МАТЕМАТИКА 2015. Т. 25. Вып. 1

УДК 517.917

© *И. Г. Ким*

НЕОСЦИЛЛЯЦИЯ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ОБОБЩЕННЫМИ ФУНКЦИЯМИ КОЛОМБО В КОЭФФИЦИЕНТАХ

Рассматривается уравнение

$$Lx \doteq x'' + P(t)x' + Q(t)x = 0, \quad t \in [a,b] \subset \mathcal{I} \doteq (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}, \tag{1}$$

где P, Q — C-обобщенные функции, определенные на $\mathcal{I}$ и представляющие собой смежные классы фактор-алгебры Коломбо. Пусть $\mathcal{R}_P$, $\mathcal{R}_Q$ — представители этих классов соответственно, $\mathcal{A}_N$ — классы финитных функций, необходимые для определения алгебры Коломбо. Получены новые достаточные условия неосцилляции уравнения (1): доказано, что если выполнено условие

$$(\exists\, N \in \mathbb{N})(\forall\, \varphi \in \mathcal{A}_N)(\exists\, \mu_0 < 1) \int_a^b |\mathcal{R}_P(\varphi_\mu, t)|\, dt + \int_a^b |\mathcal{R}_Q(\varphi_\mu, t)|\, dt < \frac{4}{b-a+4} \quad (0 < \mu < \mu_0),$$

где $\varphi_\mu \doteq \frac{1}{\mu}\varphi\left(\frac{t}{\mu}\right)$, то уравнение (1) неосцилляционно на $[a,b]$. Доказана теорема о разделении нулей и следствие, вытекающее из нее.

Ключевые слова: C-обобщенная функция, C-обобщенное число, слабое равенство, неосцилляция.

§ 1. Введение

Известно, какую роль играет неосцилляция в теории обыкновенного линейного дифференциального уравнения второго порядка с суммируемыми коэффициентами (см., например, [1]). В настоящей заметке приводится результат из теории неосцилляции для обыкновенного линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с коэффициентами — обобщенными функциями Коломбо (C-обобщенными функциями, см. [2]).

Приведем необходимые сведения из [2–4], для простоты ограничившись случаем $\mathcal{I} = \mathbb{R}$. Обозначим через $\mathcal{D}$ множество бесконечно дифференцируемых функций $\varphi : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$, имеющих компактный в $\mathcal{I}$ носитель (финитных функций). Для $k = 1, 2, \ldots$ положим

$$\mathcal{A}_k \doteq \left\{\varphi \in \mathcal{D} : \int_{\mathcal{I}} \varphi(t)\, dt = 1, \ \int_{\mathcal{I}} t^i \varphi(t)\, dt = 0, \ i = 1, 2, \ldots, k\right\}.$$

Множества $\mathcal{A}_k$ непустые; непосредственно из определения вытекает, что $\mathcal{A}_1 \supset \mathcal{A}_2 \supset \ldots \supset \mathcal{A}_k \supset \supset \ldots$, $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \mathcal{A}_k = \varnothing$. Пусть $\varphi_\mu(t) \doteq \frac{1}{\mu}\varphi\left(\frac{t}{\mu}\right)$, $0 < \mu < \mu_0$, $\mu_0<1$. Легко убедиться, что $\varphi_\mu \in \mathcal{A}_k$ в том и только том случае, когда $\varphi \in \mathcal{A}_k$.

Через $\mathcal{E}$ обозначим множество отображений $\mathcal{R} : \mathcal{A}_1 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ таких, что функция $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\varphi, t)$ бесконечно дифференцируема по t при любой фиксированной $\varphi \in \mathcal{A}_1$. Из $\mathcal{E}$ выделим подмножество «умеренных» элементов:

$$\mathcal{E}_{\text{mod}} \doteq \Big\{\mathcal{R} \in \mathcal{E} : (\forall\, [a,b] \subset \mathcal{I})\ (\forall\, m \in \mathbb{N})\ (\exists\, N \in \mathbb{N})\ (\forall\, \varphi \in \mathcal{A}_N)$$
$$(\exists\, C > 0)\ (\exists\, \mu_0 < 1) \left(\sup_{t \in [a,b]} \left|\frac{d^m}{dt^m}\mathcal{R}(\varphi_\mu, t)\right| \leqslant \frac{C}{\mu^N} \quad (0 < \mu < \mu_0)\right)\Big\}.$$

