строго вогнута по совокупности переменных и, следовательно, строго вогнута по каждой переменной в отдельности.

4. Функция g удовлетворяет неравенству

$$|g(x,u)| \leqslant c_1(1 + \|x\|), \tag{2.2}$$

где $c_1 \geqslant 1$.

Лемма 3. *Пусть $0 < T < \theta < +\infty$ и $\varkappa < \lambda$. Для любого движения $z(\cdot)$ существует конечный предел $\lim\limits_{\theta\to+\infty} y(\theta)$, причем $\lim\limits_{\theta\to+\infty} y(\theta) = 0$.*

Доказательство. Действительно, согласно (1.3) и (2.2) имеем

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-\lambda t} g(x(t), u(t)) \leqslant \lim_{t\to+\infty} e^{-\lambda t} c_1(1 + \|x(t)\|) \leqslant$$
$$\leqslant \lim_{t\to+\infty} e^{-\lambda t} c_1(1 + e^{\varkappa t}) = \lim_{t\to+\infty} c_1 e^{\varkappa t} + \lim_{t\to+\infty} c_1 e^{(\varkappa-\lambda)t} = 0.$$

Таким образом, соотношения (2.1) можно распространить и на случай $x(t) = +\infty$. Так как последовательность $\{\Delta z_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$ равномерно сходится к $y(\cdot)$, то существует конечный предел $\lim\limits_{\theta\to+\infty} y(\theta)$. Что и требовалось доказать. □

Особый интерес представляют частные случаи, встречающиеся в моделях экономического роста (см., например, [4, с. 167], и [6, с. 109]), когда функция g принимает следующий вид:

1) $g(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i$;

2) $g(x) = -k \exp\left(-\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i\right)$, где $k > 0$, $a_i > 0$;

3) $g(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \ln x_i$, где $a_i > 0$;

4) $g(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{a_i}{1-b_i} x_i^{1-b_i}$, где $0 < b_i < 1$, $a_i > 0$.

Определим, при каких условиях в каждом из этих случаев интеграл (1.2) будет сходиться и какой вид будет принимать параметр $K(T)$, ограничивающий сверху функцию $g(x)$.

Действуя по аналогии с доказательством леммы, мы можем считать, что координаты $x_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, имеют порядок $e^{\varkappa t}$. Тогда выражение (1.2) в первом случае примет вид

$$J = \int_{t_0}^{+\infty} g(x) e^{-\lambda\tau}\, d\tau = \int_{t_0}^{+\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i e^{(\varkappa-\lambda)\tau}\, d\tau.$$

Легко увидеть, что полученный интеграл сходится при $\varkappa < \lambda$, где $i = 1, \ldots, n$, а для функции $g(x)$ справедлива оценка

$$g(x) < Ae^{\varkappa T}. \tag{2.3}$$

Здесь и в следующих трех случаях A и $\varkappa$ — положительные константы.

Во втором случае мы получим выражение

$$J = -k \int_{t_0}^{+\infty} e^{-\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \varkappa \tau} e^{-\lambda\tau}\, d\tau.$$

Здесь интеграл сходится при любых $\varkappa$ и λ, а функция ограничена значением

$$g(x) < -ke^{-Ae^{\varkappa T}}. \tag{2.4}$$

В третьем случае мы имеем

$$J = \int_{t_0}^{+\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i \ln(e^{\varkappa\tau}) e^{-\lambda\tau}\, d\tau.$$

Интеграл также сходится при любых $\varkappa$ и λ, а функция $g(x)$ ограничена:

$$g(x) < \varkappa T. \tag{2.5}$$

Наконец, в последнем случае мы получим

$$J = \int_{t_0}^{+\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{1-b_i} (e^{\varkappa\tau})^{1-b_i} e^{-\lambda\tau}\, d\tau.$$

Данный интеграл сходится при $\varkappa(1-b_i) < \lambda$, $i = 1, \ldots, n$, а для функции $g(x)$ справедлива оценка

$$g(x) < Ae^{\varkappa T}. \tag{2.6}$$

Теперь введем определение функции цены согласно [1]. Пусть $u_T(\cdot)$ — измеримое по Лебегу программное управление на конечном интервале. Множество программных управлений на конечном интервале обозначим символом U_T.

