УДК 519.633

© *Е. Е. Таширова*

СХОДИМОСТЬ РАЗНОСТНОГО МЕТОДА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С НАСЛЕДСТВЕННОСТЬЮ [1]

Рассмотрено волновое уравнение с двумя пространственными и одной временной независимыми переменными и эффектом наследственности вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + f\big(x, y, t, u(x, y, t), u_t(x, y, \cdot)\big), \quad u_t(x, y, \cdot) = \big\{u(x, y, t+\xi), -\tau \leqslant \xi \leqslant 0\big\}.$$

На основе идеи разделения текущего состояния и функции-предыстории сконструировано семейство сеточных методов для численного решения этого уравнения. По текущему состоянию строится полный аналог известного для уравнения без запаздывания метода с факторизацией, а влияние предыстории учитывается с помощью интерполяционных конструкций. Исследован порядок локальной погрешности алгоритма. Получена теорема о сходимости и порядке сходимости методов с помощью вложения в общую разностную схему систем с последействием. Приводятся результаты расчетов тестового примера с переменным запаздыванием.

Ключевые слова: разностные методы, двумерное волновое уравнение, запаздывание, интерполяция, факторизация, порядок сходимости.

Введение

Эволюционные уравнения, к числу которых относятся и уравнения гиперболического типа (волновые уравнения), во многих математических моделях окружающей действительности могут содержать эффекты запаздывания различных видов [1]. Численные алгоритмы решения таких уравнений в настоящее время разработаны недостаточно. В работе [2] были изучены численные методы решения уравнения гиперболического типа с одной пространственной переменной, основанные на методе, предложенном в работе [3] для уравнений параболического типа с запаздыванием общего вида. Подход этой работы был основан как на применении общей теории разностных схем [4], так и на применении теории численных методов решения функционально-дифференциальных уравнений [5, 6]. В работе [7] аналогичный подход был реализован для уравнения параболического типа с двумя пространственными переменными. В настоящей работе идеи статьи [2] распространяются на уравнения гиперболического типа с двумя пространственными переменными. Согласно используемому принципу разделения текущего состояния и предыстории, по текущему состоянию строится полный аналог известного для объекта без запаздывания метода, в данном случае аналога описанного в [8] метода с факторизацией. Отметим, что ранее алгоритм был анонсирован в работе [9], в данной работе приводится доказательство сходимости этого метода.

§ 1. Постановка задачи

Дано волновое уравнение с эффектом наследственности вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + f\big(x, y, t, u(x, y, t), u_t(x, y, \cdot)\big) \colon t_0 \leqslant t \leqslant T,\ 0 \leqslant x \leqslant X,\ 0 \leqslant y \leqslant Y \quad (1.1)$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Программы повышения конкурентоспособности ведущих университетов РФ (соглашение 02.A03.21.0006 от 27 августа 2013 г.) и РФФИ (грант 13–01–00089).

с граничными:

$$u(0,y,t)=g_1(y,t),\ u(X,y,t)=g_2(y,t)\colon\ 0\leqslant y\leqslant Y,\ t_0\leqslant t\leqslant T,$$
$$u(x,0,t)=g_3(x,t),\ u(x,Y,t)=g_4(x,t)\colon\ 0\leqslant x\leqslant X,\ t_0\leqslant t\leqslant T \tag{1.2}$$

и начальными:

$$u(x,y,t)=\varphi(x,y,t)\colon 0\leqslant x\leqslant X,\ 0\leqslant y\leqslant Y,\ t_0-\tau\leqslant t<t_0 \tag{1.3}$$

условиями. Здесь $u(x,y,t)$ — искомая функция, $u_t(x,y,\cdot)=\{u(x,y,t+\xi),-\tau\leqslant\xi\leqslant 0\}$ — функция-предыстория искомой функции к моменту t, τ — величина запаздывания;

$$f\big(x,y,t,u(x,y,t),u_t(x,y,\cdot)\big)$$

— функционал, определенный на $[0,X]\times[0,Y]\times[t_0,T]\times\mathbb{R}\times Q$, $Q=Q[-\tau,0)$ — множество функций $u(\xi)$, кусочно-непрерывных на $[-\tau,0)$, с конечным числом точек разрыва первого рода, в точках разрыва непрерывных справа, $\|u(\cdot)\|_Q=\sup_{\xi\in[-\tau,0)}|u(\xi)|$. Будем предполагать, что решение задачи (1.1)–(1.3), понимаемое в классическом смысле, существует и единственно.

§ 2. Разностный метод

Разобьем отрезок $[0,X]$ на части с шагом $h_1=X/N_1$, $[0,Y]$ на части с шагом $h_2=Y/N_2$, где N_1,N_2 — некоторые целые числа. Введем точки $x_i=ih_1$, $i=0,1\ldots,N_1$, $y_k=kh_2$, $k=0,1\ldots,N_2$. Разобьем отрезок $[t_0,T]$ на части с шагом Δ. Будем считать, что $m=\tau/\Delta$ — целое число.

Введем точки $t_j=\ t_0+j\Delta$, $j=-m,\ldots,M$. Будем обозначать приближение точного решения $u(x_i,y_k,t_j)$ через $u^j_{i,k}$. Введем дискретную предысторию к моменту t_j при фиксированных i,k:

$$\{u^l_{i,k}\}^j=\{u^l_{i,k}\colon j-m\leqslant l\leqslant j\}.$$

Оператором интерполяции–экстраполяции дискретной предыстории назовем отображение

$$I:\{u^l_{i,k}\}^j\to v^j_{i,k}(\cdot)\in Q[-\tau,\Delta].$$

Будем говорить, что оператор интерполяции–экстраполяции имеет порядок погрешности p на точном решении, если существуют константы C_1 и C_2 такие, что для всех $i=0,\ldots,N_1$, $k=0,\ldots,N_2$, $j=0,\ldots,M$ и $t\in[t_j-\tau,t_{j+1}]$ выполняется неравенство

$$|v^j_{i,k}(t)-u(x_i,y_k,t)|\leqslant C_1\max_{j-m\leqslant l\leqslant j}|u^l_{i,k}-u(x_i,y_k,t_l)|+C_2\Delta^p.$$

В дальнейшем применяется кусочно-линейная интерполяция с экстраполяцией продолжением, которая имеет второй порядок погрешности (см. [6]).

Для $0\leqslant s\leqslant 1$ рассмотрим семейство методов с весами:

$$\frac{u^{j+1}_{i,k}-2u^j_{i,k}+u^{j-1}_{i,k}}{\Delta^2}=sa^2\left(\frac{u^{j+1}_{i-1,k}-2u^{j+1}_{i,k}+u^{j+1}_{i+1,k}}{h_1^2}+\frac{u^{j+1}_{i,k-1}-2u^{j+1}_{i,k}+u^{j+1}_{i,k+1}}{h_2^2}\right)+$$
$$+sa^2\left(\frac{u^{j-1}_{i-1,k}-2u^{j-1}_{i,k}+u^{j-1}_{i+1,k}}{h_1^2}+\frac{u^{j-1}_{i,k-1}-2u^{j-1}_{i,k}+u^{j-1}_{i,k+1}}{h_2^2}\right)+$$
$$+(1-2s)a^2\left(\frac{u^{j}_{i-1,k}-2u^{j}_{i,k}+u^{j}_{i+1,k}}{h_1^2}+\frac{u^{j}_{i,k-1}-2u^{j}_{i,k}+u^{j}_{i,k+1}}{h_2^2}\right)+F^j_{i,k}(v^j_{i,k}(\cdot)),$$

$$i=1,\ldots,N_1-1,\ k=1,\ldots,N_2-1,\ j=0,\ldots,M-1, \tag{2.1}$$

с граничными:

$$u^j_{0,k} = g_1(y_k, t_j),\ u^j_{N_1,k} = g_2(y_k, t_j),\ u^j_{i,0} = g_3(x_i, t_j),\ u^j_{i,N_2} = g_4(x_i, t_j)$$

и начальными:

$$u^j_{i,k} = \varphi(x_i, y_k, t_j):\ -m \leqslant j \leqslant 0$$

условиями; $F^j_{i,k}(v(\cdot))$ — некоторый функционал, определенный на функциях $v(\cdot) = v^j_{i,k}(\cdot) = I(\{u^l_{i,k}\}^j) \in Q[-\tau, \Delta]$, связанный с функционалом $f(x_i, y_k, t_j, u^j_{i,k}, v^j_{i,k}(\cdot))$ и липшицевый по переменной $v(\cdot)$ с константой L_F.

