МАТЕМАТИКА 2015. Т. 25. Вып. 1

УДК 517.958, 530.145.6

© *Т. С. Тинюкова*

ДВУМЕРНЫЙ РАЗНОСТНЫЙ ОПЕРАТОР ДИРАКА В ПОЛОСЕ

В последнее десятилетие в физической литературе активно изучается новый класс материалов — топологические изоляторы. Топологические изоляторы обладают интересными физическими свойствами, в частности практически нулевым сопротивлением, и, как ожидается, могут найти применения в микроэлектронике. В отличие от обычных металлов и полупроводников электрон в топологическом изоляторе описывается не оператором (гамильтонианом) Шрёдингера, а безмассовым оператором Дирака. Такие операторы в квазиодномерных структурах (например, в полосках с различными граничными условиями) весьма интересны с математической точки зрения, но до сих пор недостаточно изучены математиками. В данной статье рассматривается гамильтониан Дирака для топологического изолятора несколько более общего вида, а именно при наличии слоя ферромагнетика. Описан спектр такого оператора, найдена его функция Грина (ядро резольвенты), а также указан вид его (обобщенных) собственных функций.

Ключевые слова: дискретный разностный оператор Дирака, резольвента, спектр.

В последнее десятилетие в физической литературе активно изучается новый класс материалов — топологические изоляторы [1–3]. Гамильтониан электрона на поверхности трехмерного топологического изолятора, покрытого слоем ферромагнетика [3], имеет вид двумерного безмассового оператора Дирака $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_0(q) = \overline{\sigma}(\overline{p} + \overline{q})$, где $\overline{p} = \Big(-i\dfrac{\partial}{\partial x}, -i\dfrac{\partial}{\partial y}, 0\Big)$ — оператор импульса, $\overline{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ — набор матриц Паули, $\overline{q} = (0, 0, q)$ — вектор намагниченности (см. [3, 4]).

Рассматривается разностный аналог H_0 оператора $\mathcal{H}_0$ в полосе $\Omega = \mathbb{Z} \times \{1, \ldots, N\}$ с периодическим граничным условием, который действует на функцию $\psi(n,m) = \begin{pmatrix} \psi_1(n,m) \\ \psi_2(n,m) \end{pmatrix}$, $\psi_j \in l^2(\Omega)$, $j = 1, 2$, следующим образом:

$$H_0(q)\psi(n,m) = \begin{pmatrix} q & H_{01} - iH_{02} \\ H_{01} + iH_{02} & -q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1(n,m) \\ \psi_2(n,m) \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где оператор H_{01} действует в $l^2(\mathbb{Z})$:

$$H_{01}\psi(n) = -\frac{i}{2}\big(\psi(n+1) - \psi(n-1)\big),$$

оператор H_{02} действует в $l^2\big(\{1, \ldots, N\}\big)$:

$$\begin{aligned}
(H_{02}\psi)(m) &= -\frac{i}{2}\big(\psi(m+1) - \psi(m-1)\big), \quad m = 2, \ldots, N-1, \\
(H_{02}\psi)(1) &= -\frac{i}{2}\big(\psi(2) - \psi(N)\big), \\
(H_{02}\psi)(N) &= -\frac{i}{2}\big(\psi(1) - \psi(N-1)\big).
\end{aligned} \tag{2}$$

Резольвенту оператора H_0 будем обозначать через $R_0(\lambda) = (H_0 - \lambda I)^{-1}$, а спектр оператора A — через $\sigma(A)$.