Множество $\mathcal{E}_{\mathrm{mod}}$ — алгебра относительно сложения и умножения функций, а $\mathfrak{N} \subset \mathcal{E}_{\mathrm{mod}}$,

$$\mathfrak{N} \doteq \Big\{ \mathcal{R} \in \mathcal{E}_{\mathrm{mod}} : (\forall\, [a,b] \subset \mathcal{I})\ (\forall\, m \in \mathbb{N})\ (\exists\, N \in \mathbb{N})\ (\forall\, k > N)\ (\forall\, \varphi \in \mathcal{A}_k)$$
$$(\exists\, C > 0)\ (\exists\, \mu_0 < 1)\ \left(\sup_{t\in[a,b]} \left| \frac{d^m}{dt^m} \mathcal{R}(\varphi_\mu, t) \right| \leqslant C \mu^{k-N} \quad (0 < \mu < \mu_0) \right) \Big\} \text{ —}$$

двусторонний идеал этой алгебры. Элементы фактор-алгебры $\mathfrak{G} \doteq \mathcal{E}_{\mathrm{mod}}/\mathfrak{N}$ называются *C-обобщенными функциями* (в терминологии Коломбо — *новые обобщенные функции* [2]). Таким образом, C-обобщенные функции — это классы эквивалентных отображений $\mathcal{R}(\varphi, t)$:

$$\mathcal{R}_1 \sim \mathcal{R}_2 \iff \mathcal{R}_1 - \mathcal{R}_2 \in \mathfrak{N}.$$

Производной элемента $G \in \mathfrak{G}$ называется класс $\dfrac{dG}{dt}$, содержащий в качестве представителя производную $\dfrac{d\mathcal{R}(\varphi,t)}{dt}$, где $\mathcal{R}(\varphi,t)$ — произвольный представитель класса G. C-обобщенные функции бесконечно дифференцируемы. Умножение в алгебре $\mathfrak{G}$ обозначим $\circ$.

Каждой бесконечно дифференцируемой функции поставим в соответствие класс из $\mathfrak{G}$, содержащий в качестве представителя $\mathcal{R}(\varphi,t) = f(t)$. Это отображение из алгебры бесконечно дифференцируемых функций в алгебру $\mathfrak{G}$ инъективно. Образ множества бесконечно дифференцируемых функций при этом вложении обозначим через $\mathfrak{C}^\infty$; $\mathfrak{C}^\infty$ — *подалгебра* в $\mathfrak{G}$. Каждой локально суммируемой в $\mathcal{I}$ функции f поставим в соответствие класс из $\mathfrak{G}$, содержащий

$$\mathcal{R}_f(\varphi,t) \doteq \int_{\mathcal{I}} f(s)\varphi(s-t)\, ds = \int_{\mathcal{I}} f(t+\tau)\varphi(\tau)\, d\tau \tag{1.1}$$

в качестве представителя (интеграл понимается в смысле Лебега, ср. [2,3]). Образ пространства локально суммируемых (непрерывных) функций при этом вложении обозначим $\mathfrak{L}$ $(\mathfrak{C})$. Многие трудности в работе с C-обобщенными функциями обусловлены тем, что $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{C}$ хотя и являются линейными подпространствами в $\mathfrak{G}$, *но не являются подалгебрами*: достаточно простые примеры показывают, что класс, порожденный произведением $f_1 \cdot f_2$, вообще говоря, не совпадает с произведением классов, порожденных локально суммируемыми функциями f_1 и f_2. Однако

$$\lim_{\mu\to+0} \Big(\mathcal{R}_{f_1\cdot f_2}(\varphi_\mu,t) - \mathcal{R}_{f_1}(\varphi_\mu,t) \cdot \mathcal{R}_{f_2}(\varphi_\mu,t) \Big) = 0.$$