Схема (2.1) при $s = 0$ является явной; при других s таких, что $0 < s \leqslant 1$, при каждом фиксированном j получаем систему уравнений. Для того чтобы привести систему к виду, при котором ее можно решить методом прогонки, перейдем к факторизованной схеме [8].

§ 3. Факторизованная схема

В этом разделе и далее будем предполагать, что рассматриваются однородные граничные условия

$$g_1(y,t) = g_2(y,t) = 0:\ 0 \leqslant y \leqslant Y,\ t_0 \leqslant t \leqslant T,$$
$$g_3(x,t) = g_4(x,t) = 0:\ 0 \leqslant x \leqslant X,\ t_0 \leqslant t \leqslant T.$$

При каждом t_j определим значения дискретной модели $\widetilde{\gamma}_j = (u^j_{0,0}, u^j_{0,1}, \ldots, u^j_{0,N_2-1}, u^j_{0,N_2}, u^j_{1,0}, u^j_{1,1}, \ldots, u^j_{1,N_2}, \ldots, u^j_{N_1,0}, u^j_{N_1,1}, \ldots, u^j_{N_1,N_2-1}, u^j_{N_1,N_2})' \in \widetilde{\Gamma}$, где $'$ — знак транспонирования, $\widetilde{\Gamma}$ — векторное пространство размерности $q = (N_1+1)(N_2+1)$.

$$\|\widetilde{\gamma}_n\|^2 = \sum_{i=0}^{N_1}\sum_{k=0}^{N_2}(u^n_{i,k})^2. \tag{3.1}$$

В пространстве $\widetilde{\Gamma}$ введем операторы A_1 и A_2:

$$A_1 u^j_{i,k} = -a^2\frac{u^j_{i-1,k} - 2u^j_{i,k} + u^j_{i+1,k}}{h_1^2},\ 1 \leqslant i \leqslant N_1 - 1,\ A_1 u^j_{0,k} = 0,\ A_1 u^j_{N_1,k} = 0, \tag{3.2}$$

$$A_2 u^j_{i,k} = -a^2\frac{u^j_{i,k-1} - 2u^j_{i,k} + u^j_{i,k+1}}{h_2^2},\ 1 \leqslant k \leqslant N_2 - 1,\ A_2 u^j_{i,0} = 0,\ A_1 u^j_{i,N_2} = 0. \tag{3.3}$$

Тогда систему (2.1) можно переписать в виде

$$\frac{\widetilde{\gamma}_{j+1} - 2\widetilde{\gamma}_j + \widetilde{\gamma}_{j-1}}{\Delta^2} + s(A_1 + A_2)\widetilde{\gamma}_{j+1} + s(A_1 + A_2)\widetilde{\gamma}_{j-1} + (1-2s)(A_1 + A_2)\widetilde{\gamma}_j = F^j(v(\cdot)), \tag{3.4}$$

где $F^j\big(v(\cdot)\big) = \Big(F^j_{0,0}\big(v^j_{0,0}(\cdot)\big), F^j_{0,1}\big(v^j_{0,1}(\cdot)\big), \ldots, F^j_{N_1,N_2}\big(v^j_{N_1,N_2}(\cdot)\big)\Big)'$, $v(\cdot) = I(\{\widetilde{\gamma}_l\}_j) \in Q^q[-\tau, \Delta]$, $Q^q[-\tau, \Delta]$ — пространство вектор-функций, каждая компонента которых принадлежит $Q[-\tau, \Delta]$.

Воспользуемся тождеством

$$\widetilde{\gamma}_{j+1} = 2\widetilde{\gamma}_j + \Delta^2\frac{\widetilde{\gamma}_{j+1} - 2\widetilde{\gamma}_j + \widetilde{\gamma}_{j-1}}{\Delta^2} - \widetilde{\gamma}_{j-1}$$

и введем оператор

$$R = E + \Delta^2 s A_1 + \Delta^2 s A_2.$$

Приведем уравнение (3.4) к виду

$$R(\widetilde{\gamma}_{j+1}-2\widetilde{\gamma}_j+\widetilde{\gamma}_{j-1})+\Delta^2(A_1+A_2)\widetilde{\gamma}_j=\Delta^2F^j(v(\cdot)).$$

С учетом соотношения $(E+\Delta^2sA_1)(E+\Delta^2sA_2)=E+\Delta^2sA_1+\Delta^2sA_2+O(\Delta^4)$ получаем

$$R=R_1R_2+O(\Delta^4)=(E+\Delta^2sA_1)(E+\Delta^2sA_2)+O(\Delta^4). \tag{3.5}$$

Заметим, что операторы R_1 и R_2 не зависят от Δ, h_1, h_2, а зависят только от $\sigma_1=a^2\Delta^2/h_1^2$ и $\sigma_2=a^2\Delta^2/h_2^2$ соответственно.

Перейдем к факторизованной схеме:

$$R_1R_2(\widetilde{\gamma}_{j+1}-2\widetilde{\gamma}_j+\widetilde{\gamma}_{j-1})+\Delta^2(A_1+A_2)\widetilde{\gamma}_j=\Delta^2F^j(v(\cdot)). \tag{3.6}$$

Система эффективно решается с помощью двух прогонок по каждому из направлений x и y.

Запишем схему (3.6) в координатной форме:

$$\begin{gathered}
u_{i,k}^{j+1}-2u_{i,k}^j+u_{i,k}^{j-1}-\Delta^2sa^2\left(\frac{u_{i-1,k}^{j+1}-2u_{i,k}^{j+1}+u_{i+1,k}^{j+1}}{h_1^2}+\frac{u_{i,k-1}^{j+1}-2u_{i,k}^{j+1}+u_{i,k+1}^{j+1}}{h_2^2}\right)-\\
-\ \Delta^2sa^2\left(\frac{u_{i-1,k}^{j-1}-2u_{i,k}^{j-1}+u_{i+1,k}^{j-1}}{h_1^2}+\frac{u_{i,k-1}^{j-1}-2u_{i,k}^{j-1}+u_{i,k+1}^{j-1}}{h_2^2}\right)-\\
-\Delta^2(1-2s)a^2\left(\frac{u_{i-1,k}^{j}-2u_{i,k}^{j}+u_{i+1,k}^{j}}{h_1^2}+\frac{u_{i,k-1}^{j}-2u_{i,k}^{j}+u_{i,k+1}^{j}}{h_2^2}\right)+\\
+\frac{\Delta^4s^2a^4}{h_1^2h_2^2}\Bigg(\left(u_{i+1,k+1}^{j+1}-2u_{i+1,k}^{j+1}+u_{i+1,k-1}^{j+1}\right)-2\left(u_{i,k+1}^{j+1}-2u_{i,k}^{j+1}+u_{i,k-1}^{j+1}\right)+\\
+\left(u_{i-1,k+1}^{j+1}-2u_{i-1,k}^{j+1}+u_{i-1,k-1}^{j+1}\right)-2\left(u_{i+1,k+1}^{j}-2u_{i+1,k}^{j}+u_{i+1,k-1}^{j}\right)+\\
+4\left(u_{i,k+1}^{j+1}-2u_{i,k}^{j}+u_{i,k-1}^{j}\right)-2\left(u_{i-1,k+1}^{j+1}-2u_{i-1,k}^{j}+u_{i-1,k-1}^{j}\right)+\\
+\left(u_{i+1,k+1}^{j-1}-2u_{i+1,k}^{j-1}+u_{i+1,k-1}^{j-1}\right)-2\left(u_{i,k+1}^{j-1}-2u_{i,k}^{j-1}+u_{i,k-1}^{j-1}\right)+\\
+\left(u_{i-1,k+1}^{j-1}-2u_{i-1,k}^{j-1}+u_{i-1,k-1}^{j-1}\right)\Bigg)=\Delta^2F_{i,k}^j(v_{i,k}^j(\cdot)).
\end{gathered} \tag{3.7}$$