Лемма 1. *Функции* $\dfrac{1}{\sqrt{N}} e^{im\frac{2\pi l}{N}}$, $\quad l = 1, \ldots, N$, *являются собственными функциями оператора* H_{02} *с соответствующими собственными значениями* $\lambda_l = \sin\frac{2\pi l}{N}$ *и образуют ортонормированный базис пространства* $l^2\big(\{1, \ldots, N\}\big) \cong \mathbb{C}^N$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Запишем уравнение на собственные значения оператора H_{02}:

$$H_{02}\psi = \lambda\psi. \tag{3}$$

Для $m \in \{2, \ldots, N-1\}$ данное уравнение примет вид (см. (2))

$$-\frac{i}{2}\big(\psi(m+1) - \psi(m-1)\big) = \lambda\psi(m). \tag{4}$$

Ищем собственные функции оператора H_{02} в виде

$$\psi(m) = C_1 e^{ikm} + C_2 e^{-ikm}. \tag{5}$$

Подставив функции (5) в уравнение (4), получим $\lambda = \sin k$, если $C_2 = 0$. Для $m = 1$ уравнение (3) имеет вид (см. (2))

$$-\frac{i}{2}\big(\psi(2) - \psi(N)\big) = \sin k \cdot \psi(1).$$

Отсюда $k_l = \frac{2\pi l}{N}$, $l \in \mathbb{Z}$. Полученные выражения для λ, k_l и $\psi(m)$ удовлетворяют уравнению (3) для $m = N$:

$$-\frac{i}{2}\big(\psi(1) - \psi(N-1)\big) = \sin k_l \cdot \psi(1).$$

Отсюда найдем собственные функции $\psi_l(m) = Ce^{im\frac{2\pi l}{N}}$, $C = \text{const}$, $l = 1, \ldots, N$, оператора H_{02}, соответствующие собственным значениям $\lambda_l = \sin\frac{2\pi l}{N}$. Очевидно, что нормировочная константа $C = \dfrac{1}{\sqrt{N}}$. Лемма доказана.

Следствие 1. *Имеем*

$$\psi(n,m) = \begin{pmatrix} \psi_1(n,m) \\ \psi_2(n,m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{N}} \sum\limits_{l=1}^{N} \psi_{1l}(n) e^{im\frac{2\pi l}{N}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{N}} \sum\limits_{l=1}^{N} \psi_{2l}(n) e^{im\frac{2\pi l}{N}} \end{pmatrix},$$

где $\psi_{jl}(n) = \left(\psi_j(n,m), \dfrac{1}{\sqrt{N}} e^{im\frac{2\pi l}{N}}\right)_{l^2(\{1,\ldots,N\})} = \dfrac{1}{\sqrt{N}} \sum\limits_{m=1}^{N} \psi_j(n,m) e^{-im\frac{2\pi l}{N}}, \quad j = 1, 2.$

Обозначим $a_l = \sqrt{\lambda^2 - q^2 - \sin^2(2\pi l/N)}$, $\cos k_l = a_l$, $\sin k_l = -\sqrt{1 - a_l^2}$, $l = 1, \ldots, N$.

Теорема 1. *Резольвента* $R_0(\lambda) = (H_0 - \lambda I)^{-1}$ *оператора* H_0 *имеет вид*

$$\big(R_0(\lambda)\varphi\big)_1(n,m) = -\frac{1}{2N} \sum_{l=1}^{N} \sum_{m'=1}^{N} \sum_{n' \in \mathbb{Z}} A\left[\frac{\lambda + q}{a_l} B\varphi_1(n', m') + C_-\varphi_2(n', m')\right],$$

$$\big(R_0(\lambda)\varphi\big)_2(n,m) = -\frac{1}{2N} \sum_{l=1}^{N} \sum_{m'=1}^{N} \sum_{n' \in \mathbb{Z}} A\left[\frac{\lambda - q}{a_l} B\varphi_2(n', m') + C_+\varphi_1(n', m')\right],$$