Класс $\mathfrak{T} \in \mathfrak{G}$ называется *распределением*, если существуют натуральное число m и локально суммируемая на $\mathcal{I}$ функция f такие, что $\mathfrak{T} = \dfrac{d^m\mathfrak{f}}{dt}$, где $\mathfrak{f}$ — класс, порожденный f согласно равенству (1.1). Это приводит к известному определению обобщенной функции Соболева–Шварца (распределению). Например, $(\mathcal{I} = \mathbb{R})$, дельта-функция δ определяется как производная от единичной функции $f(t) = 0$ при $t < 0$, $f(t) = 1$ при $t > 0$:

$$\mathcal{R}_f(\varphi,t) = \int_0^\infty \varphi(s-t)\, ds, \qquad \frac{d\mathcal{R}_f(\varphi,t)}{dt} = -\int_0^\infty \varphi'(s-t)\, ds = \varphi(-t).$$

Таким образом, дельта-функция $\delta(t)$ — класс из $\mathfrak{G}$, содержащий в качестве представителя $\mathcal{R}_\delta(\varphi,t) = \varphi(-t)$.

Пространство распределений (вне его связи с $\mathfrak{G}$) обозначим через $\mathcal{D}'$, а образ пространства $\mathcal{D}'$ — через $\mathfrak{D}'$. Пространство $\mathfrak{D}'$ также является линейным подпространством в $\mathfrak{G}$, но не является подалгеброй. Так, $\delta^2 \in \mathfrak{G}$ есть класс, содержащий $\mathcal{R}(\varphi,t) = \varphi^2(-t)$, но $\delta^2 \notin \mathcal{D}'$.

По аналогии с C-обобщенными функциями вводятся C-обобщенные вещественные числа. В алгебре всех функционалов $\mathcal{R} : \mathcal{A}_1 \to \mathbb{R}$ выделяется подалгебра умеренных элементов, то есть таких, что

$$(\exists\, N \in \mathbb{N})\ \ (\forall\, \varphi \in \mathcal{A}_1)\ \ (\exists\, C > 0)\ (\exists\, \mu_0 < 1) \quad \left(|\mathcal{R}(\varphi_\mu)| \leqslant \frac{C}{\mu^N}\ \ (0 < \mu < \mu_0) \right);$$

двусторонний идеал в этой алгебре образуют функционалы, обладающие следующим свойством:

$$(\exists\, N \in \mathbb{N})\ \ (\forall\, k \in N)\ \ (\forall\, \varphi \in \mathcal{A}_1)\ \ (\exists\, C > 0)\ (\exists\, \mu_0 < 1)\quad \big(|\mathcal{R}(\varphi_\mu)| \leqslant C\mu^{k-N}\ \ (0 < \mu < \mu_0)\big).$$

Элементы фактор-алгебры $\widehat{\mathbb{R}}$ умеренных элементов по этому идеалу называются *C-обобщенными вещественными числами.* Это понятие позволяет говорить о значении C-обобщенной функции в точке, которое полностью совпадает со значением функции в точке только для бесконечно дифференцируемой функции. Так, например, значение дельта-функции в точке 0 есть функционал $\varphi(0)$.

В алгебре $\mathfrak{G}$ рассматривается обыкновенное линейное дифференциальное уравнение

$$Lx \doteq x'' + P(t) \circ x' + Q(t) \circ x = 0, \quad t \in [a, b] \subset \mathcal{I} \doteq (\alpha, \beta), \tag{1.2}$$

где $\mathcal{I}$ — промежуток из $\mathbb{R}$, $P, Q\ : \mathcal{I} \to \mathfrak{G}$ — C-обобщенные функции (см. [2,3]), $\mathcal{R}_P$, $\mathcal{R}_Q$ — представители P и Q соответственно, а $y(t)$ означает значение C-обобщенной функции y в точке $t \in \mathcal{I}$ ($y(t)$ — C-обобщенное число). Решением уравнения (1.2) будем называть C-обобщенную функцию $x(\cdot)$, удовлетворяющую ему в смысле определения операций и равенства в алгебре Коломбо $\mathfrak{G}$ (см. [3, 4]).

§ 2. Неосцилляция уравнения (1.2)

Определение 1. Функция $x : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ называется *правильной* [4–8], если в каждой точке $t \in \mathcal{I}$ существуют конечные односторонние пределы

$$x(t+),\ x(t-), \quad t \in \mathcal{I}.$$

Непрерывные, кусочно-непрерывные функции, функции ограниченной вариации являются правильными.