§ 4. Исследование невязки

Невязкой (без интерполяции) метода назовем

$$\begin{gathered}
\psi_{i,k}^j=\frac{u(x_i,y_k,t_{j+1})-2u(x_i,y_k,t_j)+u(x_i,y_k,t_{j-1})}{\Delta^2}-\\
-\ sa^2\left(\frac{u(x_{i-1},y_k,t_{j+1})-2u(x_i,y_k,t_{j+1})+u(x_{i+1},y_k,t_{j+1})}{h_1^2}+\right.\\
\left.+\ \frac{u(x_i,y_{k-1},t_{j+1})-2u(x_i,y_k,t_{j+1})+u(x_i,y_{k+1},t_{j+1})}{h_2^2}\right)-\\
-\ sa^2\left(\frac{u(x_{i-1},y_k,t_{j-1})-2u(x_i,y_k,t_{j-1})+u(x_{i+1},y_k,t_{j-1})}{h_1^2}+\right.\\
\left.+\ \frac{u(x_i,y_{k-1},t_{j-1})-2u(x_i,y_k,t_{j-1})+u(x_i,y_{k+1},t_{j-1})}{h_2^2}\right)-
\end{gathered}$$

$$
\begin{aligned}
&-(1-2s)a^2\Bigg(\frac{u(x_{i-1},y_k,t_j)-2u(x_i,y_k,t_j)+u(x_{i+1},y_k,t_j)}{h_1^2}+\\
&+\frac{u(x_i,y_{k-1},t_j)-2u(x_i,y_k,t_j)+u(x_i,y_{k+1},t_j)}{h_2^2}\Bigg)+\\
&+\frac{\Delta^2 s^2 a^4}{h_1^2 h_2^2}\Bigg(\Big(u(x_{i+1},y_{k+1},t_{j+1})-2u(x_{i+1},y_k,t_{j+1})+u(x_{i+1},y_{k-1},t_{j+1})\Big)-\\
&-2\Big(u(x_i,y_{k+1},t_{j+1})-2u(x_i,y_k,t_{j+1})+u(x_i,y_{k-1},t_{j+1})\Big)+\Big(u(x_{i-1},y_{k+1},t_{j+1})-2u(x_{i-1},y_k,t_{j+1})+\\
&+u(x_{i-1},y_{k-1},t_{j+1})\Big)-2\Big(u(x_{i+1},y_{k+1},t_j)-2u(x_{i+1},y_k,t_j)+u(x_{i+1},y_{k-1},t_j)\Big)+\\
&+4\Big(u(x_i,y_{k+1},t_{j+1})-2u(x_i,y_k,t_j)+u(x_i,y_{k-1},t_j)\Big)-2\Big(u(x_{i-1},y_{k+1},t_{j+1})-2u(x_{i-1},y_k,t_j)+\\
&+u(x_{i-1},y_{k-1},t_j)\Big)+\Big(u(x_{i+1},y_{k+1},t_{j-1})-2u(x_{i+1},y_k,t_{j-1})+u(x_{i+1},y_{k-1},t_{j-1})\Big)-\\
&-2\Big(u(x_i,y_{k+1},t_{j-1})-2u(x_i,y_k,t_{j-1})+u(x_i,y_{k-1},t_{j-1})\Big)+\Big(u(x_{i-1},y_{k+1},t_{j-1})-\\
&-2u(x_{i-1},y_k,t_{j-1})+u(x_{i-1},y_{k-1},t_{j-1})\Big)\Bigg)-F^j_{i,k}(u_{t_j}(x_i,y_k,\cdot)). \qquad (4.1)
\end{aligned}
$$

Будем говорить, что невязка имеет порядок $h_1^{p_1}+h_2^{p_2}+\Delta^{p_3}$, если существует такая константа C, что $|\psi^j_{i,k}|\leqslant C(h_1^{p_1}+h_2^{p_2}+\Delta^{p_3})$ для всех $i=1,\ldots,N_1-1,\ k=1,\ldots,N_2-1,\ j=0,\ldots,M-1$.

Теорема 1. *Если для точного решения задачи* (1.1)–(1.3) *существуют и непрерывны все частные производные вплоть до 4-го порядка включительно,* $F^j_{i,k}\big(v^j_{i,k}(\cdot)\big)=f\big(x_i,y_k,t_j,u^j_{i,k},v^j_{i,k}(\cdot)\big)$, *то для любого* $0\leqslant s\leqslant 1$ *невязка имеет порядок* $h_1^2+h_2^2+\Delta^2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Разложим функцию $u(x,y,t)$ по формуле Тейлора в окрестности точек (x_i,y_k,t_j), (x_i,y_k,t_{j+1}), (x_i,y_k,t_{j-1}), (x_{i-1},y_k,t_j), (x_{i-1},y_k,t_{j+1}), (x_{i-1},y_k,t_{j-1}), (x_{i+1},y_k,t_j), (x_{i+1},y_k,t_{j+1}), (x_{i+1},y_k,t_{j-1}). Тогда получим следующие равенства для значений функции в точках:

$$u(x_i,y_k,t_{j\pm1})=u(x_i,y_k,t_j)\pm\frac{\partial u}{\partial t}(x_i,y_k,t_j)\Delta+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i,y_k,t_j)\Delta^2\pm\frac{1}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i,y_k,t_j)\Delta^3+O(\Delta^4),$$

$$u(x_{i\pm1},y_k,t_j)=u(x_i,y_k,t_j)\pm\frac{\partial u}{\partial x}(x_i,y_k,t_j)h_1+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,y_k,t_j)h_1^2\pm\frac{1}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i,y_k,t_j)h_1^3+O(h_1^4),$$

$$u(x_i,y_{k\pm1},t_j)=u(x_i,y_k,t_j)\pm\frac{\partial u}{\partial y}(x_i,y_k,t_j)h_2+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i,y_k,t_j)h_2^2\pm\frac{1}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x_i,y_k,t_j)h_2^3+O(h_2^4),$$

$$
\begin{aligned}
u(x_{i\pm1},y_k,t_{j+1})&=u(x_i,y_k,t_{j+1})\pm\frac{\partial u}{\partial x}(x_i,y_k,t_{j+1})h_1+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,y_k,t_{j+1})h_1^2\pm\\
&\pm\frac{1}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i,y_k,t_{j+1})h_1^3+O(h_1^4),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u(x_{i\pm1},y_k,t_{j-1})&=u(x_i,y_k,t_{j-1})\pm\frac{\partial u}{\partial x}(x_i,y_k,t_{j-1})h_1+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,y_k,t_{j-1})h_1^2\pm\\
&\pm\frac{1}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i,y_k,t_{j-1})h_1^3+O(h_1^4),
\end{aligned}
$$

$$u(x_i,y_{k\pm1},t_{j+1})=u(x_i,y_k,t_{j+1})\pm\frac{\partial u}{\partial y}(x_i,y_k,t_{j+1})h_2+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i,y_k,t_{j+1})h_2^2\pm$$

$$\pm\frac{1}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x_i,y_k,t_{j+1})h_2^3+O(h_2^4),$$

$$u(x_i,y_{k\pm1},t_{j-1})=u(x_i,y_k,t_{j-1})\pm\frac{\partial u}{\partial y}(x_i,y_k,t_{j-1})h_2+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i,y_k,t_{j-1})h_2^2\pm$$

$$\pm\frac{1}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x_i,y_k,t_{j-1})h_2^3+O(h_2^4),$$

$$u(x_{i-1},y_{k\pm1},t_{j+1})=u(x_{i-1},y_k,t_{j+1})\pm\frac{\partial u}{\partial y}(x_{i-1},y_k,t_{j+1})h_2+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_{i-1},y_k,t_{j+1})h_2^2\pm$$

$$\pm\frac{1}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x_{i-1},y_k,t_{j+1})h_2^3+O(h_2^4),$$

$$u(x_{i+1},y_{k\pm1},t_{j+1})=u(x_{i+1},y_k,t_{j+1})\pm\frac{\partial u}{\partial y}(x_{i+1},y_k,t_{j+1})h_2+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_{i+1},y_k,t_{j+1})h_2^2\pm$$

$$\pm\frac{1}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x_{i+1},y_k,t_{j+1})h_2^3+O(h_2^4),$$

$$u(x_{i-1},y_{k\pm1},t_j)=u(x_{i-1},y_k,t_j)\pm\frac{\partial u}{\partial y}(x_{i-1},y_k,t_j)h_2+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_{i-1},y_k,t_j)h_2^2\pm$$

$$\pm\frac{1}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x_{i-1},y_k,t_j)h_2^3+O(h_2^4),$$

$$u(x_{i+1},y_{k\pm1},t_j)=u(x_{i+1},y_k,t_j)\pm\frac{\partial u}{\partial y}(x_{i+1},y_k,t_j)h_2+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_{i+1},y_k,t_j)h_2^2\pm$$

$$\pm\frac{1}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x_{i+1},y_k,t_j)h_2^3+O(h_2^4),$$

$$u(x_{i-1},y_{k\pm1},t_{j-1})=u(x_{i-1},y_k,t_{j-1})\pm\frac{\partial u}{\partial y}(x_{i-1},y_k,t_{j-1})h_2+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_{i-1},y_k,t_{j-1})h_2^2\pm$$

$$\pm\frac{1}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x_{i-1},y_k,t_{j-1})h_2^3+O(h_2^4),$$

$$u(x_{i+1},y_{k\pm1},t_{j-1})=u(x_{i+1},y_k,t_{j-1})\pm\frac{\partial u}{\partial y}(x_{i+1},y_k,t_{j-1})h_2+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_{i+1},y_k,t_{j-1})h_2^2\pm$$

$$\pm\frac{1}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x_{i+1},y_k,t_{j-1})h_2^3+O(h_2^4).$$