где

$$A = A(n, n', m, m', l) = \frac{e^{i\frac{2\pi l}{N}(m-m')} i^{n-n'}}{\sqrt{a_l^2 - 1}},$$

$$B = B(n, n', m, m', l) = e^{ik_l|n-n'|} + (-1)^{n-n'+1} e^{-ik_l|n-n'|},$$

$$C_\pm = C_\pm(n, n', m, m', l) = e^{ik_l|n-n'|} + (-1)^{n-n'} e^{-ik_l|n-n'|} \pm \frac{i}{a_l} \sin\frac{2\pi l}{N} B.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для нахождения резольвенты оператора H_0 решим уравнение

$$(H_0-\lambda)\psi=\varphi, \quad \varphi\in l^2(\Omega), \tag{6}$$

относительно $\psi\in l^2(\Omega)$. Согласно (1) уравнение (6) можно записать в виде системы:

$$\begin{cases} -\dfrac{i}{2}\big(\psi_2(n+1,m)-\psi_2(n-1,m)\big)-\dfrac{i}{\sqrt{N}}\displaystyle\sum_{l=1}^{N}\psi_{2l}(n)\sin\dfrac{2\pi l}{N}e^{im\frac{2\pi l}{N}}- \\ \qquad\qquad -(\lambda-q)\psi_1(n,m)=\varphi_1(n,m), \\ -\dfrac{i}{2}\big(\psi_1(n+1,m)-\psi_1(n-1,m)\big)+\dfrac{i}{\sqrt{N}}\displaystyle\sum_{l=1}^{N}\psi_{1l}(n)\sin\dfrac{2\pi l}{N}e^{im\frac{2\pi l}{N}}- \\ \qquad\qquad -(\lambda+q)\psi_2(n,m)=\varphi_2(n,m), \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} -\dfrac{i}{2}\big(\psi_{2l}(n+1)-\psi_{2l}(n-1)\big)-i\sin\dfrac{2\pi l}{N}\psi_{2l}(n)-(\lambda-q)\psi_{1l}(n)=\varphi_{1l}(n), \quad l=1,\ldots,N, \\ -\dfrac{i}{2}\big(\psi_{1l}(n+1)-\psi_{1l}(n-1)\big)+i\sin\dfrac{2\pi l}{N}\psi_{1l}(n)-(\lambda+q)\psi_{2l}(n)=\varphi_{2l}(n), \quad l=1,\ldots,N. \end{cases} \tag{7}$$

Рассмотрим преобразование Фурье $F: l^2(\mathbb{Z})\to L^2(-\pi,\pi)$, действующее следующим образом:

$$F\varphi(n)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-inp}\varphi(n)=\widehat{\varphi}(p).$$

Несложно убедиться в справедливости равенства $F\big(\psi_{jl}(n+1)-\psi_{jl}(n-1)\big)=2i\sin p\cdot\widehat{\psi}_{jl}(p)$, $j=1,2$. Подействовав F на каждое уравнение системы (7), получим

$$\begin{cases} \sin p\cdot\widehat{\psi}_{2l}(p)-i\sin\dfrac{2\pi l}{N}\cdot\widehat{\psi}_{2l}(p)-(\lambda-q)\widehat{\psi}_{1l}(p)=\widehat{\varphi}_{1l}(p), \quad l=1,\ldots,N, \\ \sin p\cdot\widehat{\psi}_{1l}(p)+i\sin\dfrac{2\pi l}{N}\cdot\widehat{\psi}_{1l}(p)-(\lambda+q)\widehat{\psi}_{2l}(p)=\widehat{\varphi}_{2l}(p), \quad l=1,\ldots,N, \end{cases}$$

или

$$\begin{pmatrix} -\lambda+q & \sin p-i\sin\frac{2\pi l}{N} \\ \sin p+i\sin\frac{2\pi l}{N} & -\lambda-q \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\widehat{\psi}_{1l}(p)\\ \widehat{\psi}_{2l}(p)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\widehat{\varphi}_{1l}(p)\\ \widehat{\varphi}_{2l}(p)\end{pmatrix}, \quad l=1,\ldots,N. \tag{8}$$

Спектр оператора H_0 — это такие значения λ, в которых не существует резольвента, т. е. для некоторого $l\in\{1,\ldots,N\}$ и некоторого p будет справедливо равенство (см. (8))

$$\lambda^2=q^2+\sin^2\frac{2\pi l}{N}+\sin^2 p.$$

Так как $\sin^2 p$ принимает значения от 0 до 1, то

$$\lambda^2\in\left[q^2+\sin^2\frac{2\pi l}{N},q^2+1+\sin^2\frac{2\pi l}{N}\right].$$