Определение 1. *Функцией цены в задаче с конечным горизонтом* для начальной позиции (t_0, z_0), где $t_0 \in (0, T)$, $z_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $y_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = e^{-\lambda t_0} g(x_0, u(t_0))$, называется величина

$$\omega_T(t_0, z_0) = \inf_{u_T \in U_T} \left(y_0 + \int_{t_0}^{T} e^{-\lambda\tau} g(x(\tau), u(\tau))\, d\tau \right). \tag{2.7}$$

Также нам потребуется определение функции цены в задаче с бесконечным горизонтом. Пусть $u(\cdot)$ — измеримое по Лебегу программное управление на бесконечном интервале. Множество измеримых по Лебегу программных управлений на бесконечном интервале обозначим символом U.

Определение 2. *Функцией цены в задаче с бесконечным горизонтом* для начальной позиции (t_0, z_0), где $t_0 \in (0, T)$, $z_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $y_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = e^{-\lambda t_0} g(x_0, u(t_0))$, называется величина

$$\omega(t_0, z_0) = \inf_{u \in U} \lim_{T \to +\infty} \left(y_0 + \int_{t_0}^{T} e^{-\lambda\tau} g(x(\tau), u(\tau))\, d\tau \right).$$

Перейдем к доказательству некоторых свойств функций цены.

Лемма 4. *Функцию цены ω_T можно представить в виде*

$$\omega_T(t, z) = y + e^{-\lambda t} \omega_{T-t}(0, x, 0), \quad \text{где } z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ t \in (0, T).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $0 < t_0 < T < +\infty$ и $z_0 = (x_0, y_0)$. По определению функции цены (2.7) и лемме 1 имеем

$$\omega_T(t_0, z_0) = \inf_{u \in U} y(T) = y_0 + e^{-\lambda t_0} \inf_{u^* \in U^*} y^*(T - t_0) = y_0 + e^{\lambda t_0} \omega_{T-t_0}(0, x_0, 0).$$

Лемма доказана. □

Лемма 5. *Для любых x_1 и x_2 функция цены ω_T удовлетворяет неравенству*

$$|\omega_T(0, x_1, 0) - \omega_T(0, x_2, 0)| \leqslant \eta(T) \|x_1 - x_2\|, \qquad \text{где} \quad \eta(T) = \frac{L}{L - \lambda} \left(e^{(L-\lambda)T} - 1 \right).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что $\omega_T(0, x_1, 0) \leqslant \omega_T(0, x_2, 0)$. По определению функции цены

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists u_T : \quad y_2(T) - \varepsilon \leqslant \omega_T(0, x_2, 0).$$

Отсюда следует, что

$$|\omega_T(0, x_1, 0) - \omega_T(0, x_2, 0)| \leqslant |y_1(T) - y_2(T)| + \varepsilon.$$

Так как z_1 и z_2 аппроксимируются ломаными Эйлера, в полученном неравенстве y_1 и y_2 можно с точностью до ε заменить на подходящие координаты ломаных y_k^1 и y_k^2:

$$|\omega_T(0, x_1, 0) - \omega_T(0, x_2, 0)| \leqslant |y_k^1 - y_k^2| + 2\varepsilon.$$

По определению ломаной Эйлера можно сделать оценку

$$|y_k^1 - y_k^2| + 2\varepsilon \leqslant \int_0^T e^{-\lambda t} |g(x_1) - g(x_2)| \, dt + 2\varepsilon \leqslant L \int_0^T e^{-\lambda t} \|x_k^1 - x_k^2\| \, dt + 2\varepsilon.$$

Теперь оценим норму разности $\|x_k^1 - x_k^2\|$:

$$\|x_k^1 - x_k^2\| \leqslant \|x_k^1(0) - x_k^2(0)\| + \int_0^t \|f(x_k^1) - f(x_k^2)\| \, d\tau \leqslant \|x_k^1(0) - x_k^2(0)\| + L \int_0^t \|x_k^1 - x_k^2\| \, d\tau.$$

