УДК 532.591

© *Н. Н. Бутакова, Е. М. Сычева*

# ДИФРАКЦИЯ ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ ОБТЕКАНИИ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА

Рассматривается движение жидкости, вызванное взаимодействием набегающей гравитационной волны, распространяющейся по свободной поверхности слоя вязкой несжимаемой жидкости, с круговым цилиндром, имеющим вертикальные образующие. Нелинейная краевая задача, описывающая такое движение, сведена к задаче для вертикальной компоненты вектора скорости, которая представляется в виде суммы потенциальной и вихревой составляющей. Получено решение данной задачи для случая колебаний малой амплитуды. Проведено сравнение поля скоростей для вязкой и идеальной жидкости.

*Ключевые слова*: дифракция, вязкость, волновые движения жидкости.

Опорными элементами ряда морских гидротехнических сооружений служат сваи в виде вертикальных круговых цилиндров. К таким сооружениям относятся, например, причалы, эстакады, морские платформы и другие сооружения сквозного типа. Оградительные сооружения, предназначенные для защиты акватории порта от волнения, нередко являются сооружениями с вертикальной гранью. Поэтому вопросы о взаимодействии набегающих волн с такими преградами и об определении волнового режима на огражденных акваториях представляют не только теоретический, но и практический интерес.

Ряд задач, относящихся к этой проблеме, уже нашел отражение в литературе. Так, например, М. Д. Хаскиндом [1] представлено и проанализировано решение задачи о дифракции волн на поверхности идеальной жидкости вертикальными круговым и эллиптическим цилиндрами. Им также предложен способ расчета взаимодействия волн с вертикальными преградами произвольного сечения, сводящийся к построению функций излучения при колебаниях контура поперечного сечения преграды.

В области, занятой жидкостью, выполняются уравнение неразрывности и уравнения движения:

$$\operatorname{div}\mathbf{v}=0,\quad \rho\left[\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}\right]=\mu\Delta\mathbf{v}-\nabla P+\rho\mathbf{g},$$

где $\mathbf{v}=(u,v,w)$ — вектор скорости, $\rho$ — плотность, $P$ — давление, $\mu$ — динамический коэффициент вязкости, $\mathbf{g}$ — вектор силы тяжести. Данная работа посвящена изучению движения жидкости, вызванному взаимодействием набегающей гравитационной волны, распространяющейся на поверхности слоя вязкой несжимаемой жидкости, с круговым цилиндром бесконечной глубины

При заглублении скорость жидкости должна затухать, т. е. выполняется условие

$$\mathbf{v}\to 0,\quad z\to-\infty.$$

На свободной поверхности $z=\xi(t,x,y)$ задаются кинематическое условие [2]

$$w=\frac{\partial\xi}{\partial t}+u\frac{\partial\xi}{\partial x}+v\frac{\partial\xi}{\partial y},$$

и динамические условия [3]

$$e_{ij}t_in_j=0,\quad P-2\mu e_{ij}n_in_j=P_a,$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right), \quad v_1 = u, \quad v_2 = v, \quad v_3 = w,$$
$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z.$$

здесь $P_a$ — постоянное атмосферное давление.

На поверхности цилиндра $S$ в случае вязкой жидкости должно выполняться условие прилипания:

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad (x, y, z) \in S.$$

Будем рассматривать колебания с амплитудой весьма малой по сравнению с длиной волны. Тогда система уравнений и граничных условий примет вид

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \nu \Delta \mathbf{v} - \frac{1}{\rho}\nabla p, \tag{1}$$

$$w = \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad \frac{p}{\rho} - g\xi - 2\nu\frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad z = 0, \tag{2}$$

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad (x, y, z) \in S, \tag{3}$$

$$\mathbf{v} \to 0, \quad z \to -\infty, \tag{4}$$

где $p = P + \rho g z - P_a$ — динамическое давление, $\nu = \dfrac{\mu}{\rho}$ — кинематический коэффициент вязкости.