В данном разделе будем рассматривать уравнение (1.2), считая при этом, что $P(t) = p'(t)$, $Q(t) = q'(t)$, где p, q — правильные функции, определенные на $\mathcal{I}$, а дифференцирование понимается в смысле теории обобщенных функций Коломбо.

Сведем уравнение (1.2) к матричному дифференциальному уравнению первого порядка

$$U' = A(t) \circ U, \quad \text{где} \quad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -P(t) & -Q(t) \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Решение $U(t) = (u_1(t), u_2(t))^T$ уравнения (2.1), согласно [4], существует и представляет собой обычную функцию, а значит, решение $x(t)$ и его производная $x'(t)$ уравнения (1.2) тоже являются обычными функциями. Этот факт будет учтен ниже при доказательстве теорем.

Определение 2. Пусть f, g — C-обобщенные функции, $\mathcal{R}_f$, $\mathcal{R}_g$ — их представители. Будем говорить о *слабом равенстве* $f \overset{w}{=} g$ (см. [3]), если $\lim\limits_{\mu \to +0}\Big(\mathcal{R}_f(\varphi_\mu, t) - \mathcal{R}_g(\varphi_\mu, t)\Big) = 0$ ($t \in (\alpha, \beta)$, $\varphi \in \mathcal{A}_1$). Точно так же говорим о слабом равенстве $y \overset{w}{=} g$, если g — обычная (то есть локально суммируемая) функция, а $y \in \mathfrak{G}$ и $\lim\limits_{\mu \to +0} \mathcal{R}_y(\varphi_\mu, t) = g$. Так же определяется слабое равенство для C-обобщенных чисел: значение G_0 функции $G \in \mathfrak{G}$ в точке $t_0 \in \mathcal{I}$ будем называть слабым нулем, если $\lim\limits_{\mu \to +0} \mathcal{R}_{G_0}(\varphi_\mu) = 0$.

Определение 3. Уравнение (1.2) называется *неосциляционным* на промежутке $[a, b]$, если любое его нетривиальное решение имеет на этом промежутке не более одного слабого нуля.

Обозначим через $W(t)$ вронскиан фундаментальной системы решения уравнения (1.2).

Лемма 1. *Если для некоторой точки $t_0 \in \mathcal{I}$ выполнено неравенство $W(t_0) > 0\,(< 0)$, то для любой точки $t > t_0$ верно неравенство $W(t) > 0\,(< 0)$.*

Доказательство. Нетрудно убедиться, что функция $W(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению первого порядка (см. [3])

$$W'(t) + P(t) \circ W(t) = 0. \tag{2.2}$$

Определим решение $W(\cdot)$ уравнения (2.2) с начальным условием

$$W(t_0) = W_0. \tag{2.3}$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $W_0 > 0$. Задаче Коши (2.2), (2.3) соответствует задача Коши в представителях

$$\mathcal{R}'(\varphi_\mu, t) + \mathcal{R}_P(\varphi_\mu, t)\mathcal{R}(\varphi_\mu, t) = 0, \quad \mathcal{R}(\varphi_\mu, t_0) = W_0,$$

решением которой является функция

$$\mathcal{R}(\varphi_\mu, t) = W_0 \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \mathcal{R}_P(\varphi_\mu, s)\, ds\right) = W_0 \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \mathcal{R}_{p'}(\varphi_\mu, s)\, ds\right) =$$
$$= W_0 \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \mathcal{R}'_p(\varphi_\mu, s)\, ds\right) = W_0 \exp\big(-\mathcal{R}_p(\varphi_\mu, t) + \mathcal{R}_p(\varphi_\mu, t_0)\big).$$

Решение задачи (2.2), (2.3) существует и единственно и имеет вид [4]

$$W(t) = \lim_{\mu \to +0} \mathcal{R}(\varphi_\mu, t) = W_0 e^{-p(t)+p(t_0)}.$$

Значит, $W(t) > 0$. □

Теорема 1. *Пусть a, $b \in \mathcal{I}$, $x(\cdot)$ — решение уравнения* (1.2) *такое, что $x(a) = x(b) = 0$, $x(t) \neq 0$, $t \in (a, b)$. Тогда любое другое линейно независимое с x решение имеет ровно один нуль в (a, b).*