По неравенству Гронуолла имеем $\|x_k^1 - x_k^2\| \leqslant e^{Lt} \|x_k^1(0) - x_k^2(0)\|$. Суммируем оценки:

$$|\omega_T(0, x_1, 0) - \omega_T(0, x_2, 0)| \leqslant L \|x_k^1(0) - x_k^2(0)\| \int_0^T e^{(L-\lambda)t} \, dt + 2\varepsilon.$$

Если устремить $k \to +\infty$ и $\varepsilon \to 0$, получим требуемое неравенство. Лемма доказана. □

§ 3. Основные свойства функции цены

Теорема 1. *Для любой позиции (t_0, z_0) задача оптимального управления имеет цену $\omega(t_0, z_0)$, причем справедлива аппроксимация функции ω функциями ω_T*

$$|\omega(t_0, z_0) - \omega_T(t_0, z_0)| \leqslant \frac{K(T) e^{-\lambda T}}{\lambda}, \quad \text{где} \quad \varkappa < \lambda.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся леммой 2:

$$\lim_{\theta \to +\infty} y(\theta) \leqslant y(T) + \frac{K(T) e^{-\lambda T}}{\lambda}.$$

Отсюда следует, что для $\omega_1(t_0, z_0)$ справедливо

$$\omega_1(t_0, z_0) = \inf \sup J^*(z) \leqslant \inf \sup J_T(z) + \frac{K(T) e^{-\lambda T}}{\lambda} = \omega_T(t_0, z_0) + \frac{K(T) e^{-\lambda T}}{\lambda}.$$

Аналогично,

$$\omega_2(t_0, z_0) = \sup\inf J^*(z) \geqslant \omega_T - \frac{K(T)e^{-\lambda T}}{\lambda}.$$

Также известно, что $\omega_2(t_0, z_0) \leqslant \omega_1(t_0, z_0)$. Из этих трех неравенств следует:

$$-\frac{K(T)e^{-\lambda T}}{\lambda} + \omega_T \leqslant \omega_2 \leqslant \omega_1 \leqslant \omega_T + \frac{K(T)e^{-\lambda T}}{\lambda}.$$

Отсюда $|\omega_1 - \omega_2| \leqslant 2\dfrac{K(T)e^{-\lambda T}}{\lambda}$. Теперь устремим $T \to +\infty$, получим, что $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, и последнее неравенство примет вид

$$-\frac{K(T)e^{-\lambda T}}{\lambda} + \omega_T \leqslant \omega \leqslant \omega_T + \frac{K(T)e^{-\lambda T}}{\lambda}.$$

Теорема доказана. □

Теорема 2. *Для любых x_1 и x_2 справедливо неравенство*

$$|\omega(0, x_1, 0) - \omega(0, x_2, 0)| \leqslant C\|x_1 - x_2\|^\gamma.$$

Доказательство. Очевидно,

$$|w(x_1) - w(x_2)| \leqslant |w(x_1) - \omega_T(0, x_1, 0)| + |\omega_T(0, x_1, 0) - \omega_T(0, x_2, 0)| + |\omega_T(0, x_2, 0) - w(x_2)|.$$

По лемме 5 и теореме 1

$$|w(x_1) - w(x_2)| \leqslant \eta(T)\|x_1 - x_2\| + \frac{2K(T)e^{-\lambda T}}{\lambda}.$$

Обозначим

$$\delta = \|x_1 - x_2\|, \quad \rho(T, \delta) = \eta\delta + \frac{2K(T)e^{-\lambda T}}{\lambda}.$$

Теперь из условия $\inf(\rho(T, \delta)) \leqslant C\delta^\gamma$, где $T \in [0, +\infty)$, найдем константы C и γ. Минимум достигается либо при $T = 0$, либо при $T = +\infty$, либо при $T \in (0, +\infty)$, для которого $\rho'_T(T, \delta) = 0$. Доказательство проведем для случаев (2.3), (2.4), (2.5), (2.6). Напомним, что в этих случаях $K(T)$ принимает следующие значения:

1) $K(T) = Ae^{\varkappa T}$;

2) $K(T) = \varkappa T$;

3) $K(T) = -ke^{-Ae^{\varkappa T}}$.