Подставив эти соотношения в формулу определения невязки (4.1), получим

$$\psi_{i,k}^j=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i,y_k,t_j)+O(\Delta^2)-sa^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,y_k,t_{j+1})+O(h_1^2)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i,y_k,t_{j+1})+O(h_2^2)\right)-$$

$$-sa^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,y_k,t_{j-1})+O(h_1^2)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i,y_k,t_{j-1})+O(h_2^2)\right)-$$

$$-(1-2s)a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,y_k,t_j)+O(h_1^2)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i,y_k,t_j)+O(h_2^2)\right)+$$

$$+\frac{\Delta^2 s^2 a^4}{h_1^2}\Biggl(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_{i+1},y_k,t_{j+1})+O(h_2^2)\right)-2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i,y_k,t_{j+1})+O(h_2^2)\right)+$$

$$+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_{i-1},y_k,t_{j+1})+O(h_2^2)\right)-2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_{i+1},y_k,t_j)+O(h_2^2)\right)+4\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i,y_k,t_j)+O(h_2^2)\right)-$$

$$-2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_{i-1},y_k,t_j)+O(h_2^2)\right)+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_{i+1},y_k,t_{j-1})+O(h_2^2)\right)-2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i,y_k,t_{j-1})+O(h_2^2)\right)+$$

$$+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_{i-1},y_k,t_{j-1})+O(h_2^2)\right)\Bigg)-f\Big(t_j,x_i,y_k,u(x_i,y_k,t_j),u_{t_j}(x_i,y_k,\cdot)\Big).$$

Разложим функции $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y,t)$ и $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y,t)$ по формуле Тейлора в окрестности точки (x_i,y_k,t_j), (x_i,y_k,t_{j+1}), (x_i,y_k,t_{j-1}). В результате получим следующие соотношения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,y_k,t_{j\pm1})=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,y_k,t_j)\pm\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2}(x_i,y_k,t_j)\Delta+O(\Delta^2),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i,y_k,t_{j\pm1})=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i,y_k,t_j)\pm\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial y^2}(x_i,y_k,t_j)\Delta+O(\Delta^2),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_{i\pm1},y_k,t_{j+1})=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i,y_k,t_{j+1})\pm\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}(x_i,y_k,t_{j+1})h_1+\frac{1}{2}\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}(x_i,y_k,t_{j+1})h_1^2\pm$$

$$\pm\frac{1}{6}\frac{\partial^4 u}{\partial x^3\partial y^2}(x_i,y_k,t_{j+1})h_1^3+O(h_1^4),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_{i\pm1},y_k,t_j)=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i,y_k,t_j)\pm\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}(x_i,y_k,t_j)h_1+\frac{1}{2}\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}(x_i,y_k,t_j)h_1^2\pm$$

$$\pm\frac{1}{6}\frac{\partial^4 u}{\partial x^3\partial y^2}(x_i,y_k,t_j)h_1^3+O(h_1^4),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_{i\pm1},y_k,t_{j-1})=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i,y_k,t_{j-1})\pm\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}(x_i,y_k,t_{j-1})h_1+\frac{1}{2}\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}(x_i,y_k,t_{j-1})h_1^2\pm$$

$$\pm\frac{1}{6}\frac{\partial^4 u}{\partial x^3\partial y^2}(x_i,y_k,t_{j-1})h_1^3+O(h_1^4).$$

Тогда

$$\psi_{i,k}^j=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i,y_k,t_j)-a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,y_k,t_j)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i,y_k,t_j)\right)-f\Big(x_i,y_k,t_j,u(x_i,y_k,t_j),u_{t_j}(x_i,y_k,\cdot)\Big)+$$

$$+\Delta^2s^2a^2\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}(x_i,y_k,t_{j+1})-2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}(x_i,y_k,t_j)+\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}(x_i,y_k,t_{j-1})\right)+O(h_1^2+h_2^2+\Delta^2)=$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i,y_k,t_j)-a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,y_k,t_j)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i,y_k,t_j)\right)-f\Big(x_i,y_k,t_j,u(x_i,y_k,t_j),u_{t_j}(x_i,y_k,\cdot)\Big)+$$

$$+O(h_1^2+h_2^2+\Delta^2).$$

В силу уравнения (1.1) выполнено $\psi_{i,k}^j=O(h_1^2+h_2^2+\Delta^2)$. □

§ 5. Исследование сходимости

Будем говорить, что метод сходится с порядком $h_1^{p_1}+h_2^{p_2}+\Delta^{p_3}$, если существует такая константа C, не зависящая от $\Delta,\ h_1,\ h_2$, что для всех $i=0,\ldots,N_1,\ k=0,\ldots,N_2,\ j=0,\ldots,M$ выполняется неравенство $|u(x_i,y_k,t_j)-u_{i,k}^j|\leqslant C(h_1^{p_1}+h_2^{p_2}+\Delta^{p_3})$.

Исследуем полученную схему (3.6)–(3.7) на сходимость с помощью вложения в общую разностную схему [3, 5].

Так как при любом допустимом весе s уравнение (3.6) разрешимо относительно $\widetilde{\gamma}_{j+1}$, то можно привести уравнение (3.6) к явной форме

$$\widetilde{\gamma}_{j+1}=2\widetilde{\gamma}_j-\widetilde{\gamma}_{j-1}-\Delta^2R_2^{-1}R_1^{-1}(A_1+A_2)\widetilde{\gamma}_j+\Delta^2R_2^{-1}R_1^{-1}(F^j(v(\cdot))). \tag{5.1}$$

МАТЕМАТИКА 2015. Т. 25. Вып. 1

Введем вектор $\gamma_j = (\gamma_j^1, \gamma_j^2)' = (\widetilde{\gamma}_{j-1}, \widetilde{\gamma}_j)' \in \Gamma$, где Γ — пространство размерности $q = 2(N_1+1)(N_2+1)$. Будем считать, что если в пространстве $\widetilde{\Gamma}$ определена норма (3.1), то в пространстве Γ она определяется следующим образом:

$$\|\gamma\|_\Gamma^2 = \|\gamma^1\|_{\widetilde{\Gamma}}^2 + \|\gamma^2\|_{\widetilde{\Gamma}}^2. \tag{5.2}$$

Соотношение (5.1) можно переписать в виде

$$\gamma_{j+1}^1 = \gamma_j^2, \quad \gamma_{j+1}^2 = 2\gamma_j^2 - \gamma_j^1 - \Delta^2 R_2^{-1} R_1^{-1}(A_1 + A_2)\gamma_j^2 + \Delta^2 R_2^{-1} R_1^{-1}(F^j(v(\cdot))).$$

В результате получаем разностную схему

$$\gamma_{j+1} = S\gamma_j + \Delta\Phi(t_j, I(\{\gamma_l\}_j), \Delta), \tag{5.3}$$

где $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 - \Delta^2 R_2^{-1} R_1^{-1}(A_1 + A_2) \end{pmatrix}$, $\Phi(t_j, I(\{\gamma_l\}_j), \Delta) = \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta R_2^{-1} R_1^{-1} F^j(I(\{\gamma_l^2\}_j)) \end{pmatrix}$.