Решение задачи необходимо искать в виде суммы потенциальной и вихревой составляющей. Исходя из этого, представим скорость в виде [4]

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1, \quad \mathbf{v}_1 = \nabla\varphi, \quad \mathbf{v}_2 = \operatorname{rot} \mathbf{\Psi},$$

где $\varphi$ — потенциал, $\mathbf{\Psi}$ — векторная функция тока.

Тогда, применяя к уравнениям (1) операции div и rot, их можно свести к системе уравнений:

$$\Delta\varphi = 0, \quad p = -\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \quad \frac{\partial \mathbf{\Psi}}{\partial t} - \nu\Delta\mathbf{\Psi} = 0.$$

Применяя операции дифференцирования к уравнениям для функции $\varphi$ и компонент векторной функции $\mathbf{\Psi}$, получим уравнения для вертикальной составляющей скорости $w = w_1 + w_2$ $\left(w_1 = \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}, \quad w_2 = \dfrac{\partial\psi_2}{\partial x} - \dfrac{\partial\psi_1}{\partial y}\right)$:

$$\Delta w_1 = 0, \quad \frac{\partial w_2}{\partial t} - \nu\Delta w_2 = 0. \tag{5}$$

Граничные условия (2) с помощью операций дифференцирования и уравнений (1) преобразуются к виду

$$\frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial z} - \nu\left(3\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 3\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial z} - g\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0, \quad z = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad z = 0. \tag{7}$$

Из условия (3) получим

$$w = 0, \quad (x, y, z) \in S, \tag{8}$$

а из условия затухания волнового движения при заглублении (4) —

$$w \to 0, \quad z \to -\infty. \tag{9}$$

Таким образом, исходная волновая задача сведена к задаче для вертикальной составляющей скорости (5)–(9).

Волновое движение жидкости для свободной волны, не искаженной препятствием, описывается следующими функциями [5]:

$$u = \cos\alpha \left(ikAe^{kz} - lCe^{lz}\right) e^{ik(x\cos\alpha + y\sin\alpha)+\omega t},$$

$$v = \sin\alpha \left(ikAe^{kz} - lCe^{lz}\right) e^{ik(x\cos\alpha + y\sin\alpha)+\omega t},$$

$$w = \left(kAe^{kz} + ikCe^{lz}\right) e^{ik(x\cos\alpha + y\sin\alpha)+\omega t},$$

$$p = -\rho\omega Ae^{kz} e^{ik(x\cos\alpha + y\sin\alpha)+\omega t}, \quad \xi = \frac{ikA - lC}{\omega} e^{ik(x\cos\alpha + y\sin\alpha)+\omega t},$$

где $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число, $\lambda$ — длина волны, $l^2 = k^2 + \dfrac{\omega}{\nu}$ , $C = \dfrac{2i\nu k^2 A}{\omega + 2\nu k^2}$ , $\alpha$ — направление распространения волны, отсчитываемое от оси $x$ в горизонтальной плоскости, а $\omega$ — комплексная частота, для которой получено дисперсионное уравнение

$$\left(\omega + 2\nu k^2\right)^2 + gk = 4\nu^2 k^4 \sqrt{\frac{\omega}{\nu k^2} + l}.$$

Далее будем рассматривать дифракцию набегающей волны круговым цилиндром с вертикальными образующими. Функции $w_1$ и $w_2$ будем искать в виде

$$w_1 = kAe^{kz+\omega t}\tilde{F}(x,y), \quad w_2 = ikCe^{lz+\omega t}\tilde{F}(x,y).$$