В каждом из них в зависимости от соотношений между $\varkappa$, λ и L возможно несколько подслучаев. Рассмотрим каждый из них.

Случай 1a. $K(T) = Ae^{\varkappa T}$, $\varkappa \geqslant \lambda > L$.

$$\rho(T, \delta) = L(e^{(L-\lambda)T} - 1)\frac{\delta}{L - \lambda} + \frac{2Ae^{(\varkappa-\lambda)T}}{\lambda}.$$

Так как производная

$$\rho'_T(T, \delta) = Le^{(L-\lambda)T}\delta + \frac{2A(\varkappa - \lambda)}{\lambda}e^{(\varkappa-\lambda)T} > 0,$$

функция $\rho(T, \delta)$ монотонно возрастает по T. Поэтому она достигает минимума при $T = 0$, и ее значение в этой точке равно $\rho(0, \delta) = \dfrac{2A}{\lambda}$. В этом случае мы можем положить $C = \dfrac{2A}{\lambda}$, $\gamma = 0$.

Случай 1b. $K(T) = Ae^{\varkappa T}$, $\lambda > \varkappa > L$. В этом случае функция $\rho(T,\delta)$ при $T=0$ принимает значение $\dfrac{2A}{\lambda}$. При T, стремящемся к бесконечности, она имеет предел, равный $\dfrac{\delta L}{\lambda - L}$. Легко проверить, что производная $\rho'_T(T,\delta)$ обращается в нуль в единственной точке и что при T, меньших этого значения, производная положительна. Следовательно, точка, в которой производная обращается в нуль — либо точка максимума, либо точка перегиба. Таким образом, минимум функции $\rho(T,\delta)$ достигается на границах интервала $[0,+\infty)$.

Укажем условия, при которых минимум достигается на каждой из границ. Очевидно, функция $\rho(T,\delta)$ имеет минимум при $T=0$, если

$$\frac{\delta L}{L-\lambda} + \frac{2A}{\lambda} < 0,$$

и минимум при стремлении T к бесконечности, если сумма больше нуля. В случае, когда сумма равна нулю, значения в нуле и в бесконечности равны. Таким образом, в качестве констант мы можем взять

$$C = \frac{2A}{\lambda}, \quad \gamma = 0, \qquad \text{если} \quad \frac{\delta L}{L-\lambda} + \frac{2A}{\lambda} < 0,$$

$$C = \frac{L}{\lambda - L}, \quad \gamma = 1, \qquad \text{если} \quad \frac{\delta L}{L-\lambda} + \frac{2A}{\lambda} \geqslant 0.$$

Случай 1c. $K(T) = Ae^{\varkappa T}$, $\lambda > \varkappa = L$.

$$\rho(T,\delta) = e^{(L-\lambda)T}\left(\frac{\delta L}{L-\lambda} + \frac{2A}{\lambda}\right) - \frac{\delta L}{L-\lambda}.$$

Функция $\rho(T,\delta)$ монотонно возрастает при

$$\frac{\delta L}{L-\lambda} + \frac{2A}{\lambda} < 0 \tag{3.1}$$

и монотонно убывает, если это выражение положительно. Когда выражение (3.1) принимает значение, равное нулю, функция $\rho(T,\delta)$ тождественно равна $\dfrac{\delta L}{\lambda - L}$. Таким образом, минимум функции $\rho(T,\delta)$ в зависимости от знака (3.1) достигается либо при $T=0$, либо при T, стремящемся к бесконечности. Таким образом, в качестве констант, как и в предыдущем случае, мы можем взять

$$C = \frac{2A}{\lambda}, \quad \gamma = 0, \qquad \text{если} \quad \frac{\delta L}{L-\lambda} + \frac{2A}{\lambda} < 0,$$

$$C = \frac{L}{\lambda - L}, \quad \gamma = 1, \qquad \text{если} \quad \frac{\delta L}{L-\lambda} + \frac{2A}{\lambda} \geqslant 0.$$