Таким образом, спектр $\sigma(H_0)$ оператора H_0 имеет вид

$$\sigma(H_0)=\bigcup_{l=1}^{N}\left(\left[-\sqrt{q^2+1+\sin^2\frac{2\pi l}{N}},-\sqrt{q^2+\sin^2\frac{2\pi l}{N}}\right]\bigcup\left[\sqrt{q^2+\sin^2\frac{2\pi l}{N}},\sqrt{q^2+1+\sin^2\frac{2\pi l}{N}}\right]\right)=$$

$$=\bigcup_{l=1}^{N}\left(\left[-\sqrt{q^2+1+\sin^2\frac{2\pi l}{N}},|q|\right]\bigcup\left[|q|,\sqrt{q^2+1+\sin^2\frac{2\pi l}{N}}\right]\right)=$$

$$=\left(\left[-\sqrt{q^2+1+s^2},|q|\right]\bigcup\left[|q|,\sqrt{q^2+1+s^2}\right]\right),$$

где $s = \max_{l=1,\ldots,N} \left|\sin \frac{2\pi l}{N}\right|$.

Далее, выпишем решение системы (8):

$$\widehat{\psi}_{1l}(p) = \frac{-(\lambda+q)\widehat{\varphi}_{1l}(p) - \left(\sin p - i\sin\frac{2\pi l}{N}\right)\widehat{\varphi}_{2l}(p)}{\lambda^2 - \left(q^2 + \sin^2\frac{2\pi l}{N} + \sin^2 p\right)},$$

$$\widehat{\psi}_{2l}(p) = \frac{(-\lambda+q)\widehat{\varphi}_{2l}(p) - \left(\sin p + i\sin\frac{2\pi l}{N}\right))\widehat{\varphi}_{1l}(p)}{\lambda^2 - \left(q^2 + \sin^2\frac{2\pi l}{N} + \sin^2 p\right)}.$$

Отсюда (см. следствие 1)

$$\widehat{\psi}_1(p,m) = -\frac{\lambda+q}{\sqrt{N}}\sum_{l=1}^{N}\frac{e^{im\frac{2\pi l}{N}}}{\lambda^2 - \left(q^2 + \sin^2\frac{2\pi l}{N} + \sin^2 p\right)}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{m'=1}^{N}\widehat{\varphi}_1(p,m')e^{-im'\frac{2\pi l}{N}}\right) -$$
$$- \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{l=1}^{N}\frac{e^{im\frac{2\pi l}{N}}\left(\sin p - i\sin\frac{2\pi l}{N}\right)}{\lambda^2 - \left(q^2 + \sin^2\frac{2\pi l}{N} + \sin^2 p\right)}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{m'=1}^{N}\widehat{\varphi}_2(p,m')e^{-im'\frac{2\pi l}{N}}\right),$$

$$\widehat{\psi}_2(p,m) = \frac{-\lambda+q}{\sqrt{N}}\sum_{l=1}^{N}\frac{e^{im\frac{2\pi l}{N}}}{\lambda^2 - \left(q^2 + \sin^2\frac{2\pi l}{N} + \sin^2 p\right)}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{m'=1}^{N}\widehat{\varphi}_2(p,m')e^{-im'\frac{2\pi l}{N}}\right) -$$
$$- \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{l=1}^{N}\frac{e^{im\frac{2\pi l}{N}}\left(\sin p + i\sin\frac{2\pi l}{N}\right)}{\lambda^2 - \left(q^2 + \sin^2\frac{2\pi l}{N} + \sin^2 p\right)}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{m'=1}^{N}\widehat{\varphi}_1(p,m')e^{-im'\frac{2\pi l}{N}}\right).$$