Функцией точных значений модели в [3] называется отображение

$$Z(t_j) = z_j \in \Gamma, \ j = -m, \ldots, M;$$

в данном случае определим функцию точных значений для схемы (5.3) соотношениями

$$z_j = (z_j^1, z_j^2)' = (\widetilde{z}_{j-1}, \widetilde{z}_j)',$$

$$\widetilde{z}_j = \Big(u(x_0, y_0, t_j), u(x_0, y_1, t_j), \ldots, u(x_0, y_{N_2-1}, t_j), u(x_0, y_{N_2}, t_j), u(x_1, y_0, t_j), u(x_1, y_1, t_j), \ldots,$$
$$u(x_1, y_{N_2-1}, t_j), u(x_1, y_{N_2}, t_j), \ldots, u(x_{N_1}, y_0, t_j), u(x_{N_1}, y_1, t_j), \ldots, u(x_{N_1}, y_{N_2-1}, t_j), u(x_{N_1}, y_{N_2}, t_j)\Big)'.$$

Стартовыми значениями [3] назовем функцию $\{t_j = t_0 + j\Delta \in [t_0 - \tau, \ T], \ j = -m, \ldots, 0\} \to \Gamma$:

$$\gamma(t_j) = \gamma_j.$$

Будем говорить, что стартовые значения модели имеют порядок $h_1^{p_1} + h_2^{p_2} + \Delta^{p_3}$, если найдется константа C, не зависящая от $z_j, \ \gamma_j, \ \Delta, \ h_1 \ h_2$, такая, что

$$\|z_j - \gamma_j\|_\Gamma \leqslant C(h_1^{p_1} + h_2^{p_2} + \Delta^{p_3}), \ j = -m, \ldots, 0.$$

Например, можно определить стартовые значения модели (5.3) следующим образом:

$$\gamma_j = z_j = (z_j^1, z_j^2)' = (\widetilde{z}_{j-1}, \widetilde{z}_j)',$$

$$\widetilde{z}_j = \Big(\varphi(x_0, y_0, t_j), \varphi(x_0, y_1, t_j), \ldots, \varphi(x_0, y_{N_2}, t_j), \varphi(x_1, y_0, t_j), \varphi(x_1, y_1, t_j), \ldots, \varphi(x_1, y_{N_2}, t_j), \ldots,$$
$$\varphi(x_{N_1}, y_0, t_j), \varphi(x_{N_1}, y_1, t_j), \ldots, \varphi(x_{N_1}, y_{N_2}, t_j)\Big)', \quad j = -m, \ldots, 0.$$

Тогда $p_1 = \infty, \ p_2 = \infty$.

Погрешность аппроксимации (невязка) с интерполяцией в общей разностной схеме [3, 5, 6] определяется следующим образом:

$$d_n = (z_{n+1} - Sz_n)/\Delta - \Phi\big(t_n, I(\{z_i\}_{-m}^n), \Delta\big), \quad n = 0, \ldots, M-1. \tag{5.4}$$

Будем говорить, что метод имеет порядок погрешности аппроксимации с интерполяцией $h_1^{p_1} + h_2^{p_2} + \Delta^{p_3}$, если существует константа C, не зависящая от $d_n, \ \Delta, \ h_1, \ h_2$, такая, что

$$\|d_n\| \leqslant C(h_1^{p_1} + h_2^{p_2} + \Delta^{p_3}), \ n = 1, \ldots, M.$$

Данное определение невязки отличается от введенного ранее определения невязки без интерполяции (4.1). Однако справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть невязка в смысле* (4.1) *имеет порядок* $\Delta^{p_1} + h_1^{p_2} + h_2^{p_3}$, *функции* $F_{i,k}^j$ *липшицевы, оператор интерполяции–экстраполяции* I *имеет порядок погрешности* p_0 *на точном решении,* σ_1 *и* σ_2 *зафиксированы, тогда невязка с интерполяцией в смысле* (5.4) *имеет одинаковый порядок погрешности по* Δ, h_1 *и* h_2, *равный* $\Delta^{\min\{p_0, p_1, p_2, p_3\}+1}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим нормы координат невязки (5.4):

$$\|d_n^1\|^2_{\widetilde{\Gamma}} = \|(z_{n+1}^1 - z_n^2)/\Delta\|^2 = \left\|\frac{\widetilde{z}_n - \widetilde{z}_n}{\Delta}\right\|^2 = 0,$$

$$\|d_n^2\|^2_{\widetilde{\Gamma}} = \left\|\big(z_{n+1}^2 + z_n^1 - 2z_n^2 + \Delta^2 R_2^{-1}R_2^{-1}(A_1+A_2)z_n^2\big)/\Delta - \Delta R_2^{-1}R_1^{-1}\Big(F^n\big(I(\{z_l^2\}_n)\big)\Big)\right\|^2 =$$

$$= \left\|\frac{\widetilde{z}_{n+1} + \widetilde{z}_{n-1} - 2\widetilde{z}_n}{\Delta} + \Delta R_2^{-1}R_1^{-1}(A_1+A_2)\widetilde{z}_n - \Delta R_2^{-1}R_1^{-1}\Big(F^n\big(I(\{\widetilde{z}_l\}_n)\big)\Big)\right\|^2 =$$

$$= \Delta^2\left\|\frac{\widetilde{z}_{n+1} - 2\widetilde{z}_n + \widetilde{z}_{n-1}}{\Delta^2} + R_2^{-1}R_1^{-1}(A_1+A_2)\widetilde{z}_n - R_2^{-1}R_1^{-1}\Big(F^n\big(I(\{\widetilde{z}_l\}_n)\big)\Big)\right\|^2.$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned}\|d_n^2\|^2_{\widetilde{\Gamma}} &= \Delta^2\left\|\frac{\widetilde{z}_{n+1} - 2\widetilde{z}_n + \widetilde{z}_{n-1}}{\Delta^2} + R_2^{-1}R_1^{-1}(A_1+A_2)\widetilde{z}_n - R_2^{-1}R_1^{-1}\Big(F^n\big(I(\{\widetilde{z}_l\}_n)\big)\Big)\right\|^2 = \\ &= \Delta^2\|R_2^{-1}R_1^{-1}\|^2\left\|R_1R_2\left(\frac{\widetilde{z}_{n+1} - 2\widetilde{z}_n + \widetilde{z}_{n-1}}{\Delta^2}\right) + (A_1+A_2)\widetilde{z}_n - F^n\big(I(\{\widetilde{z}_l\}_n)\big)\right\|^2.\end{aligned} \tag{5.5}$$

С учетом определения (3.5) операторов R_1 и R_2 имеем

$$\left\|R_1R_2\left(\frac{\widetilde{z}_{n+1} - 2\widetilde{z}_n + \widetilde{z}_{n-1}}{\Delta^2}\right) + (A_1+A_2)\widetilde{z}_n - F^n\big(I(\{\widetilde{z}_l\}_n)\big)\right\|^2_{\widetilde{\Gamma}} =$$

$$= \left\|(E+\Delta^2 sA_1)(E+\Delta^2 sA_2)\left(\frac{\widetilde{z}_{n+1} - 2\widetilde{z}_n + \widetilde{z}_{n-1}}{\Delta^2}\right) + (A_1+A_2)\widetilde{z}_n - F^n\big(I(\{\widetilde{z}_l\}_n)\big)\right\|^2 =$$

$$= \bigg\|\frac{\widetilde{z}_{n+1} - 2\widetilde{z}_n + \widetilde{z}_{n-1}}{\Delta^2} + s(A_1+A_2)(\widetilde{z}_{n+1} - 2\widetilde{z}_n + \widetilde{z}_{n-1}) +$$

$$+ \Delta^2 s^2 A_1A_2(\widetilde{z}_{n+1} - 2\widetilde{z}_n + \widetilde{z}_{n-1}) + (A_1+A_2)\widetilde{z}_n - F^n\big(I(\{\widetilde{z}_l\}_n)\big)\bigg\|^2_{\widetilde{\Gamma}}.$$

