МАТЕМАТИКА 2015. Т. 25. Вып. 1

УДК 517.935, 517.938

© *Я. Ю. Ларина*

ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА И ТЕОРЕМЫ СРАВНЕНИЯ ДЛЯ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

Результаты исследований Е.Л. Тонкова и Е.А. Панасенко распространяются на дифференциальные уравнения и управляемые системы с импульсным воздействием. В терминах функций Ляпунова и производной Кларка получены теоремы сравнения для систем с импульсным воздействием. Рассматривается множество $\mathfrak{M} \doteq \big\{(t,x) \in [t_0,+\infty) \times \mathbb{R}^n : x \in M(t)\big\}$, заданное непрерывной функцией $t \to M(t)$, где для каждого $t \in [t_0,+\infty)$ множество $M(t)$ непусто и компактно. Получены условия положительной инвариантности данного множества, равномерной устойчивости по Ляпунову и равномерной асимптотической устойчивости. Проведено сравнение с исследованиями других авторов, которые рассматривали вопросы устойчивости нулевого решения для аналогичных систем.

Ключевые слова: управляемые системы с импульсным воздействием, функции Ляпунова, дифференциальные включения.

Введение

Важнейший вклад в становление и развитие теории управляемых систем с импульсными воздействиями внесли работы В. И. Гурмана [1, 2], В. А. Дыхты [3], С. Т. Завалищина [4], Б. М. Миллера [5], А. Д. Мышкиса [6], А. Н. Сесекина [4, 7], А. М. Самойленко [8], А. А. Мартынюка [9] и многих других.

Приведем результаты работ, в которых получена оценка для решений систем с импульсным воздействием. В работе [8] исследуется система

$$\dot{x} = h(t,x), \quad t \neq \tau_i, \quad \Delta x|_{t=\tau_i} = I_i(x), \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \tag{0.1}$$

где $\Delta x|_{t=\tau_i} = x(\tau_i) - x(\tau_i - 0)$, $\tau_i < \tau_{i+1}$ для всех $i = 1,2,\ldots$; функции $h(t,x)$ и $I_i(x)$ непрерывны по своим переменным и удовлетворяют условию Липшица по x равномерно относительно t и i, т. е. существует постоянная $L > 0$ такая, что

$$\|h(t,x_1) - h(t,x_2)\| \leqslant L\|x_1 - x_2\|, \quad \|I_i(t,x_1) - I_i(t,x_2)\| \leqslant L\|x_1 - x_2\| \tag{0.2}$$

для всех $t \geqslant t_0$ и $i = 1,2,\ldots$. Системе уравнений (0.1) поставим в соответствие систему

$$\dot{y} = h(t,y) + R(t,y), \quad t \neq \tau_i, \quad \Delta y|_{t=\tau_i} = I_i(y) + R_i(y), \tag{0.3}$$

где функции $R(t,y)$ и $R_i(y)$ такие, что решения системы (0.3) существуют. Предположим, что для всех $y \in \mathbb{R}^n$, всех $t \geqslant t_0$ и всех $i = 1,2,\ldots$ выполнены неравенства

$$\|R(t,y)\| \leqslant \eta, \quad \|R_i(y)\| \leqslant \eta, \tag{0.4}$$

и рассмотрим решения $x(t,x_0)$ системы (0.1), $y(t,y_0)$ системы (0.3). Пусть эти решения определены при $t \in [t_0, t_0+T]$ и удовлетворяют начальным условиям $x(t_0,x_0) = x_0$, $y(t_0,y_0) = y_0$.

Теорема 1 (см. [8, с. 19]). *Если выполнены неравенства* (0.2) *и* (0.4), *то для решений* $x(t,x_0)$ *системы* (0.1) *и* $y(t,y_0)$ *системы* (0.3), *начальные значения которых удовлетворяют неравенству* $\|x_0 - y_0\| < \delta$, *при всех* $t \in [t_0, t_0+T]$ *справедлива оценка*

$$\|x(t,x_0) - y(t,y_0)\| < \Big(\delta + \frac{\eta}{L}\Big)^{(1+L)i(t_0,t)} e^{L(t-t_0)} - \frac{\eta}{L},$$

где $i(t_0,t)$ — *количество точек* τ_i *на отрезке* $[t_0,t]$.