Найдем резольвенту в координатном представлении. Имеем

$$\psi_1(n,m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}\widehat{\psi}_1(p,m)e^{inp}\,dp =$$
$$= -\frac{\lambda+q}{2\pi N}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{l=1}^{N}\sum_{m'=1}^{N}\sum_{n'\in\mathbb{Z}}\frac{e^{ip(n-n')}e^{i\frac{2\pi l}{N}(m-m')}}{\lambda^2 - \left(q^2 + \sin^2\frac{2\pi l}{N} + \sin^2 p\right)}\varphi_1(n',m')\,dp -$$
$$- \frac{1}{2\pi N}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{l=1}^{N}\sum_{m'=1}^{N}\sum_{n'\in\mathbb{Z}}\frac{e^{ip(n-n')}e^{i\frac{2\pi l}{N}(m-m')}\left(\sin p - i\sin\frac{2\pi l}{N}\right)}{\lambda^2 - \left(q^2 + \sin^2\frac{2\pi l}{N} + \sin^2 p\right)}\varphi_2(n',m')\,dp,$$

$$\psi_2(n,m) = \frac{-\lambda+q}{2\pi N}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{l=1}^{N}\sum_{m'=1}^{N}\sum_{n'\in\mathbb{Z}}\frac{e^{ip(n-n')}e^{i\frac{2\pi l}{N}(m-m')}}{\lambda^2 - \left(q^2 + \sin^2\frac{2\pi l}{N} + \sin^2 p\right)}\varphi_2(n',m')\,dp -$$
$$- \frac{1}{2\pi N}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{l=1}^{N}\sum_{m'=1}^{N}\sum_{n'\in\mathbb{Z}}\frac{e^{ip(n-n')}e^{i\frac{2\pi l}{N}(m-m')}\left(\sin p + i\sin\frac{2\pi l}{N}\right)}{\lambda^2 - \left(q^2 + \sin^2\frac{2\pi l}{N} + \sin^2 p\right)}\varphi_1(n',m')\,dp.$$

Рассмотрим оператор h_0, действующий в пространстве $l^2(\mathbb{Z})$ по правилу

$$h_0\psi(n) = \psi(n-1) + \psi(n+1).$$

Резольвента $R_{h_0}(\lambda)$ оператора h_0 имеет вид (см. [5])

$$R_{h_0}(\lambda)\psi(n) = -\frac{1}{\sqrt{\lambda^2-4}}\sum_{n'\in\mathbb{Z}}e^{ik|n-n'|}\psi(n'),$$

где $\lambda = 2\cos k$. Рассмотрим уравнение $(h_0 - \lambda)\psi(n) = \varphi(n)$, $\psi, \varphi \in l^2(\mathbb{Z})$, или

$$\psi(n) = R_{h_0}(\lambda)\varphi(n), \quad \lambda \notin \sigma(h_0). \tag{9}$$

Подействуем на (9) оператором h_0; получим $\widehat{\psi}(p) = \widehat{R}_{h_0}(\lambda)\widehat{\varphi}(p) = \dfrac{\widehat{\varphi}(p)}{2\cos p - \lambda}$. Тогда

$$\psi(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{inp}\widehat{\psi}(p)dp = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{inp}\widehat{\varphi}(p)}{2\cos p - \lambda}dp = -\frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - 4}} \sum_{n' \in \mathbb{Z}} e^{ik|n-n'|}\varphi(n'). \tag{10}$$

Из (10) легко видеть, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{inp}}{a - \sin p}\, dp = e^{\frac{\pi n i}{2}} \int_{0}^{2\pi} \frac{e^{inp}}{a - \cos p}\, dp = \frac{2\pi e^{in\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{a^2 - 1}} e^{ik|n|} = \frac{2\pi i^n e^{ik|n|}}{\sqrt{a^2 - 1}}, \tag{11}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{inp}}{a + \sin p}\, dp = \frac{2\pi(-1)^{n+1} e^{in\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{a^2 - 1}} e^{-ik|n|} = \frac{2\pi(-1)^{n+1} i^n e^{ik|n|}}{\sqrt{a^2 - 1}}, \tag{12}$$