Случай 1d. $K(T) = Ae^{\varkappa T}$, $\lambda > L > \varkappa$. Здесь при малых δ минимум $\rho(T,\delta)$ достигается в точке

$$\rho'_T(T,\delta) = Le^{(L-\lambda)T}\delta + \frac{2A(\varkappa - \lambda)}{\lambda}e^{(\varkappa-\lambda)T} = 0.$$

Отсюда

$$T = \frac{1}{L-\varkappa}\ln\left(\frac{2A(\lambda-\varkappa)}{L\lambda\delta}\right).$$

Отметим, что при $\delta < \dfrac{2A(\lambda-\varkappa)}{L\lambda}$ полученная точка лежит строго левее нуля. Теперь найдем значение функции $\rho(T,\delta)$ в этой точке.

$$\rho(T,\delta) = \frac{\delta L}{L-\lambda}\left(\left(\frac{2A(\lambda-\varkappa)}{\delta L\lambda}\right)^{\frac{L-\lambda}{L-\varkappa}} - 1\right) + \frac{2A}{\lambda}\left(\frac{2A(\lambda-\varkappa)}{\delta L\lambda}\right)^{\frac{\varkappa-\lambda}{L-\varkappa}} =$$

$$= -\frac{L}{\lambda - L}\left(\frac{2A(\lambda-\varkappa)}{\delta L\lambda}\right)^{\frac{L-\lambda}{L-\varkappa}}\delta^{\frac{\lambda-\varkappa}{L-\varkappa}} + \frac{2A}{\lambda}\left(\frac{2A(\lambda-\varkappa)}{\delta L\lambda}\right)^{\frac{\varkappa-\lambda}{L-\varkappa}}\delta^{\frac{\lambda-\varkappa}{L-\varkappa}} + \frac{L}{\lambda-L}\delta.$$

Так как в первых двух слагаемых показатель степени δ меньше единицы, при малых δ справедлива оценка $\delta^{\frac{\lambda-\varkappa}{L-\varkappa}} < \delta$, и можно записать:

$$\rho(T,\delta) \leqslant \delta\left(\frac{2A}{\lambda}\left(\frac{2A(\lambda-\varkappa)}{\delta L\lambda}\right)^{\frac{\varkappa-\lambda}{L-\varkappa}} - \frac{L}{\lambda-L}\left(\frac{2A(\lambda-\varkappa)}{\delta L\lambda}\right)^{\frac{L-\lambda}{L-\varkappa}} + \frac{L}{\lambda-L}\right).$$

И мы можем взять константы:

$$\gamma = 1, \quad C = \frac{2A}{\lambda}\left(\frac{2A(\lambda-\varkappa)}{\delta L\lambda}\right)^{\frac{\varkappa-\lambda}{L-\varkappa}} - \frac{L}{\lambda-L}\left(\frac{2A(\lambda-\varkappa)}{\delta L\lambda}\right)^{\frac{L-\lambda}{L-\varkappa}} + \frac{L}{\lambda-L}.$$

Случай 1e. $K(T) = Ae^{\varkappa T}$, $\varkappa > L > \lambda$. Функция $\rho(T,\delta)$ монотонно возрастает по T, и на интервале $[0,+\infty)$ минимум достигается при $T = 0$. В этой точке функция равна $\dfrac{2A}{L}$. Константы мы можем взять:

$$C = \frac{2A}{\lambda}, \quad \gamma = 0.$$

Случай 1f. $K(T) = Ae^{\varkappa T}$, $\varkappa = L > \lambda$. В этом случае функция $\rho(T,\delta)$ имеет тот же вид, что и в случае 1c. Однако здесь выражение (3.1) всегда положительно, и поэтому функция $\rho(T,\delta)$ монотонно убывает. Следовательно, ее минимум достигается при T, стремящемся к бесконечности. И в качестве констант мы можем взять

$$C = \frac{L}{\lambda - L}, \quad \gamma = 1.$$

Случай 1g. $K(T) = Ae^{\varkappa T}$, $L > \varkappa \geqslant \lambda$. Здесь функция $\rho(T,\delta)$ монотонно возрастает по T. По аналогии со случаем 1e мы можем выбрать константы

$$C = \frac{2A}{\lambda}, \quad \gamma = 0.$$

Случай 1h. $K(T) = Ae^{\varkappa T}$, $L > \lambda > \varkappa$. Здесь, как и в случае 1d, минимум функции при малых δ достигается в точке

$$T = \frac{1}{L-\varkappa}\ln\left(\frac{2A(\lambda-\varkappa)}{\delta L\lambda}\right).$$