В работе [8] также исследуется устойчивость решений импульсной системы (0.1) с помощью функций Ляпунова. Предполагается, что $h(t,0)=0$, $I_i(0)=0$, функции $h(t,x)$, $I_i(x)$ непрерывны на множестве $Z=\{(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n: t\geqslant t_0,\ \|x\|\leqslant b<b_0\}$, скалярная функция $V(t,x)$ удовлетворяет условию $V(t,0)=0$, определена и непрерывно дифференцируема на множестве

$$Z_0=\{(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n: t\geqslant t_0,\ \|x\|<b_0\}.$$

Функция $V(t,x)$ называется *положительно определенной* на множестве Z_0, если существует скалярная функция $W(x)$, $W(0)=0$, непрерывная при $\|x\|<b_0$ такая, что для всех $t\geqslant t_0$

$$V(t,x)\geqslant W(x)>0 \quad \text{при } x\neq 0.$$

Обозначим $\operatorname{grad}_x V(t,x)=\left(\dfrac{\partial V(t,x)}{\partial x_1},\dots,\dfrac{\partial V(t,x)}{\partial x_n}\right)$.

Теорема 2 (см. [8, с. 131]). *Если существует положительно определенная функция $V(t,x)$, удовлетворяющая в множестве Z неравенствам*

$$\begin{gathered}\frac{\partial V(t,x)}{\partial t}+\big\langle \operatorname{grad}_x V(t,x),h(t,x)\big\rangle\leqslant 0,\\ V(\tau_i,x+I_i(x))\leqslant V(\tau_i,x),\quad i=1,2,\dots,\end{gathered}\tag{0.5}$$

то тривиальное решение системы (0.1) *устойчиво.*

Если вместо второго неравенства из (0.5) *выполнено неравенство*

$$V(\tau_i,x+I_i(x))-V(\tau_i,x)\leqslant-\psi\big(V(\tau_i,x)\big),\quad i=1,2,\dots,$$

где $\psi(s)$ — непрерывная при $s\geqslant 0$ функция такая, что $\psi(0)=0$ и $\psi(s)>0$ при $s>0$, то нулевое решение системы (0.1) *асимптотически устойчиво по Ляпунову.*

В данной статье получено обобщение приведенных выше результатов, а также в терминах функций А. М. Ляпунова и производной Ф. Кларка доказаны теоремы сравнения для систем с импульсным воздействием. Исследуются условия положительной инвариантности заданного множества $\mathfrak{M}$ относительно управляемой системы, равномерной устойчивости по Ляпунову и равномерной асимптотической устойчивости. Отметим, что в этой работе рассматривается функция Ляпунова относительно заданного множества и ее определение (см. определение 2) отличается от общепринятых.

§ 1. Условия положительной инвариантности и асимптотической устойчивости для систем с импульсным воздействием

Покажем, что результаты исследований [10–13] можно распространить на управляемые системы с импульсным воздействием

$$\begin{gathered}\dot{x}=f(t,x,u),\quad t\neq\tau_i,\\ \Delta x|_{t=\tau_i}=g(x,w_i),\quad (t,x,u,w_i)\in[t_0,+\infty)\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^p.\end{gathered}\tag{1.1}$$

Здесь $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство с нормой $\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$; векторы w_i, $i=1,2,\dots$, являются управляющими воздействиями, влияющими на поведение системы в моменты времени $t=\tau_i$, и принимают значения в заданном компактном множестве $W\subset\mathbb{R}^p$. Предполагаем, что функции $f(t,x,u)$ и $g(x,w)$ непрерывны для всех $(t,x,u)\in[t_0,+\infty)\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ и всех $(x,w)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p$ соответственно, решения системы (1.1) непрерывны справа. Относительно последовательности $\{\tau_i\}_{i=0}^{\infty}$ полагаем, что

$$t_0=\tau_0<\ \tau_1<\tau_2<\dots\quad\text{и}\quad \lim_{i\to\infty}\tau_i=+\infty.$$

Определение 1. *Допустимым процессом управляемой системы* (1.1) назовем функцию

$$t \to (u(t), w(t), x(t)) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n,$$

которая удовлетворяет следующим условиям:

1) управление $u(t)$ определено на $I = (t_0, \tau_1) \cup (\tau_1, \tau_2) \cup \ldots$, ограничено и измеримо по Лебегу;

2) $w(t) = 0$ при $t \in I$ и $w(\tau_i) = w_i$, $w_i \in W$,

$$\Delta x|_{t=\tau_i} = x(\tau_i) - x(\tau_i - 0) = g(x, w_i), \quad i = 1, 2, \ldots;$$

3) решение $x(t)$ в смысле Каратеодори системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x, u(t))$$

определено для всех $t \in (\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, и $x(\tau_i) = x(\tau_i - 0) + g(x(\tau_i - 0), w_i)$;

4) имеет место включение $u(t) \in U(t, x(t))$, где $U(t, x) \subset \mathbb{R}^m$ — компактное множество и функция $(t, x) \to U(t, x)$ полунепрерывна сверху в метрике Хаусдорфа при всех $(t, x) \in \in [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$.

Отвечающие допустимому процессу $(u(t), w(t), x(t))$ управления $u(t)$ и $w(t)$ называются *допустимыми управлениями* системы (1.1).