где $\cos k = a$. Обозначим $a_l = \sqrt{\lambda^2 - q^2 - \sin^2 \dfrac{2\pi l}{N}}$, $l = 1, \ldots, N$, тогда справедливы равенства (см. (11), (12))

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{ip(n-n')}}{a_l^2 - \sin^2 p}\, dp &= \frac{1}{2a_l} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{a_l - \sin p} + \frac{1}{a_l + \sin p} \right) e^{ip(n-n')}\, dp = \\ &= \frac{\pi i^{n-n'}}{a_l \sqrt{a_l^2 - 1}} \big(e^{ik_l|n-n'|} + (-1)^{n-n'+1} e^{-ik_l|n-n'|}\big), \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} &\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{ip(n-n')}\sin p}{a_l^2 - \sin^2 p}\, dp = -\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{ip(n-n')}}{a_l + \sin p}\, dp + a_l \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{ip(n-n')}}{a_l - \sin p}\, dp = \\ &= -\frac{2\pi(-1)^{n-n'+1} i^{n-n'}}{\sqrt{a_l^2 - 1}} e^{-ik_l|n-n'|} + \frac{\pi i^{n-n'}}{\sqrt{a_l^2 - 1}} \left(e^{ik_l|n-n'|} + (-1)^{n-n'+1} e^{-ik_l|n-n'|}\right) = \\ &= \frac{\pi i^{n-n'}}{\sqrt{a_l^2 - 1}} \left(e^{ik_l|n-n'|} + (-1)^{n-n'} e^{-ik_l|n-n'|}\right), \end{aligned} \tag{14}$$

здесь $\cos k_l = a_l$, $l = 1, \ldots, N$. Используя (13), (14), найдем окончательный вид резольвенты:

$$\begin{aligned} \psi_1(n,m) = &-\frac{\lambda + q}{2N} \sum_{l=1}^{N} \sum_{m'=1}^{N} \sum_{n' \in \mathbb{Z}} \frac{e^{i\frac{2\pi l}{N}(m-m')} i^{n-n'}}{a_l \sqrt{a_l^2 - 1}} \left(e^{ik_l|n-n'|} + (-1)^{n-n'+1} e^{-ik_l|n-n'|}\right) \varphi_1(n',m') - \\ &- \frac{1}{2N} \sum_{l=1}^{N} \sum_{m'=1}^{N} \sum_{n' \in \mathbb{Z}} \frac{e^{i\frac{2\pi l}{N}(m-m')} i^{n-n'}}{\sqrt{a_l^2 - 1}} \Big[e^{ik_l|n-n'|} + (-1)^{n-n'} e^{-ik_l|n-n'|} - \\ &- \frac{i}{a_l} \sin \frac{2\pi l}{N} \big(e^{ik_l|n-n'|} + (-1)^{n-n'+1} e^{-ik_l|n-n'|}\big)\Big] \varphi_2(n',m'), \\ \psi_2(n,m) = &\frac{-\lambda + q}{2N} \sum_{l=1}^{N} \sum_{m'=1}^{N} \sum_{n' \in \mathbb{Z}} \frac{e^{i\frac{2\pi l}{N}(m-m')} i^{n-n'}}{a_l \sqrt{a_l^2 - 1}} \left(e^{ik_l|n-n'|} + (-1)^{n-n'+1} e^{-ik_l|n-n'|}\right) \varphi_2(n',m') - \\ &- \frac{1}{2N} \sum_{l=1}^{N} \sum_{m'=1}^{N} \sum_{n' \in \mathbb{Z}} \frac{e^{i\frac{2\pi l}{N}(m-m')} i^{n-n'}}{\sqrt{a_l^2 - 1}} \Big[e^{ik_l|n-n'|} + (-1)^{n-n'} e^{-ik_l|n-n'|} + \\ &+ \frac{i}{a_l} \sin \frac{2\pi l}{N} \big(e^{ik_l|n-n'|} + (-1)^{n-n'+1} e^{-ik_l|n-n'|}\big)\Big] \varphi_1(n',m'). \end{aligned}$$