При $\delta < \dfrac{2A(\lambda-\varkappa)}{L\lambda}$ точка T лежит строго левее нуля. Найдем значение функции $\rho(T,\delta)$ в точке T.

$$\rho(T,\delta) = \frac{\delta L}{L-\lambda}\left(\left(\frac{2A(\lambda-\varkappa)}{\delta L\lambda}\right)^{\frac{L-\lambda}{L-\varkappa}} - 1\right) + \frac{2A}{\lambda}\left(\frac{2A(\lambda-\varkappa)}{\delta L\lambda}\right)^{\frac{\varkappa-\lambda}{L-\varkappa}} =$$

$$= \frac{L}{L-\lambda}\left(\frac{2A(\lambda-\varkappa)}{\delta L\lambda}\right)^{\frac{L-\lambda}{L-\varkappa}}\delta^{\frac{\lambda-\varkappa}{L-\varkappa}} + \frac{L}{\lambda-\varkappa}\left(\frac{2A(\lambda-\varkappa)}{\delta L\lambda}\right)^{\frac{L-\lambda}{L-\varkappa}}\delta^{\frac{\lambda-\varkappa}{L-\varkappa}} - \frac{L}{L-\lambda}\delta.$$

Так как последнее слагаемое отрицательно, мы можем его отбросить. После группировки слагаемых оценка функции будет выглядеть следующим образом:

$$\rho(T,\delta) \leqslant \delta^{\frac{\lambda-\varkappa}{L-\varkappa}}\left(\left(\frac{L}{L-\lambda} + \frac{L}{\lambda-\varkappa}\right)\left(\frac{2A(\lambda-\varkappa)}{\delta L\lambda}\right)^{\frac{\varkappa-\lambda}{L-\varkappa}}\right).$$

И мы можем взять такие константы:

$$C = \left(\left(\frac{L}{L-\lambda} + \frac{L}{\lambda-\varkappa}\right)\left(\frac{2A(\lambda-\varkappa)}{\delta L\lambda}\right)^{\frac{\varkappa-\lambda}{L-\varkappa}}\right), \quad \gamma = \frac{\lambda-\varkappa}{L-\varkappa}.$$

Случай 1i. $K(T) = Ae^{\varkappa T}$, $\varkappa > L = \lambda$. Так как $L = \lambda$, числитель и знаменатель первого слагаемого в выражении функции $\rho(T, \delta)$ обращаются в нуль. Применим правило Лопиталя и получим:

$$\rho(T,\delta) = LT\delta + \frac{2Ae^{(\varkappa-\lambda)T}}{\lambda}.$$

Эта функция монотонно возрастает, значение $\rho(0,\delta) = \dfrac{2A}{L}$. Следовательно, константы будут равны:

$$C = \frac{2A}{\lambda}, \quad \gamma = 0.$$

Случай 1j. $K(T) = Ae^{\varkappa T}$, $L = \lambda = \varkappa$. Здесь также $L = \lambda$, и функция $\rho(T,\delta)$ принимает тот же вид. Ее наименьшее значение на интервале $[0, +\infty)$ равно $\dfrac{2A}{L}$. Константы берем те же:

$$C = \frac{2A}{\lambda}, \quad \gamma = 0.$$

Случай 1k. $K(T) = Ae^{\varkappa T}$, $L = \lambda > \varkappa$. При малых δ функция достигает минимума, когда

$$\rho_T'(T,\delta) = L\delta - \frac{2A(\varkappa-\lambda)}{\lambda}e^{(\varkappa-\lambda)T} = 0.$$