Введем в рассмотрение множество $\mathfrak{M} \doteq \big\{(t, x) \in [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n : x \in M(t)\big\}$, заданное непрерывной в метрике Хаусдорфа функцией $t \to M(t)$, где для каждого $t \in [t_0, +\infty)$ множество $M(t)$ непусто и компактно. Пусть $M^r(t)$ — замкнутая r-окрестность множества $M(t)$, то есть множество таких точек $x \in \mathbb{R}^n$, что $\varrho(x, M(t)) \leqslant r$, $N^r(t) = M^r(t) \backslash M(t)$ — внешняя r-окрестность границы множества $M(t)$ (здесь $\varrho(x, M) = \inf\limits_{y \in M} \|x - y\|$ — расстояние от точки $x \in \mathbb{R}^n$ до множества $M \subset \mathbb{R}^n$). Построим множества

$$\mathfrak{M}^r \doteq \big\{(t, x) \in [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n : x \in M^r(t)\big\}, \quad \mathfrak{N}^r \doteq \big\{(t, x) \in [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n : x \in N^r(t)\big\}.$$

Определение 2 (см. [10]). Скалярная функция $V(t, x)$ переменных $(t, x) \in [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$ называется *функцией Ляпунова* относительно множества $\mathfrak{M}$, если она удовлетворяет локальному условию Липшица по переменным (t, x) и следующим условиям:

1) $V(t, x) = 0$ для всех $(t, x) \in \mathfrak{M}$;

2) $V(t, x) > 0$ для некоторого $r > 0$ для всех $(t, x) \in \mathfrak{N}^r$.

Функция $V(t, x)$ называется *определенно положительной* (относительно множества $\mathfrak{M}$), если для каждого $\varepsilon \in (0, r)$ найдется такое $\delta > 0$, что $V(t, x) \geqslant \delta$ для всех $(t, x) \in \mathfrak{M}^r \setminus \mathfrak{M}^\varepsilon$.

Поставим в соответствие системе $\dot{x} = f(t, x, u)$ дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(t, x), \quad F(t, x) = \overline{\operatorname{co}}\, H(t, x), \tag{1.2}$$

где для каждой фиксированной точки $(t, x) \in [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$ множество $H(t, x)$ состоит из всех предельных значений функции $f(t_i, x_i, U(t_i, x_i))$ при $(t_i, x_i) \to (t, x)$, $\overline{\operatorname{co}}\, H(t, x)$ — замыкание выпуклой оболочки множества $H(t, x)$, то есть наименьшее выпуклое замкнутое множество, содержащее множество $H(t, x)$. Поскольку функция $U(t, x)$ полунепрерывна сверху по (t, x), то функция $F(t, x)$ также полунепрерывна сверху, кроме того, множество $F(t, x)$ — непустое, ограниченное, замкнутое и выпуклое, поэтому для каждой начальной точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ локальное решение включения (1.2) существует (см. [14, с. 60]).

Условие 1. Для любого $x_0 \in M^r(t_0)$ каждое решение $\varphi(t, x_0)$ включения (1.2), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(t_0, x_0) = x_0$, определено при всех $t \geqslant t_0$.

Определение 3 (см. [15, с. 17]). Для локально липшицевой функции $V(t,x)$ *обобщенной производной* в точке $(t,x) \in [t_0,+\infty) \times \mathbb{R}^n$ по направлению вектора $q = (1,p)$, $p \in \mathbb{R}^n$ (производной Ф. Кларка) называется следующий верхний предел:

$$V^o(t,x;p) \doteq \limsup_{(\varepsilon,y)\to(0+0,x)} \frac{V(t+\varepsilon,y+\varepsilon p)-V(t,y)}{\varepsilon},$$

а выражение $V^o_{\max}(t,x) \doteq \sup\limits_{p\in F(t,x)} V^o(t,x;p)$ называется *верхней производной* функции V в силу дифференциального включения (1.2).

Определение 4 (см. [10], [16, гл. 5, с. 349]). Множество $\mathfrak{M}$ называется *положительно инвариантным* (относительно управляемой системы (1.1)), если для любого $x_0 \in M(t_0)$ каждое решение $x(t,x_0)$ системы (1.1) с начальным условием $x(t_0,x_0) = x_0$ удовлетворяет включению $(t,x(t,x_0)) \in \mathfrak{M}$ при всех $t \geqslant t_0$.

Определение 5 (см. [11], [16, гл. 5, с. 444]). Множество $\mathfrak{M}$ называется *равномерно устойчивым по Ляпунову* (относительно системы (1.1)), если оно положительно инвариантно, и для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любого $x_0 \in M^\delta(t_0)$ каждое решение $x(t,x_0)$ системы (1.1) удовлетворяет включению $(t,x(t,x_0)) \in \mathfrak{M}^\varepsilon$ при всех $t \geqslant t_0$.