□

Теорема 2. *Решение* $\psi(n,m) = \begin{pmatrix} \psi_1(n,m) \\ \psi_2(n,m) \end{pmatrix}$ *уравнения Дирака*

$$H_0\psi = \lambda\psi, \quad \lambda \in \sigma(H_0), \tag{15}$$

где $\lambda \neq 0$ *и* $\lambda \notin \left\{q^2 + \sin^2 \dfrac{2\pi l}{N}, q^2 + \sin^2 \dfrac{2\pi l}{N} + 1\right\}_{l=1}^{N}$, *в классе ограниченных функций имеет вид*

$$\psi_1(n,m) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{N} e^{im\frac{2\pi l}{N}} (C_{11}e^{inp_l} + C_{12}e^{-inp_l}),$$

$$\psi_2(n,m) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{N} e^{im\frac{2\pi l}{N}} \left(\frac{1}{\lambda+q} \left(\sqrt{\lambda^2 - q^2 - \sin^2 \frac{2\pi l}{N}} + i\sin\frac{2\pi l}{N} \right) C_{11}e^{inp_l} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\lambda - q} \left(-\sqrt{\lambda^2 - q^2 - \sin^2 \frac{2\pi l}{N}} + i\sin\frac{2\pi l}{N} \right) C_{12}e^{-inp_l} \right),$$

где C_{11}, C_{12} *— произвольные константы,* p_l *удовлетворяет равенству* $\sin p_l = \sqrt{\lambda^2 - q^2 - \sin^2 \frac{2\pi l}{N}}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнение (15) совпадает с уравнением (6) в случае $\varphi = 0$. Отсюда (см. (8))

$$\begin{cases} \sin p \cdot \widehat{\psi}_{2l}(p) - i\sin\dfrac{2\pi l}{N} \cdot \widehat{\psi}_{2l}(p) - (\lambda - q)\widehat{\psi}_{1l}(p) = 0, \quad l = 1, \ldots, N, \\ \sin p \cdot \widehat{\psi}_{1l}(p) + i\sin\dfrac{2\pi l}{N} \cdot \widehat{\psi}_{1l}(p) - (\lambda + q)\widehat{\psi}_{2l}(p) = 0, \quad l = 1, \ldots, N. \end{cases} \tag{16}$$

Рассмотрим эту систему для некоторого фиксированного значения $l \in \{1, \ldots, N\}$. Ненулевое решение найдется, если выполнено условие

$$\lambda^2 - q^2 - \sin^2 p - \sin^2 \frac{2\pi l}{N} = 0. \tag{17}$$

Равенство (17) справедливо для двух вещественных значений $\pm p_l$ таких, что

$$\sin p_l = \sqrt{\lambda^2 - q^2 - \sin^2 \frac{2\pi l}{N}}. \tag{18}$$

Тогда

$$\widehat{\psi}_{1l}(p) = C_{11}\delta(p - p_l) + C_{12}\delta(p + p_l), \quad \widehat{\psi}_{2l}(p) = C_{21}\delta(p - p_l) + C_{22}\delta(p + p_l).$$

Подставим $p = p_l$ в систему (16)

$$\begin{cases} (q - \lambda)C_{11} + \left(\sin p_l - i\sin\dfrac{2\pi l}{N}\right)C_{21} = 0, \\ \left(\sin p_l + i\sin\dfrac{2\pi l}{N}\right)C_{11} - (\lambda + q)C_{21} = 0. \end{cases} \tag{19}$$