Выражения для функций $u$, $v$, $p$ и $\xi$ через $\tilde{F}$ примут следующий вид:

$$u = -k\cos^2\alpha \left(kAe^{kz} + ilCe^{lz}\right) e^{\omega t} \int \tilde{F}(x,y)\, dx,$$

$$v = -k\sin^2\alpha \left(kAe^{kz} + ilCe^{lz}\right) e^{\omega t} \int \tilde{F}(x,y)\, dy,$$

$$p = -\rho\omega Ae^{kz} e^{\omega t}\tilde{F}(x,y), \quad \xi = \frac{ikA - lC}{\omega} e^{\omega t}\tilde{F}(x,y).$$

Из уравнений (5) вытекает следующее уравнение Гельмгольца для функции $\tilde{F}$:

$$\frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial y^2} + k^2\tilde{F} = 0.$$

Условия (6), (7) и (9) при таком представлении для $w_1$ и $w_2$ выполняются, а из условия (8) следует условие для $\tilde{F}$:

$$\tilde{F} = 0, \quad (x,y) \in L,$$

где $L$ — контур сечения препятствия горизонтальной плоскостью.

Функцию $\tilde{F}$ можно представить в виде

$$\tilde{F} = F_\infty + F,$$

где первое слагаемое $F_\infty = e^{ik(x\cos\alpha + y\sin\alpha)}$ соответствует набегающей волне, а второе характеризует возмущенное движение жидкости.

Уравнение Гельмгольца для определения функции $F$ и условие на контуре $L$ в полярных координатах принимают вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial F}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + k^2 F = 0, \tag{10}$$

$$e^{ikR\cos(\theta-\alpha)} + F(R,\theta) = 0, \tag{11}$$

где $R$ — радиус цилиндра.

Функция $F$ как решение уравнения Гельмгольца должна также удовлетворять условию излучения в форме [6]:

$$\lim_{r\to\infty}\sqrt{r}\left(F_r - ikF\right) = 0, \quad \lim_{r\to\infty} F = 0.$$

Решение уравнения (10) будем искать с помощью метода разделения переменных, представив неизвестную функцию в виде

$$F\left(r,\theta\right) = X\left(r\right)Y\left(\theta\right).$$

Подставив последнее выражение в уравнение и проведя разделение переменных, получим уравнения

$$r^2 X_{rr} + rX_r + \left(k^2r^2 - m\right)X = 0,$$
$$Y_{\theta\theta} + \lambda Y = 0,$$

где $m$ — константа разделения.

Решение второго уравнения, удовлетворяющее условию периодичности по $\theta$ и условию симметрии относительно $\alpha$, имеет вид:

$$Y = \cos n\left(\theta - \alpha\right),$$

где $n = \sqrt{m}$ — целое число.

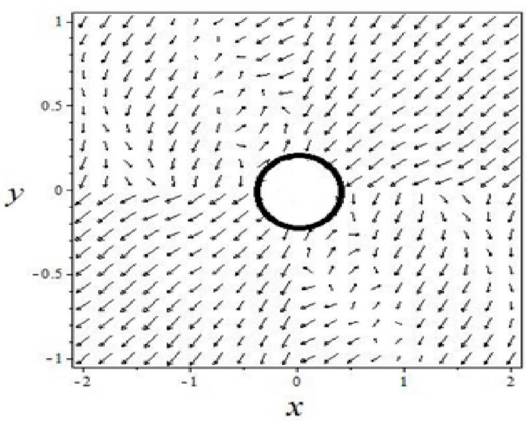


**Рис. 1.** Проекция поля скоростей на плоскость $XY$ в случае вязкой жидкости

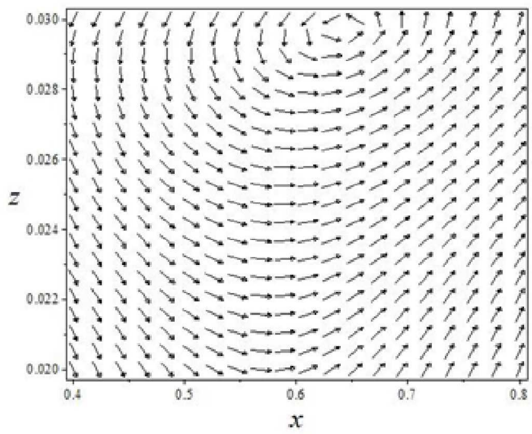


**Рис. 2.** Проекция поля скоростей на плоскость $XZ$ в случае вязкой жидкости

Условию излучения удовлетворяет функция Ханкеля первого рода:

$$X = H_n^{(1)}\left(kr\right), \quad n = 0,\,1,\,2,\,\ldots.$$

Тогда функция $F$ примет вид:

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} C_n H_n^{(1)}\left(kr\right)\cos n\left(\theta - \alpha\right).$$

Коэффициенты $C_n$ определим из условия (11). Для этого используем разложение [7]

$$e^{ikR\cos(\theta-\alpha)} = \sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n i^n J_n\left(kR\right)\cos n\left(\theta - \alpha\right),$$

где $J_n\left(kr\right)$ — функция Бесселя первого рода, $\varepsilon_n = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 2, & n \geqslant 0. \end{cases}$

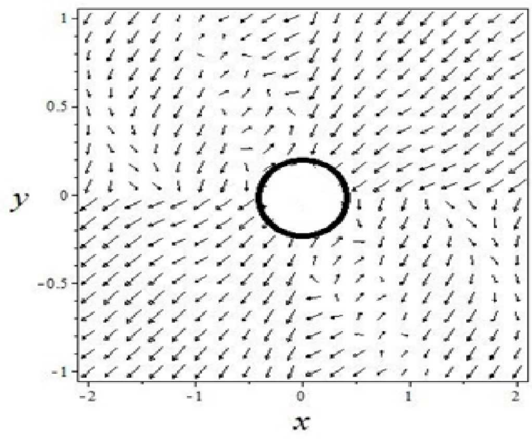


**Рис. 3.** Проекция поля скоростей на плоскость $XY$ в случае идеальной жидкости.

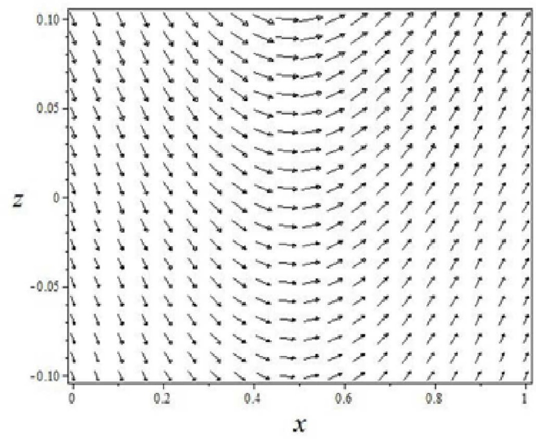


**Рис. 4.** Проекция поля скоростей на плоскость $XZ$ в случае идеальной жидкости.

Тогда получим

$$C_n = -\varepsilon_n i^n \frac{J_{n-1}(kR) - J_{n+1}(kR)}{H_{n-1}^{(1)}(kR) - H_{n+1}^{(1)}(kR)}.$$

В случае малого значения числа $kR$ (длина волны много больше радиуса цилиндра) условие на контуре $L$ можно записать в виде

$$F_r = -ik\cos(\theta - \alpha), \ r = R.$$

Тогда функция $\tilde{F}$, определяющая суммарное волновое поле, равна

$$\tilde{F} = e^{ikr\cos(\theta-\alpha)} + \frac{ikR^2}{r}\cos(\theta - \alpha).$$