Если $\mathfrak{M}$ равномерно устойчиво по Ляпунову и существует такое $r > 0$, что для любой начальной точки $(t_0,x_0) \in \mathfrak{M}^r$ каждое решение $x(t,x_0)$ системы (1.1) удовлетворяет равенству

$$\lim_{t\to\infty} \varrho(x(t,x_0),M(t)) = 0,$$

то множество $\mathfrak{M}$ называется *равномерно асимптотически устойчивым по Ляпунову* (относительно системы (1.1)).

В следующих утверждениях получены обобщения теоремы 2 на управляемые системы вида (1.1).

Лемма 1. *Если существует функция Ляпунова $V(t,x)$ относительно множества $\mathfrak{M}$ такая, что для всех $(t,x) \in \mathfrak{N}^r$ выполнены неравенства*

$$V^o_{\max}(t,x) \leqslant 0, \quad \max_{w\in W} V(\tau_i, x+g(x,w)) \leqslant V(\tau_i,x), \quad i = 1,2,\ldots, \tag{1.3}$$

то множество $\mathfrak{M}$ положительно инвариантно относительно системы (1.1). *Если, кроме того, функция Ляпунова $V(t,x)$ определенно положительная относительно множества $\mathfrak{M}$, то множество $\mathfrak{M}$ равномерно устойчиво по Ляпунову относительно системы* (1.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x(t,x_0)$ — произвольное решение системы (1.1), начинающееся в момент $t = t_0$ в множестве $M(t_0)$. Рассмотрим функцию $v(t) = V(t,x(t,x_0))$. Она является липшицевой в силу леммы 3 работы [10]. Тогда по теореме Радемахера (см. [17, с. 234]) функция $v(t)$ дифференцируема при почти всех t. Обозначим через $\operatorname{fr} M(t)$ границу множества $M(t)$. Пусть найдутся такие моменты времени t_1, t_2, что $t_0 \leqslant t_1 < t_2 < \tau$ и $x(t_1,x_0) \in \operatorname{fr} M(t_1)$, $x(t,x_0) \notin \operatorname{fr} M(t)$ при $t \in (t_1,t_2]$, тогда $v(t_2) = V(t_2,x(t_2,x_0)) > 0$. В точках дифференцируемости функции $v(t)$ выполнено следующее неравенство (см. [10]):

$$\dot v(t) \leqslant V^o_{\max}(t,x(t,x_0)),$$

поэтому, учитывая первое неравенство (1.3), имеем при почти всех $t \in (t_1,t_2]$ неравенство $\dot v(t) \leqslant 0$. Следовательно (см. [18, с. 133]), функция $v(t)$ является невозрастающей в тех промежутках интервала (t_1,t_2), на которых она непрерывна (точками разрыва $v(t)$ являются только точки τ_i). Далее рассмотрим функцию $v(t)$ в точках $\tau_i \in (t_1, t_2]$, тогда из второго неравенства (1.3) следует, что

$$v(\tau_i) = V(\tau_i, x(\tau_i, x_0)) = V\big(\tau_i, x(\tau_i - 0, x_0) + g(x(\tau_i - 0, x_0), w_i)\big) \leqslant \\ \leqslant \max_{w \in W} V\big(\tau_i, x(\tau_i - 0, x_0) + g(x(\tau_i - 0, x_0), w)\big) \leqslant V\big(\tau_i, x(\tau_i - 0, x_0)\big) = v(\tau_i - 0).$$

Таким образом, функция $v(t) = V(t, x(t, x_0))$ является невозрастающей вдоль любого решения системы (1.1), лежащего в $\mathfrak{N}^r$, поэтому $v(t_2) \leqslant v(t_1) = 0$. Получили противоречие с неравенством $v(t_2) > 0$. Это доказывает положительную инвариантность множества $\mathfrak{M}$.

Покажем, что множество $\mathfrak{M}$ устойчиво по Ляпунову. Выберем $\varepsilon \in (0, r)$ и обозначим

$$\alpha \doteq \alpha(\varepsilon) = \inf\{V(t, x) : (t, x) \in \operatorname{fr} \mathfrak{M}^\varepsilon\}.$$

Так как функция Ляпунова $V(t, x)$ определенно положительная, то $\alpha > 0$. По данному ε построим такое $\delta \in (0, \varepsilon)$, что $V(t, x) < \alpha$ для всех $(t, x) \in \mathfrak{N}^\delta$ (так как функция V непрерывна, такое δ существует). Предположим, что найдется t^* такое, что $(t^*, x(t^*, x)) \in \operatorname{fr} \mathfrak{M}^\varepsilon$. Так как $v(t_0) = V(t_0, x) < \alpha$, получаем противоречие

$$\alpha \leqslant v(t^*) \leqslant v(t_0) < \alpha,$$

которое доказывает, что множество $\mathfrak{M}$ равномерно устойчиво по Ляпунову. □