Система (19) имеет ненулевое решение, так как для $p = p_l$ равенство (18) справедливо. Имеем

$$C_{21} = \frac{\sin p_l + i\sin\frac{2\pi l}{N}}{\lambda + q} C_{11}.$$

Подставив $p = -p_l$ в (16), получим

$$C_{22} = \frac{-\sin p_l + i\sin\frac{2\pi l}{N}}{\lambda - q} C_{12}.$$

Таким образом,

$$\psi_1(n,m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{\psi}_1(p,m) e^{inp} dp =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} \sum_{l=1}^{N} e^{im\frac{2\pi l}{N}} \int_{-\pi}^{\pi} \big(C_{11}\delta(p-p_l) + C_{12}\delta(p+p_l)\big) e^{inp} dp =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{N} e^{im\frac{2\pi l}{N}} (C_{11}e^{inp_l} + C_{12}e^{-inp_l}).$$

Рассуждая аналогично, легко получить формулу для $\psi_2(n,m)$. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hasan M.Z., Kane C.L. Colloquium: topological insulators // Rev. Mod. Phys. 2010. Vol. 82. P. 3045–3067.
2. Bardarson J.H., Moore J.E. Quantum interference and Aharonov–Bohm oscillations in topological insulators // Rep. Prog. Phys. 2012. Vol. 76. 056501.
3. Yokoyama T., Tanaka Y., Nagaosa N. Anomalous magnetoresistance of a two-dimensional ferromagnet/ ferromagnet junction on the surface of a topological insulator // Phys. Rev. B. 2010. Vol. 81. 121401 (R).
4. Chuburin Y.P. Electron scattering on the surface of a topological insulator // Phys. A.: Math. Theor. 2014. Vol. 47. 255203 (13 p).
5. Морозова Л.Е., Чубурин Ю.П. Об уровнях одномерного дискретного оператора Шрёдингера с убывающим потенциалом // Известия Института математики и информатики УдГУ. 2004. Вып. 1 (29). С. 85–94.

Поступила в редакцию 01.02.2015

Тинюкова Татьяна Сергеевна, к.ф.-м.н., старший преподаватель, кафедра математического анализа, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: ttinyukova@mail.ru

T. S. Tinyukova

Two-dimensional difference Dirac operator in the strip

Keywords: discrete difference Dirac operator, resolution, spectrum.

MSC: 81Q10, 81Q15

In the last decade, a new class of materials — topological insulators — is extensively studied in the physics literature. Topological insulators have remarkable physical properties, in particular, near-zero resistance, and are expected to be applied in microelectronics. Unlike conventional metals and semiconductors, an electron in topological insulators is described not by the Schrodinger operator (Hamiltonian), but by the massless Dirac operator. Such operators in quasi-one-dimensional structures (for example, strips with different boundary conditions) are very interesting from a mathematical point of view, but they are not well studied by mathematicians yet. This article discusses the Dirac Hamiltonian of a topological insulator of somewhat more general form, namely in the presence of a ferromagnetic layer. The spectrum of such an operator is described; its Green's function (the kernel of the resolvent) and (generalized) eigenfunctions are established.

REFERENCES

1. Hasan M.Z., Kane C.L. Colloquium: topological insulators, *Rev. Mod. Phys.*, 2010, vol. 82, pp. 3045–3067.
2. Bardarson J.H., Moore J.E. Quantum interference and Aharonov–Bohm oscillations in topological insulators, *Rep. Prog. Phys.*, 2012, vol. 76, 056501.
3. Yokoyama T., Tanaka Y., Nagaosa N. Anomalous magnetoresistance of a two-dimensional ferromagnet/ ferromagnet junction on the surface of a topological insulator, *Phys. Rev. B.*, 2010, vol. 81, 121401 (R).
4. Chuburin Y.P. Electron scattering on the surface of a topological insulator, *Phys. A.: Math. Theor.*, 2014, vol. 47, 255203 (13 p).
5. Morozova L.E., Chuburin Yu.P. On levels of the one-dimensional discrete Schrödinger operator with a decreasing small potential, *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, 2004, no. 1 (29), pp. 85–94.

Received 01.02.2015

Tinyukova Tat'yana Sergeevna, Candidate of Physics and Mathematics, Department of Mathematical Analysis, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: ttinyukova@mail.ru