Тогда по определению (3.1) нормы в $\widetilde{\Gamma}$ получаем

$$\bigg\|\frac{\widetilde{z}_{n+1} - 2\widetilde{z}_n + \widetilde{z}_{n-1}}{\Delta^2} + s(A_1+A_2)(\widetilde{z}_{n+1} - 2\widetilde{z}_n + \widetilde{z}_{n-1}) + \Delta^2 s^2 A_1A_2(\widetilde{z}_{n+1} - 2\widetilde{z}_n + \widetilde{z}_{n-1}) +$$

$$+ (A_1+A_2)\widetilde{z}_n - F^n\big(I(\{\widetilde{z}_l\}_n)\big)\bigg\|^2_{\widetilde{\Gamma}} =$$

$$= \sum_{i=1}^{N_1-1}\sum_{k=1}^{N_2-1}\bigg|\frac{u(x_i,y_k,t_{n+1}) - 2u(x_i,y_k,t_n) + u(x_i,y_k,t_{n-1})}{\Delta^2} -$$

$$- sa^2\bigg(\frac{u(x_{i+1},y_k,t_{n+1}) - 2u(x_i,y_k,t_{n+1}) + u(x_{i-1},y_k,t_{n+1})}{h_1^2} +$$

$$+ \frac{u(x_i,y_{k+1},t_{n+1}) - 2u(x_i,y_k,t_{n+1}) + u(x_{i-1},y_{k-1},t_{n+1})}{h_2^2}\bigg) -$$

$$- (1-2s)a^2\bigg(\frac{u(x_{i+1},y_k,t_n) - 2u(x_i,y_k,t_n) + u(x_{i-1},y_k,t_n)}{h_1^2} +$$

$$+ \frac{u(x_i,y_{k+1},t_n) - 2u(x_i,y_k,t_n) + u(x_i,y_{k-1},t_n)}{h_2^2}\bigg) -$$

$$- sa^2\Bigg(\frac{u(x_{i+1},y_k,t_{n-1})-2u(x_i,y_k,t_{n-1})+u(x_{i-1},y_k,t_{n-1})}{h_1^2}+$$

$$+\frac{u(x_i,y_{k+1},t_{n-1})-2u(x_i,y_k,t_{n-1})+u(x_i,y_{k-1},t_{n-1})}{h_2^2}\Bigg)+$$

$$+\frac{\Delta^2 s^2 a^4}{h_1^2 h_2^2}\Bigg(\Big(u(x_{i+1},y_{k+1},t_{n+1})-2u(x_{i+1},y_k,t_{n+1})+u(x_{i+1},y_{k-1},t_{n+1})\Big)-$$

$$-2\Big(u(x_i,y_{k+1},t_{n+1})-2u(x_i,y_k,t_{n+1})+u(x_i,y_{k-1},t_{n+1})\Big)+\Big(u(x_{i-1},y_{k+1},t_{n+1})-2u(x_{i-1},y_k,t_{n+1})+$$

$$+u(x_{i-1},y_{k-1},t_{n+1})\Big)-2\Big(u(x_{i+1},y_{k+1},t_n)-2u(x_{i+1},y_k,t_n)+u(x_{i+1},y_{k-1},t_n)\Big)+$$

$$+4\Big(u(x_i,y_{k+1},t_{n+1})-2u(x_i,y_k,t_n)+u(x_i,y_{k-1},t_n)\Big)-2\Big(u(x_{i-1},y_{k+1},t_{n+1})-2u(x_{i-1},y_k,t_n)+$$

$$+u(x_{i-1},y_{k-1},t_n)\Big)+\Big(u(x_{i+1},y_{k+1},t_{n-1})-2u(x_{i+1},y_k,t_{n-1})+u(x_{i+1},y_{k-1},t_{n-1})\Big)-$$

$$-2\Big(u(x_i,y_{k+1},t_{n-1})-2u(x_i,y_k,t_{n-1})+u(x_i,y_{k-1},t_{n-1})\Big)+$$

$$+\Big(u(x_{i-1},y_{k+1},t_{n-1})-2u(x_{i-1},y_k,t_{n-1})+u(x_{i-1},y_{k-1},t_{n-1})\Big)\Bigg)-F^n_{i,k}\big(I(\{u^l_{i,k}\}^n)\big)\Big|^2. \qquad (5.6)$$

Оценим каждое слагаемое под знаком суммы в (5.6), используя предположения теоремы:

$$\Big|\frac{u(x_i,y_k,t_{n+1})-2u(x_i,y_k,t_n)+u(x_i,y_k,t_{n-1})}{\Delta^2}-$$

$$- sa^2\Bigg(\frac{u(x_{i+1},y_k,t_{n+1})-2u(x_i,y_k,t_{n+1})+u(x_{i-1},y_k,t_{n+1})}{h_1^2}+$$

$$+\frac{u(x_i,y_{k+1},t_{n+1})-2u(x_i,y_k,t_{n+1})+u(x_{i-1},y_{k-1},t_{n+1})}{h_2^2}\Bigg)-$$

$$-(1-2s)a^2\Bigg(\frac{u(x_{i+1},y_k,t_n)-2u(x_i,y_k,t_n)+u(x_{i-1},y_k,t_n)}{h_1^2}+$$

$$+\frac{u(x_i,y_{k+1},t_n)-2u(x_i,y_k,t_n)+u(x_i,y_{k-1},t_n)}{h_2^2}\Bigg)-$$

$$- sa^2\Bigg(\frac{u(x_{i+1},y_k,t_{n-1})-2u(x_i,y_k,t_{n-1})+u(x_{i-1},y_k,t_{n-1})}{h_1^2}+$$

$$+\frac{u(x_i,y_{k+1},t_{n-1})-2u(x_i,y_k,t_{n-1})+u(x_i,y_{k-1},t_{n-1})}{h_2^2}\Bigg)+$$

$$+\frac{\Delta^2 s^2 a^4}{h_1^2 h_2^2}\Bigg(\Big(u(x_{i+1},y_{k+1},t_{n+1})-2u(x_{i+1},y_k,t_{n+1})+u(x_{i+1},y_{k-1},t_{n+1})\Big)-$$

$$-2\Big(u(x_i,y_{k+1},t_{n+1})-2u(x_i,y_k,t_{n+1})+u(x_i,y_{k-1},t_{n+1})\Big)+\Big(u(x_{i-1},y_{k+1},t_{n+1})-2u(x_{i-1},y_k,t_{n+1})+$$

$$+u(x_{i-1},y_{k-1},t_{n+1})\Big)-2\Big(u(x_{i+1},y_{k+1},t_n)-2u(x_{i+1},y_k,t_n)+u(x_{i+1},y_{k-1},t_n)\Big)+$$

$$+4\Big(u(x_i,y_{k+1},t_{n+1})-2u(x_i,y_k,t_n)+u(x_i,y_{k-1},t_n)\Big)-2\Big(u(x_{i-1},y_{k+1},t_{n+1})-2u(x_{i-1},y_k,t_n)+$$

$$+ u(x_{i-1}, y_{k-1}, t_n)\Big) + \Big(u(x_{i+1}, y_{k+1}, t_{n-1}) - 2u(x_{i+1}, y_k, t_{n-1}) + u(x_{i+1}, y_{k-1}, t_{n-1})\Big) -$$

$$- 2\Big(u(x_i, y_{k+1}, t_{n-1}) - 2u(x_i, y_k, t_{n-1}) + u(x_i, y_{k-1}, t_{n-1})\Big) + \Big(u(x_{i-1}, y_{k+1}, t_{n-1}) -$$

$$- 2u(x_{i-1}, y_k, t_{n-1}) + u(x_{i-1}, y_{k-1}, t_{n-1})\Big)\Bigg) - F^n_{i,k}(I(\{u^l_{i,k}\}^n)) \pm F^n_{i,k}(u_{t_n}(x_i, y_k, \cdot))\Big| \leqslant$$

$$\leqslant |\psi^n_{i,k}| + |F^n_{i,k}(u_{t_n}(x_i, y_k, \cdot)) - F^n_{i,k}(I(\{u^l_{i,k}\}^n))| \leqslant$$

$$\leqslant C_1(\Delta^{p_1} + h_1^{p_2} + h_2^{p_3}) + L_F\|u_{t_n}(x_i, \cdot) - I(\{u^l_{i,k}\}^n)\|_Q \leqslant C_1(\Delta^{p_1} + h_1^{p_2} + h_2^{p_3}) + L_F C_2 \Delta^{p_0}. \quad (5.7)$$

В результате из (5.5), (5.6), (5.7) получаем

$$\|d_n\|^2_Y \leqslant \Delta^2 \|R_2^{-1} R_1^{-1}\|^2 \left(\sum_{i=1}^{N_1-1}\sum_{k=1}^{N_2-1}\Big(C_1(\Delta^{p_1} + h_1^{p_2} + h_2^{p_3}) + L_F C_2 \Delta^{p_0}\Big)^2\right) =$$

$$= \Delta^2 \|R_2^{-1} R_1^{-1}\|^2 (N_1 - 1)(N_2 - 1)\Big(C_1(\Delta^{p_1} + h_1^{p_2} + h_2^{p_3}) + L_F C_2 \Delta^{p_0}\Big)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \Delta^2 (C_3 \Delta^{\min\{p_1, p_0\}} + C_4 h_1^{p_2} + C_4 h_2^{p_3})^2 =$$

$$= \Delta^2 \left(C_3 \Delta^{\min\{p_1, p_0\}} + C_4\, (a\Delta/\sqrt{\sigma_1})^{p_2} + C_4\, (a\Delta/\sqrt{\sigma_2})^{p_3}\right)^2,$$

где $C_3 = \|R_2^{-1} R_1^{-1}\|\Big(\sqrt{(N_1 - 1)(N_2 - 1)}\ (C_1 + L_F C_2)\Big)$, $C_4 = \|R_2^{-1} R_1^{-1}\|\sqrt{(N_1 - 1)(N_2 - 1)}\ C_1$.