Теорема 3. *Пусть существует функция $V(t, x)$ — определенно положительная функция Ляпунова относительно множества $\mathfrak{M}$, и для всех $(t, x) \in \mathfrak{N}^r$ выполнены неравенства*

$$V^o_{\max}(t, x) \leqslant 0, \quad \max_{w \in W} V(\tau_i, x + g(x, w)) - V(\tau_i, x) \leqslant -\psi\big(V(\tau_i, x)\big), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{1.4}$$

где $\psi(s)$ — непрерывная при $s \geqslant 0$ функция такая, что $\psi(0) = 0$ и $\psi(s) > 0$ при $s > 0$. Тогда множество $\mathfrak{M}$ равномерно асимптотически устойчиво по Ляпунову относительно системы (1.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку из неравенств (1.4) следуют неравенства (1.3), то в силу леммы 1 множество $\mathfrak{M}$ равномерно устойчиво по Ляпунову; покажем, что оно асимптотически устойчиво по Ляпунову. Пусть $x(t, x_0)$ — решение системы (1.1), удовлетворяющее начальному условию $x(t_0, x_0) = x_0 \in M^r(t_0)$. Если $x_0 \in M(t_0)$, то из леммы 1 следует, что $\varphi(t, x_0) \in M(t)$ при всех $t \in [t_0, +\infty)$, поэтому равенство $\lim\limits_{t \to \infty} \varrho(\varphi(t, x_0), M(t)) = 0$ выполнено. Пусть теперь $x_0 \in N^r(t_0)$. Рассмотрим функцию $v(t) = V(t, x(t, x_0))$ и докажем, что $\lim\limits_{t \to \infty} v(t) = 0$. Первое неравество в (1.4) гарантирует невозрастание функции $v(t)$ в промежутках ее непрерывности (или в промежутках непрерывности до момента, при котором точка $(t, x(t, x_0))$ принадлежит множеству $\mathfrak{M}$, если такой момент времени существует). Далее рассмотрим функцию $v(t)$ в точках τ_i, для которых $v(\tau_i) > 0$. Тогда из неравенства (1.4) следует, что для любого $w \in W$ выполняется

$$v(\tau_i) = V\big(\tau_i, x(\tau_i, x_0)\big) = V\big(\tau_i, x(\tau_i - 0, x_0) + g(x(\tau_i - 0, x_0), w)\big) \leqslant \\ \leqslant V\big(\tau_i, x(\tau_i - 0, x_0)\big) - \psi\big(V(\tau_i, x(\tau_i - 0, x_0))\big) \leqslant v(\tau_i - 0).$$

Следовательно, функция $v(t)$ является невозрастающей для любого $t \in [t_0, +\infty)$ (или до момента, при котором точка $(t, x(t, x_0))$ принадлежит множеству $\mathfrak{M}$). Отметим, что, начиная с момента, при котором точка $(t, x(t, x_0))$ принадлежит множеству $\mathfrak{M}$, выполнено равенство $v(t) = 0$, поэтому в случае существования такого момента $\lim\limits_{t \to \infty} v(t) = 0$.

Пусть точка $(t, x(t, x_0))$ не принадлежит множеству $\mathfrak{M}$. Тогда для всех $t \in [t_0, +\infty)$ функция $v(t)$ является невозрастающей и удовлетворяет неравенству $v(t) > 0$. Таким образом, существует $\lim\limits_{t \to \infty} v(t) = a \geqslant 0$. Предположим, что $a > 0$. Пусть $c = \min\limits_{a \leqslant s \leqslant v(0)} \psi(s)$. В силу (1.4) имеем

$$v(\tau_i) - v(\tau_i - 0) \leqslant -\psi(v(\tau_i - 0))$$

при всех $i = 1, 2, \ldots$. Поскольку $a \leqslant v(\tau_i) \leqslant v(0)$, то $-\psi(v(\tau_i - 0)) \leqslant -c$, следовательно,

$$v(\tau_i) - v(\tau_i - 0) \leqslant -c.$$

Из невозрастания функции $v(t)$ следует, что $v(\tau_i) \geqslant v(\tau_{i+1} - 0)$ для всех $i = 1, 2, \ldots$. Отсюда для любого натурального k получаем

$$v(\tau_k) \leqslant v(\tau_k) + \sum_{i=0}^{k-1}(v(\tau_i) - v(\tau_{i+1} - 0)) = v(0) + \sum_{i=1}^{k}(v(\tau_i) - v(\tau_i - 0)) \leqslant v(0) - kc.$$