Отсюда

$$T = \frac{1}{\lambda-\varkappa}\ln\left(\frac{2A(\lambda-\varkappa)}{L\lambda\delta}\right).$$

$$\rho(T,\delta) = \frac{L}{\lambda-\varkappa}\ln\left(\frac{2A(\lambda-\varkappa)}{L\lambda\delta}\right)\delta + \frac{2A}{\lambda}\left(\frac{2A(\lambda-\varkappa)}{L\lambda\delta}\right)^{\frac{\varkappa-\lambda}{\lambda-\varkappa}} =$$

$$= \frac{L}{\lambda-\varkappa}\ln\left(\frac{2A(\lambda-\varkappa)}{L\lambda\delta}\right)\delta + \frac{L}{\lambda-\varkappa}\delta = \frac{L}{\lambda-\varkappa}\left(\ln\left(\frac{2A(\lambda-\varkappa)}{L\lambda\delta}\right)+1\right)\delta.$$

Заметим, что для любого γ из интервала $(0,1)$

$$\lim_{\delta\to 0}\left(1+\ln\left(\frac{2A(\lambda-\varkappa)}{L\lambda\delta}\right)\right)\delta^{1-\gamma} = 0.$$

Поэтому для малых δ

$$\rho(T,\delta) = \frac{L}{\lambda-\varkappa}\left(1+\ln\left(\frac{2A(\lambda-\varkappa)}{L\lambda\delta}\right)\right)\delta^{1-\gamma}\delta^{\gamma} \leqslant \frac{L}{\lambda-\varkappa}\delta^{\gamma},$$

то есть константы можем взять $C = \dfrac{L}{\lambda-\varkappa}$, $\gamma \in (0,1)$.

Случай 2a. $K(T) = \varkappa T$, $\lambda \neq L$. В этом случае функция имеет вид

$$\rho(T,\delta) = L(e^{(L-\lambda)T}-1)\frac{\delta}{L-\lambda} + \frac{2CTe^{-\lambda T}}{\lambda}.$$

Легко увидеть, что $\rho(0,\delta) = 0$ и что $\rho(T,\delta) > 0$ для всех $T > 0$. Поэтому минимум функции достигается при $T = 0$, и мы можем взять константы $C = 0$, $\gamma \in (0, +\infty)$.

Случай 2b. $K(T) = \varkappa T$, $\lambda = L$. Здесь, как и в случаях 1i–1k, числитель и знаменатель первого слагаемого функции равны нулю, и функция принимает вид:

$$\rho(T,\delta) = LT\delta + \frac{2CTe^{-\lambda T}}{\lambda}.$$

Ее минимум достигается при $T = 0$, и функция в этой точке равна нулю. Поэтому $C = 0$, $\gamma \in (0, +\infty)$.

МАТЕМАТИКА 2016. Т. 26. Вып. 1

Случай 3a. $K(T) = -ke^{-Ae^{\varkappa T}}$, $\lambda \neq L$. В этом случае функция имеет вид

$$\rho(T,\delta) = L(e^{(L-\lambda)T} - 1)\frac{\delta}{L-\lambda} - \frac{2ke^{-Ae^{\varkappa T} - \lambda T}}{\lambda}.$$

Так как ее производная

$$\rho'_T(T,\delta) = L\delta e^{(L-\lambda)T} + \frac{2ke^{-Ae^{\varkappa T} - \lambda T}\left(A\varkappa e^{\varkappa T} + 1\right)}{\lambda} > 0,$$

сама функция монотонно возрастает и достигает минимума при $T = 0$: $\rho(0,\delta) = -\dfrac{2k}{\lambda e^A}$. Следовательно, $C = -\dfrac{2k}{\lambda e^A}$, $\quad \gamma = 0$.

Случай 3b. $K(T) = -ke^{-Ae^{\varkappa T}}$, $\lambda = L$. По аналогии со случаями 1i–1k и 2a

$$\rho(T,\delta) = L\delta T - \frac{2ke^{-Ae^{\varkappa T} - \lambda T}}{\lambda}.$$

Производная

$$\rho'_T(T,\delta) = L\delta + \frac{2ke^{-Ae^{\varkappa T} - \lambda T}\left(A\varkappa e^{\varkappa T} + 1\right)}{\lambda} > 0.$$