То есть справедлива оценка

$$\|d_n\|_\Gamma \leqslant C \Delta^{\min\{p_0, p_1, p_2, p_3\}+1},$$

где $C = C_3 + C_4(a/\sqrt{\sigma_1})^{p_2} + C_4(a/\sqrt{\sigma_2})^{p_3}$. □

Исследуем устойчивость схемы (5.3). Назовем метод устойчивым, если

$$\|S\| \leqslant 1.$$

Рассмотрим однородную разностную схему, соответствующую (3.6):

$$R_1 R_2 (\widetilde{\gamma}_{j+1} - 2\widetilde{\gamma}_j + \widetilde{\gamma}_{j-1}) + \Delta^2 (A_1 + A_2)\widetilde{\gamma}_j = 0. \quad (5.8)$$

Операторы A_1(3.2) и A_2(3.3) самосопряженные и положительные в смысле скалярного произведения векторов $\widetilde{\gamma} = (\widetilde{\gamma}_{0,0}, \widetilde{\gamma}_{0,1}, \ldots, \widetilde{\gamma}_{N_1,N_2})' \in \widetilde{\Gamma}$ и $\widetilde{\omega} = (\widetilde{\omega}_{0,0}, \widetilde{\omega}_{0,1}, \ldots, \widetilde{\omega}_{N_1,N_2})' \in \widetilde{\Gamma}$:

$$(\widetilde{\gamma}, \widetilde{\omega}) = \sum_{i=0}^{N_1}\sum_{k=0}^{N_2} \widetilde{\gamma}_{i,k}\widetilde{\omega}_{i,k} h_1 h_2,$$

тогда операторы $(A_1 + A_2), R_1, R_2$ самосопряженные и положительные. Кроме того, так как операторы A_1 и A_2 перестановочны, то операторы $A_1 A_2$ и $R_1 R_2$ также самосопряженные и положительные.

В [4, с. 353] доказано, что если для схемы выполняется условие

$$R_1 R_2 > \frac{\Delta^2}{4}(A_1 + A_2), \quad (5.9)$$

то при любых начальных условиях для решения (5.8) справедливо неравенство

$$\|\widetilde{\gamma}_{n+1}\|_* \leqslant \|\widetilde{\gamma}_n\|_*, \quad (5.10)$$

где

$$\|\widetilde{\gamma}_n\|_* = \frac{\Delta^2}{4}\Big((A_1 + A_2)(\widetilde{\gamma}_n + \widetilde{\gamma}_{n-1}),\, \widetilde{\gamma}_n + \widetilde{\gamma}_{n-1}\Big) + \Big(\big(R_1R_2 - \frac{\Delta^2}{4}(A_1 + A_2)\big)(\widetilde{\gamma}_n + \widetilde{\gamma}_{n-1}),\, \widetilde{\gamma}_n + \widetilde{\gamma}_{n-1}\Big).$$

Теперь рассмотрим однородную схему, соответствующую (5.3):

$$\gamma_{j+1} = S\gamma_j. \tag{5.11}$$

Из неравенства (5.10) следует, что $\|\gamma^1_{n+1}\|_* \leqslant \|\gamma^1_n\|_*$, $\|\gamma^2_{n+1}\|_* \leqslant \|\gamma^2_n\|_*$. Тогда по определению нормы (5.2) в пространстве получаем

$$\|\gamma_{n+1}\|^2_\Gamma = \|\gamma^1_{n+1}\|^2_* + \|\gamma^2_{n+1}\|^2_* \leqslant \|\gamma^1_n\|^2_* + \|\gamma^2_n\|^2_* = \|\gamma_n\|^2_\Gamma.$$

Отсюда вытекает неравенство $\|\gamma_{n+1}\|_\Gamma \leqslant \|\gamma_n\|_\Gamma$, что означает выполнение следующей оценки для уравнения (5.11):

$$\|S\| \leqslant 1.$$

Следовательно, схема (5.3) устойчива, если выполнено условие (5.9).

Перепишем операторное условие устойчивости (5.9) в виде

$$E + \Delta^2\left(s - \frac{1}{4}\right)(A_1 + A_2) + \Delta^4 s^2 A_1 A_2 > 0.$$

Это условие означает, что для любого ненулевого $\widetilde{\gamma} \in \widetilde{\Gamma}$

$$(\widetilde{\gamma}, \widetilde{\gamma}) + \Delta^2\left(s - \frac{1}{4}\right)\Big((A_1 + A_2)\widetilde{\gamma}, \widetilde{\gamma}\Big) + \Delta^4 s^2 (A_1A_2\widetilde{\gamma}, \widetilde{\gamma}) > 0.$$

В силу положительной определенности оператора A_1A_2 неравенство будет выполнено, если потребовать

$$(\widetilde{\gamma}, \widetilde{\gamma}) + \Delta^2\left(s - \frac{1}{4}\right)\Big((A_1 + A_2)\widetilde{\gamma}, \widetilde{\gamma}\Big) > 0. \tag{5.12}$$

Наибольшие собственные значения операторов A_1 (3.2) и A_2 (3.3) оцениваются сверху величинами $4a^2/h_1^2$ и $4a^2/h_2^2$ соответственно [4]. Следовательно,

$$(A_1\widetilde{\gamma}, \widetilde{\gamma}) < \frac{4a^2}{h_1^2}(\widetilde{\gamma}, \widetilde{\gamma}), \quad (A_2\widetilde{\gamma}, \widetilde{\gamma}) < \frac{4a^2}{h_2^2}(\widetilde{\gamma}, \widetilde{\gamma}).$$

Получаем следующее соотношение:

$$(\widetilde{\gamma}, \widetilde{\gamma}) > \frac{h_1^2 h_2^2}{4a^2(h_1^2 + h_2^2)}\big((A_1 + A_2)\widetilde{\gamma}, \widetilde{\gamma}\big).$$

Значит, неравенство (5.12) будет выполнено, если

$$\frac{h_1^2 h_2^2}{4a^2(h_1^2 + h_2^2)} + \Delta^2\left(s - \frac{1}{4}\right) > 0.$$

Таким образом, схема устойчива, если

$$(1 - 4s)(\sigma_1 + \sigma_2) < 1, \tag{5.13}$$

где $\sigma_1 = a^2\Delta^2/h_1^2$, $\sigma_2 = a^2\Delta^2/h_2^2$.

Например, при $s = 0$ схема устойчива, если

$$\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} < \frac{1}{a^2\Delta^2},$$

а при $s = 1$ условие устойчивости выполняется при любом соотношении шагов.

Используя теорему 2 из [3], получаем следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть выполнено условие устойчивости* (5.13), *невязка имеет порядок* $\Delta^{p_1} + h_1^{p_2} + h_2^{p_3}$, *функционалы* $F_{i,k}^j$ *липшицевы, оператор интерполяции–экстраполяции* I *имеет порядок погрешности* p_0 *на точном решении, стартовые значения имеют порядок* $\Delta^{p_4} + h_1^{p_5} + h_2^{p_6}$, σ_1 *и* σ_2 *зафиксированы. Тогда метод сходится с порядком*

$$\Delta^{\min\{\min\{p_0,p_1,p_2,p_3\}+1,p_4\}} + h_1^{\min\{\min\{p_0,p_1,p_2,p_3\}+1,p_5\}} + h_2^{\min\{\min\{p_0,p_1,p_2,p_3\}+1,p_6\}}.$$