Правая часть последнего неравенства при больших значениях k становится отрицательной, что противоречит тому, что $\lim\limits_{t\to\infty} v(t) = a > 0$. Таким образом, $\lim\limits_{t\to\infty} v(t) = 0$.
Покажем, что $\lim\limits_{t\to\infty} \varrho(x(t, x_0), M(t)) = 0$. Предположим противное, тогда существуют константа $\varepsilon \in (0, r)$ и последовательность $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ такие, что $t_i \to \infty$ и $\varrho(x(t_i, x_0), M(t_i)) > \varepsilon$. Следовательно, $(t_i, x(t_i, x_0)) \notin \mathfrak{M}^{\varepsilon}$, и так как функция V определенно положительная, то найдется такое $\delta > 0$, что $V(t_i, x(t_i, x_0)) \geqslant \delta$. Это противоречит тому, что $\lim\limits_{t\to\infty} V(t, x(t, x_0)) = \lim\limits_{t\to\infty} v(t) = 0$. $\square$

§ 2. Теоремы сравнения для решений систем и уравнений с импульсами

В этом параграфе получены аналоги теоремы Ла Салля (см. [19, с. 276]) для управляемых систем с импульсным воздействием (1.1). Отметим, что для систем без импульсов $\dot{x} = f(t, x, u)$ подобные утверждения доказаны в работах [10, 12].

Рассмотрим дифференциальное уравнение с импульсным воздействием

$$\dot{z} = q(t, z), \quad t \neq \tau_i, \quad \Delta z|_{t=\tau_i} = l(z), \quad (t, z) \in [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

где функция $q(t, z)$ локально липшицева по z, а функция $l(z)$ непрерывна. Введем в рассмотрение функцию $L(z) = l(z) + z$ в предположении, что $L(z)$ неубывающая для всех $z \in \mathbb{R}$.

Теорема 4. *Пусть существуют функции $V(t, x)$, $q(t, z)$, $l(z)$ такие, что $V(t, x)$ является определенно положительной функцией Ляпунова относительно множества $\mathfrak{M}$ и для всех $(t, x) \in \mathfrak{N}^r$ выполнены неравенства*

$$V^{o}_{\max}(t, x) \leqslant q(t, V(t, x)), \quad \max_{w\in W} V(\tau_i, x + g(x, w)) \leqslant L\left(V(\tau_i, x)\right), \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{2.2}$$

Тогда если для решения $z(t)$ уравнения (2.1) *с начальным условием $z(t_0) = \max\limits_{x_0\in N^r(t_0)} V(t_0, x_0)$ выполнено равенство $\lim\limits_{t\to\infty} z(t) = 0$, то множество $\mathfrak{M}$ равномерно асимптотически устойчиво по Ляпунову относительно системы* (1.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x(t, x_0)$ — одно из решений системы (1.1), удовлетворяющее начальному условию $x(t_0, x_0) = x_0 \in M^r(t_0)$. Рассмотрим функцию $v(t) = V(t, x(t, x_0))$. В точках дифференцируемости этой функции выполнено неравенство $\dot{v}(t) \leqslant V^{o}_{\max}(t, x(t, x_0))$. Отсюда и из (2.2) следует, что неравенство $\dot{v}(t) \leqslant q(t, v(t))$ выполнено в промежутках непрерывности функции $v(t)$ (или в промежутках непрерывности до момента, при котором точка $(t, x(t, x_0))$ принадлежит множеству $\mathfrak{M}$, если такой момент времени существует). Отметим, что, начиная с момента, при котором точка $(t, x(t, x_0))$ принадлежит множеству $\mathfrak{M}$, выполнено равенство $v(t) = 0$, поэтому в случае существования такого момента $\lim\limits_{t\to\infty} v(t) = 0$. Далее рассмотрим случай, когда $(t, x(t, x_0))$ не принадлежит множеству $\mathfrak{M}$ для всех t. Так как

$$v(t_0) = V(t, x(t_0, x_0)) = V(t_0, x_0) \leqslant \max_{x_0\in M^r(t_0)} V(t_0, x_0) = z(t_0),$$

то в силу теоремы Чаплыгина о дифференциальных неравенствах (см. [20, с. 15]) неравенство $v(t) \leqslant z(t)$ верно при всех $t \in [t_0, \tau_1)$. Из второго неравенства (2.2) следует, что

$$v(\tau_1) = V(\tau_1, x(\tau_1, x_0)) = V(\tau_1, x(\tau_1 - 0, x_0) + g(x(\tau_1 - 0, x_0), w_1)) \leqslant$$
$$\leqslant \max_{w \in W} V(\tau_1, x(\tau_1 - 0, x_0) + g(x(\tau_1 - 0, x_0), w)) \leqslant L\left(V(\tau_1, x(\tau_1 - 0, x_0))\right) = L\left(v(\tau_1 - 0)\right).$$