Следовательно, минимум при $T = 0$: $\rho(0,\delta) = -\dfrac{2k}{\lambda e^A}$. И мы можем взять $C = -\dfrac{2k}{\lambda e^A}$, $\gamma = 0$. Теорема доказана. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Capuzzo Dolcetta I.C., Ishii H. Approximate solution of the Bellman equation of deterministic control theory // Appl. Math. Optimiz. 1984. Vol. 11. № 1. P. 161–181.
2. Nikol'skii M.S. Continuity and the Lipschitz property of the Bellman function in some optimization problems on the semi-infinite interval $[0, +\infty)$ // Differential Equations. 2002. Vol. 38. № 11. P. 1599–1604.
3. Адиатулина Р.А., Тарасьев А.М. Дифференциальная игра неограниченной продолжительности // Прикладная математика и механика. 1987. Т. 51. Вып. 4. С. 531–537.
4. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Айрис-пресс, 2002. 576 с.
5. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
6. Крушвиц Л. Финансирование и инвестиции. СПб.: Питер, 2000. 381 с.
7. Субботин А.И. Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона–Якоби. М.: Наука, 1991. 216 с.

Поступила в редакцию 27.10.2015

Багно Александр Леонидович, аспирант, кафедра прикладной математики, Уральский федеральный университет, 620083, Россия, г. Екатеринбург, пр. Ленина, 51.
E-mail: bagno.alexander@gmail.com

Тарасьев Александр Михайлович, д. ф.-м. н., и. о. заведующего отделом динамических систем, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
E-mail: tam@imm.uran.ru

МАТЕМАТИКА 2016. Т. 26. Вып. 1

A. L. Bagno, A. M. Tarasyev

Properties of the value function in optimal control problems with infinite horizon

Keywords: optimal control, infinite horizon, value function, estimation of continuity modulus, asymptotic properties.

MSC: 49K15

The article investigates properties of the value function of the optimal control problem on infinite horizon with an unlimited integrand index appearing in the quality functional with a discount factor. The estimate is derived for approximating the value function in a problem with the infinite horizon by levels of value functions in problems with lengthening finite horizons. The structure of the value function is identified basing on stationary value functions which depend only on phase variables. The description is given for the asymptotic growth of the value function generated by various types of the quality functional applied in economic and financial modeling: logarithmic, power, exponential, linear functions. The property of continuity is specified for the value function and estimates are deduced for the Hölder parameters of continuity. These estimates are needed for the development of grid algorithms designed for construction of the value function in optimal control problems with infinite horizon.

REFERENCES

1. Capuzzo Dolcetta I.C., Ishii H. Approximate solution of the Bellman equation of deterministic control theory, *Appl. Math. Optimiz.*, 1984, vol. 11, no. 1, pp. 161–181.
2. Nikol'skii M.S. Continuity and the Lipschitz property of the Bellman function in some optimization problems on the semi-infinite interval $[0, +\infty)$, *Differential Equations*, 2002, vol. 38, no. 11, pp. 1599–1604.
3. Adiatulina R.A., Tarasyev A.M. A differential game of unlimited duration, *J. Appl. Math. Mech.*, 1987, vol. 51, no. 4, pp. 415–420.
4. Intriligator M. *Matematicheskie metody optimizatsii i ekonomicheskaya teoriya* (Mathematical optimization methods and economic theory), Moscow: Airis press, 2002, 576 p.
5. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry* (Positional differential games), Moscow: Nauka, 1974, 456 p.
6. Krushvits L. *Finansirovanie i investitsii* (Financing and investments), St. Petersburg: Piter, 2000, 381 p.
7. Subbotin A.I. *Minimaksnye neravenstva i uravneniya Gamil'tona–Yakobi* (Minimax inequalities and Hamilton–Jacobi equations), Moscow: Nauka, 1991, 216 p.

Received 27.10.2015

Bagno Alexander Leonidovich, Post-Graduate Student, Department of Applied Mathematics, Ural Federal University, pr. Lenina, 51, Yekaterinburg, 620083, Russia.
E-mail: bagno.alexander@gmail.com

Tarasyev Alexander Mikhailovich, Doctor of Physics and Mathematics, Acting Head of the Department of Dynamic Systems, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia.
E-mail: tam@imm.uran.ru