Для сравнения решений, полученных для идеальной и вязкой жидкости, на рисунках 1–4 приведены проекции поля скоростей вблизи свободной поверхности на горизонтальную плоскость $XY$ и на вертикальную $XZ$ при $R = 0.2$ м, $A = 0.1$, $\lambda = 1$ м, $\alpha = \pi/4$. Из рисунков видно, что учет силы вязкого трения между частицами не влияет на проекции скоростей на плоскость $XY$. Это следует из того, что вид функции $F(x,y)$ в обоих случаях совпадает. В то же время, для вязкой жидкости в проекции поля скоростей на плоскость $XZ$ наблюдается нарушение симметрии в отличие от случая идеальной жидкости, что объясняется действием вязких касательных напряжений на свободной поверхности вязкой жидкости.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хаскинд М.Д. Гидродинамическая теория качки корабля. М.: Наука, 1973. 328 с.
2. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 2. М.: Физматгиз, 1963. 728 с.
3. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 793 с.
4. Баринов В.А., Басинский К.Ю. Моделирование волновых движений вязкой жидкости // Вестник Тюменского государственного университета. 2009. № 6. С. 144–151.
5. Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 700 с.
6. Кочин Н.Е. Собрание сочинений. Том 2. М.: Изд-во АН СССР, 1949. 305 с.
7. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.

Поступила в редакцию 31.01.2015

Бутакова Нина Николаевна, к. ф.-м. н., доцент, кафедра математического моделирования, Тюменский государственный университет, 625003, Россия, г. Тюмень, ул. Семакова, 10.
E-mail: nnbutakova@utmn.ru

Сычева Елена Михайловна, магистрант, кафедра математического моделирования, Тюменский государственный университет, 625003, Россия, г. Тюмень, ул. Семакова, 10.
E-mail: sychovaelena92@gmail.com

***N. N. Butakova, E. M. Sycheva***

**Wave diffraction on the surface of viscous liquid flowing around a circular cylinder**

*Keywords*: diffraction, viscosity, wave motion of liquid.

MSC: 76D33

The motion of fluid due to the interaction of an incident gravitational wave spreading on the surface of viscous incompressible fluid with a circular cylinder having vertical elements is considered. A nonlinear boundary-value problem is reduced to determining the vertical component of a velocity vector represented by a sum of potential and rotational parts. The problem is solved for the small-amplitude oscillations. The comparison of the velocity field between the ideal and viscous liquids is made.

## REFERENCES

1. Haskind M.D. *Gidrodinamicheskaya teoriya kachki korablya* (The hydrodynamic theory of rolling ship), Moscow: Nauka, 1973, 328 p.
2. Kochin N.E., Kibel' I.A., Roze N.V. *Teoreticheskaya gidromekhanika, Chast' 2* (Theoretical hydromechanics, vol. 2), Moscow: Fizmatgiz, 1963, 728 p.
3. Batchelor G.K. *Vvedenie v dinamiku zhidkosti* (An introduction to fluid dynamics), Moscow: Mir, 1973, 793 p.
4. Barinov V.A., Basinskii K.Yu. Modelling of wave movements of the viscous liquid, *Vestn. Tyumen. Gos. Univ.*, 2009, no. 6, pp. 144–151.
5. Levich V.G. *Fiziko-khimicheskaya gidrodinamika* (Physicochemical hydrodynamics), Moscow: Fizmatgiz, 1959, 700 p.
6. Kochin N.E. *Sobranie sochinenii, Tom 2* (Collected works, vol. 2), Moscow: Academy of Sciences of USSR, 1949, 305 p.
7. Gradshtein I.S., Ryzhik I.M. *Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedenii* (Tables of integrals, sums, series and products), Moscow: Fizmatgiz, 1963, 1100 p.

Received 31.01.2015

Butakova Nina Nikolaevna, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Mathematical Modeling, Tyumen State University, ul. Semakova, 10, Tyumen, 625003, Russia.
E-mail: nnbutakova@utmn.ru

Sycheva Elena Mikhailovna, Master student, Department of Mathematical Modeling, Tyumen State University, ul. Semakova, 10, Tyumen, 625003, Russia.
E-mail: sychovaelena92@gmail.com