Тогда $v(\tau_1) \leqslant L\left(v(\tau_1 - 0)\right) \leqslant L(z(\tau_1 - 0))$, так как функция $L(z)$ не убывает. Из равенства $z(\tau_1) = L(z(\tau_1 - 0))$ следует, что $v(\tau_1) \leqslant z(\tau_1)$. Рассуждая подобным образом, т. е. применяя далее теорему Чаплыгина на каждом промежутке $[\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = 1, 2, \ldots$, получаем, что неравенство $v(t) \leqslant z(t)$ верно для всех $t \in [t_0, +\infty)$. Поскольку функция $V(t,x)$ является функцией Ляпунова, то

$$0 \leqslant v(t) \leqslant z(t). \tag{2.3}$$

Из условия $\lim\limits_{t\to\infty} z(t) = 0$ и неравенства (2.3) следует, что $\lim\limits_{t\to\infty} v(t) = \lim\limits_{t\to\infty} V(t, x(t, x_0)) = 0$. Так же, как в доказательстве теоремы 3, из положительной определенности функции $V(t,x)$ и равенства $\lim\limits_{t\to\infty} v(t) = 0$ следует, что $\lim\limits_{t\to\infty} \varrho(x(t_0, x), M(t)) = 0$. $\square$

Положим теперь $\mathfrak{M} = \big\{(t,x) \in [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n : x \in M(t) = 0\big\}$. Тогда для этого множества справедливо утверждение о равномерной асимптотической устойчивости по Ляпунову, которое является следствием теоремы 4.

Следствие 1. *Пусть существуют функции $V(t,x)$, $q(t,z)$, $l(z)$ такие, что $V(t,x)$ является определенно положительной функцией Ляпунова относительно множества $\mathfrak{M}$ и для всех $(t,x) \in \mathfrak{N}^r = \{(t,x) \in [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n : \|x\| \leqslant r\}$ выполнены неравенства* (2.2). *Тогда если для решения $z(t)$ уравнения* (2.1) *с начальным условием $z(t_0) = \max\limits_{\|x_0\| \leqslant r} V(t_0, x_0)$ выполнено равенство $\lim\limits_{t\to\infty} z(t) = 0$, то для любого решения $x(t, x_0)$ системы* (1.1) *такого, что $\|x_0\| \leqslant r$, имеет место равенство $\lim\limits_{t\to\infty} x(t, x_0) = 0$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гурман В.И. Об оптимальных процессах особого управления // Автоматика и телемеханика. 1965. Т. 26. № 5. С. 782–791.
2. Гурман В.И. Вырожденные задачи оптимального управления. М.: Наука, 1977. 304 с.
3. Дыхта В.А., Самсонюк О.Н. Оптимальное импульсное управление с приложениями. М.: Физматлит, 2000. 256 с.
4. Завалищин С.Т., Сесекин А.Н. Импульсные процессы: модели и приложения. М.: Наука, 1991. 256 с.
5. Миллер Б.М. Метод разрывной замены времени в задачах оптимального управления импульсными и дискретно-непрерывными системами // Автоматика и телемеханика. 1993. № 12. С. 3–32.
6. Мышкис А.Д. Устойчивость решений дифференциальных уравнений при обобщенных импульсных возмущениях // Автоматика и телемеханика. 2007. № 10. С. 125–133.
7. Сесекин А.Н. О связности множества разрывных решений нелинейной динамической системы с импульсным управлением // Известия вузов. Математика. 1996. № 11. С. 85–93.
8. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. Киев: Вища школа, 1987. 287 с.
9. Лакшмикантам В., Лила С., Мартынюк А.А. Устойчивость движения: метод сравнения. Киев: Наукова думка, 1991. 247 с.
10. Панасенко Е.А., Тонков Е.Л. Инвариантные и устойчиво инвариантные множества дифференциальных включений // Труды Математического института им. В.А. Стеклова. 2008. Т. 262. С. 202–221.
11. Панасенко Е.А., Тонков Е.Л. Распространение теорем Е.А. Барбашина и Н.Н. Красовского об устойчивости на управляемые динамические системы // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15. № 3. С. 185–201.
12. Родина Л.И. Инвариантные и статистически слабо инвариантные множества управляемых систем // Известия Института математики и информатики УдГУ. 2012. Вып. 2 (40). С. 3–164.

13. Родина Л.И. Оценка статистических характеристик множества достижимости управляемых систем // Известия вузов. Математика. 2013. № 11. С. 20–32.
14. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 223 с.
15. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. 300 с.
16. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.: Гостехтеориздат, 1949. 550 с.
17. Федерер Г. Геометрическая теория меры. М.: Наука, 1987. 761 с.
18. Филиппов В.В. Пространства решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГУ, 1993. 336 с.
19. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
20. Чаплыгин С.А. Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. М., Л.: Гостехиздат, 1950. 102 с.