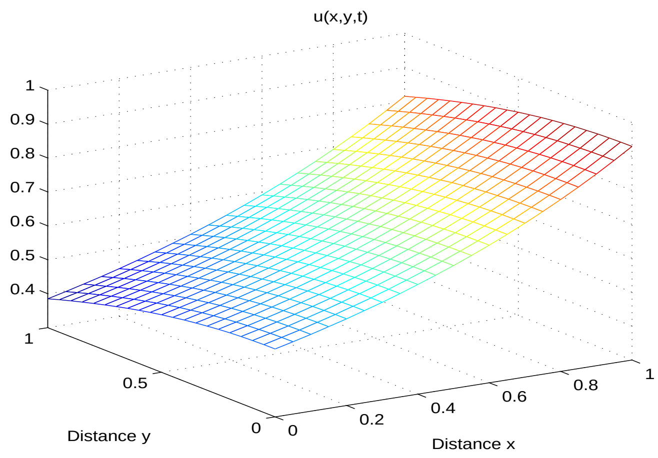

Рис. 1. $s = 1/2,\ N_1 = 20,\ N_2 = 20,\ M = 80$

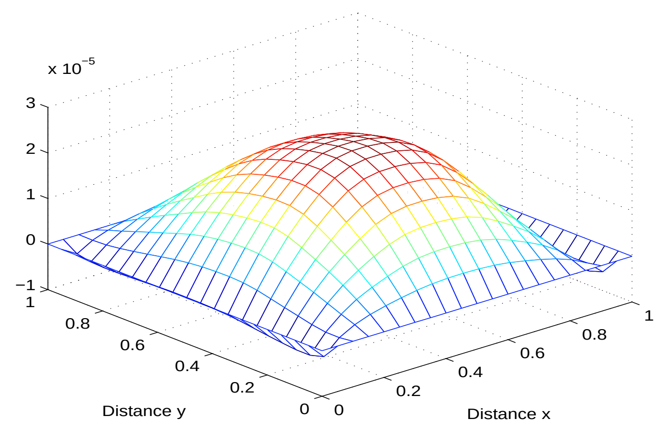

Рис. 2. $s = 1/2,\ N_1 = 20,\ N_2 = 20,\ M = 80$

§ 6. Примеры численных расчетов

Рассмотрим уравнение с переменным запаздыванием:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - a^2t^2(e^x - \cos y) + 2(e^x + \cos y) -$$
$$-\big(t-\tau(t)\big)^2(e^x + \cos y) + u\big(x,y,t-\tau(t)\big),\ 0 \leqslant t \leqslant 1,\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1$$

при $\tau(t) = t^2$, $a = 1$ с начальными:

$$u(x,y,t) = (e^x + \cos y)t^2,\ -1 \leqslant t \leqslant 0,\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1$$

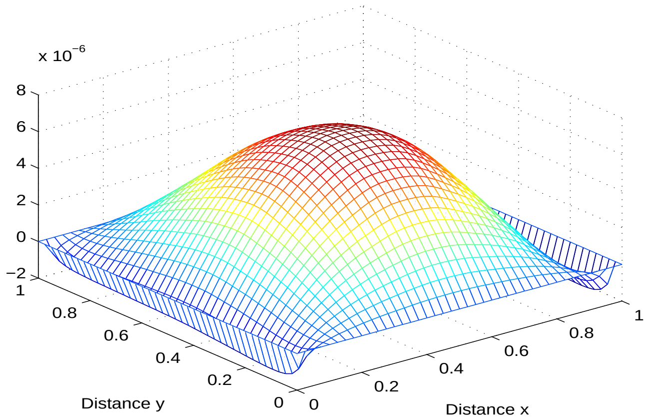

Рис. 3. $s = 1/2,\ N_1 = 40,\ N_2 = 40,\ M = 160$

и граничными:

$$u(0,y,t) = (1+\cos y)t^2,\ u(1,y,t) = (e+\cos y)t^2,\ 0 \leqslant t \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1;$$
$$u(x,0,t) = (e^x+1)t^2,\ u(x,1,t) = (e^x+\cos(1))t^2,\ 0 \leqslant t \leqslant 1,\ 0 \leqslant x \leqslant 1$$

условиями.

Уравнение имеет точное решение $u(x,y,t) = (e^x + \cos y)t^2$.

На рисунке 1 изображено приближенное решение этого уравнения, полученное методом (3.6), для которого $F^j_{i,k}(v(\cdot)) = f\big(t_j, x_i, y_k, u^j_{i,k}, v^j_{i,k}(\cdot)\big)$, с кусочно-линейной интерполяцией при $s = 1/2,\ t = 1/2$, с числом точек разбиения по x и y, равным 20, по t, равным 80. На рисунках 2 и 3 приведена разность между точным и приближенным решением при разных соотношениях шагов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wu J. Theory and application of partial functional differential equations. New York: Springer-Verlag, 1996. 438 p.
2. Пименов В.Г., Таширова Е.Е. Численные методы решения уравнения гиперболического типа с наследственностью // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18. № 2. С. 222–231.
3. Пименов В.Г., Ложников А.Б. Разностные схемы численного решения уравнения теплопроводности с последействием // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17. № 1. С. 178–189.
4. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989. 656 с.
5. Пименов В.Г. Общие линейные методы численного решения функционально-дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37. № 1. С. 105–114.
6. Ким А.В., Пименов В.Г. i-гладкий анализ и численные методы решения функционально-дифференциальных уравнений. М.–Ижевск: РХД, 2004. 256 с.
7. Лекомцев А.В., Пименов В.Г. Сходимость метода переменных направлений численного решения уравнения теплопроводности с запаздыванием // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16. № 1. С. 102–118.
8. Калиткин Н.Н. Численные методы. СПб.: БХВ-Петербург, 2011. 586 с.
9. Таширова Е.Е. Численные методы решения двумерного волнового уравнения с последействием // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2013. Т. 18. Вып. 5-2. С. 2704–2706.

Поступила в редакцию 17.12.2014

МАТЕМАТИКА 2015. Т. 25. Вып. 1

Таширова Екатерина Евгеньевна, аспирант, Уральский федеральный университет, 620000, Россия, г. Екатеринбург, ул. Тургенева, 4.
E-mail: linetisa@yandex.ru

E. E. Tashirova

Convergence of the difference method of solving the two-dimensional wave equation with heredity

Keywords: difference methods, two-dimensional wave equation, time delay, interpolation, factorization, order of convergence.

MSC: 35L20

The paper presents the consideration of the wave equation with two space variables and one time variable and with heredity effect

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + f\bigl(x, y, t, u(x, y, t), u_t(x, y, \cdot)\bigr), \quad u_t(x, y, \cdot) = \bigl\{u(x, y, t + \xi), -\tau \leqslant \xi \leqslant 0\bigr\}.$$

A family of grid methods is constructed for the numerical solution of this equation; the methods are based on the idea of separating the current state and the history function. A complete analog of the factorization method which is known for an equation without delay is constructed according to the current state. Influence of prehistory is taken into consideration by interpolation constructions. The local error order of the algorithm is investigated. A theorem on the convergence and on the order of convergence of methods is obtained by means of embedding into a general difference scheme with aftereffect. The results of calculating a test example with variable delay are presented.

REFERENCES

1. Wu J. *Theory and application of partial functional differential equations*, New York: Springer-Verlag, 1996, 438 p.
2. Pimenov V.G., Tashirova E.E. Numerical methods for solving a hereditary equation of hyperbolic type, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2013, vol. 281, issue 1 supplement, pp. 126–136.
3. Pimenov V.G., Lozhnikov A.B. Difference schemes for the numerical solution of the heat conduction equation with aftereffect, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2011, vol. 275, issue 1 supplement, pp. 137–148.
4. Samarskii A.A. *Teoriya raznostnykh skhem* (Theory of difference schemes), Moscow: Nauka, 1989, 656 p.
5. Pimenov V.G. General linear methods for the numerical solution of functional-differential equations, *Differential Equations*, 2001, vol. 37, no. 1, pp. 116–127.
6. Kim A.V., Pimenov V.G. *i-gladkii analiz i chislennye metody resheniya funktsional'no-differentsial'nykh uravnenii* (i-smooth calculus and numerical methods for functional differential equations), Moscow–Izhevsk: Regular and Chaotic Dynamics, 2004, 256 p.
7. Lekomtsev A.V., Pimenov V.G. Convergence of the alternating direction method for the numerical solution of a heat conduction equation with delay, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2011, vol. 272, issue 1 supplement, pp. 101–118.
8. Kalitkin N.N. *Chislennye metody* (Numerical methods), St. Petersburg: BHV-Petersburg, 2011, 586 p.
9. Tashirova E.E. Numerical methods for solving two-dimensional wave equation with aftereffect, *Vestn. Tambov. Univ. Ser. Estestv. Tekh. Nauki*, 2013, vol. 18, no. 5-2, pp. 2704–2706 (in Russian).

Received 17.12.2014

Tashirova Ekaterina Evgen'evna, Post-graduate student, Ural Federal University, ul. Turgeneva, 4, Yekaterinburg, 620000, Russia.
E-mail: linetisa@yandex.ru