Поступила в редакцию 17.02.2015

Ларина Яна Юрьевна, аспирант, кафедра математического анализа, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: yana_larina89@mail.ru

Ya. Yu. Larina

Lyapunov functions and comparison theorems for control systems with impulsive actions

Keywords: control systems with impulsive actions, Lyapunov function, differential inclusions.

MSC: 34A60, 37N35, 49J15, 93B03

We extend the results of E.L. Tonkov and E.A. Panasenko to differential equations and control systems with impulsive actions. In terms of Lyapunov functions and the Clarke derivative we obtain comparison theorems for systems with impulsive effect. We consider the set $\mathfrak{M} \doteq \big\{(t,x) \in [t_0,+\infty) \times \mathbb{R}^n : x \in M(t)\big\}$, defined by continuous function $t \to M(t)$, where for every $t \in \mathbb{R}$ the set $M(t)$ is nonempty and compact. We obtain conditions for the positive invariance of this set, the uniform Lyapunov stability and the uniform asymptotic stability. We make a comparison with the researches of other authors who have considered the zero solution stability for similar systems.

REFERENCES

1. Gurman V.I. Optimal processes of singular control, *Automat. Remote Control*, 1965, vol. 26, pp. 783–792.
2. Gurman V.I. *Vyrozhdennye zadachi optimal'nogo upravleniya* (Singular problems of optimal control), Moscow: Nauka, 1977, 304 p.
3. Dykhta V.A., Samsonyuk O.N. *Optimal'noe impul'snoe upravlenie s prilozheniyami* (Optimal impulse control with applications), Moscow: Fizmatlit, 2000, 256 p.
4. Zavalishchin S.T., Sesekin A.N. *Impul'snye protsessy: modeli i prilozheniya* (Impulse processes: models and applications), Moscow: Nauka, 1991, 256 p.
5. Miller B.M. Method of discontinuous time change in optimal control pulse and discrete-continuous systems, *Automat. Remote Control*, 1993, vol. 54, no. 12, pp. 1727–1750.
6. Myshkis A.D. Stability of solutions of differential equations under generalized pulse perturbations, *Automat. Remote Control*, 2007, vol. 68, no. 10, pp. 1844–1851.
7. Sesekin A.N. On the connectedness of the set of discontinuous solutions of a nonlinear dynamical system with impulse control, *Russian Mathematics*, 1996, vol. 40, no. 11, pp. 82–89.
8. Samoilenko A.M., Perestyuk N.A. *Differentsial'nye uravneniya s impul'snym vozdeistviem* (Impulsive differential equations), Kiev: Vishcha shkola, 1987, 287 p.
9. Lakshmikantham V., Leela S., Martynyuk A.A. *Ustoichivost' dvizheniya: metod sravneniya* (Stability of motion: comparison method), Kiev: Naukova dumka, 1991, 247 p.
10. Panasenko E.A., Tonkov E.L. Invariant and stably invariant sets for differential inclusions, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2008, vol. 262, pp. 194–212.

11. Panasenko E.A., Tonkov E.L. Extension of E.A. Barbashin's and N.N. Krasovskii's stability theorems to controlled dynamical systems, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2010, vol. 268, suppl. 1, pp. 204–221.
12. Rodina L.I. Invariant and statistically weakly invariant sets of control systems, *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, 2012, no. 2 (40), pp. 3–164 (in Russian).
13. Rodina L.I. Estimation of statistical characteristics of attainability sets of controllable systems, *Russian Mathematics*, 2013, vol. 57, no. 11, pp. 17–27.
14. Filippov A.F. *Differentsial'nye uravneniya s razryvnoi pravoi chast'yu* (Differential equations with discontinuous right-hand side), Moscow: Nauka, 1985, 223 p.
15. Clarke F. *Optimization and nonsmooth analysis*, Wiley, 1983. Translated under the title *Optimizatsiya i negladkii analiz*, Moscow: Nauka, 1988, 300 p.
16. Nemytskii V.V., Stepanov V.V. *Qualitative theory of differential equations*, New Jersey: Princeton University Press, 1960, 523 p.
17. Federer H. *Geometricheskaya teoriya mery* (Geometric theory of measure), Moscow: Nauka, 1987, 761 p.
18. Filippov V.V. *Prostranstva reshenii obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii* (Spaces of solutions of ordinary differential equations), Moscow: Moscow State University, 1993, 336 p.
19. Demidovich B.P. *Lektsii po matematicheskoi teorii ustoichivosti* (Lectures on the mathematical theory of stability), Moscow: Nauka, 1967, 472 p.
20. Chaplygin S.A. *Novyi metod priblizhennogo integrirovaniya differentsial'nykh uravnenii* (A new method of approximate integration of differential equations), Moscow–Leningrad: Gostekhizdat, 1950, 102 p.

Received 17.02.2015

Larina Yana Yur'evna, Post-graduate student, Department of Mathematical Analysis, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: yana_larina89@mail.ru