Доказательство. Пусть $y(t)$ — линейно независимое с $x(t)$ решение уравнения (1.2), следовательно, $y(a) \neq 0$, $y(b) \neq 0$. Предположим, что $y(t) > 0$ для любого $t \in [a, b]$. Решение $x(t)$ уравнения (1.2) непрерывно на $[a, b]$ и, следовательно, сохраняет знак на этом отрезке. Не ограничивая общности, можно считать $x(t) > 0$ для любого $t \in (a, b)$, $x'(a) > 0$, $x'(b) < 0$. Далее, будем рассматривать значения вронскиана $W(t)$ фундаментальной системы уравнения (1.2) в точках a и b: $W(a) = x(a)y'(a) - y(a)x'(a) = -y(a)x'(a)$, $W(b) = x(b)y'(b) - y(b)x'(b) = -y(b)x'(b)$. Легко видеть, что $W(a) < 0$, $W(b) > 0$, что невозможно согласно лемме 1. Это противоречие завершает доказательство теоремы. □

Из теоремы 1 вытекает следующее утверждение (см. [1]).

Теорема 2. *Если уравнение* (1.2) *неосцилляционно на отрезке $[a, b] \subset \mathcal{I}$, то существует решение этого уравнения, не обращающееся в нуль на $[a, b]$.*

Доказательство. Определим решения $u_1(t)$ и $u_2(t)$ начальными условиями $u_1(a) = 0$, $u'_1(a) = 1$ и $u_2(b) = 0$, $u'_1(b) = -1$. Так как уравнение (1.2) неосцилляционно на отрезке $[a, b]$, то

$$u_1(t) > 0 \quad (t \in (a, b]), \qquad u_2(t) > 0 \quad (t \in [a, b)).$$

Решение $u_1(t) + u_2(t)$ — требуемое. □

§ 3. Признак неосцилляции

Приведем достаточное условие неосцилляции уравнения (1.2); при этом мы используем результаты и методику работы [9].

Теорема 3. *Пусть выполнено условие*

$$(\exists\, N \in \mathbb{N})(\forall\, \varphi \in \mathcal{A}_N)(\exists\, \mu_0 < 1)$$
$$\int_a^b |\mathcal{R}_P(\varphi_\mu, t)|\, dt + \int_a^b |\mathcal{R}_Q(\varphi_\mu, t)|\, dt < \frac{4}{b-a+4} \quad (0 < \mu < \mu_0). \quad (3.1)$$

Тогда уравнение (1.2) *неосцилляционно на* $[a, b]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Можно показать (см. [3, с. 42, 43]), что выполнение условия (3.1) гарантирует существование и единственность решения задачи Коши

$$Lx = 0, \quad x(a) \overset{w}{=} 0, \quad x'(a) \overset{w}{=} 0$$

на $[a, b]$. Рассмотрим уравнение в представителях

$$\mathcal{R}''(\varphi_\mu, t) + \mathcal{R}_P(\varphi_\mu, t)\mathcal{R}'(\varphi_\mu, t) + \mathcal{R}_Q(\varphi_\mu, t)\mathcal{R}(\varphi_\mu, t) = 0. \quad (3.2)$$

Предположим, что уравнение (3.2) имеет нетривиальное умеренное решение $\mathcal{R}$, которое соответствует решению x уравнения (1.2), имеющему 2 слабых нуля на $[a, b]$. Не ограничивая общности, можно считать, что

$$\lim_{\mu \to +0} \mathcal{R}(\varphi_\mu, a) = 0, \quad \lim_{\mu \to +0} \mathcal{R}(\varphi_\mu, b) = 0. \quad (3.3)$$

Из уравнения (3.2) с точностью до слагаемых, стремящихся к нулю (согласно (3.3)), можно представить

$$\mathcal{R}(\varphi_\mu, t) = -\int_a^b G(t, s)\big(\mathcal{R}_P(\varphi_\mu, s)\mathcal{R}'(\varphi_\mu, s) + \mathcal{R}_Q(\varphi_\mu, s)\mathcal{R}(\varphi_\mu, s)\big)\, ds, \quad (3.4)$$

где

$$G(t, s) = \begin{cases} -\dfrac{(b-t)(s-a)}{b-a}, & \text{если} \quad a \leqslant s < t, \\ -\dfrac{(t-a)(b-s)}{b-a}, & \text{если} \quad t \leqslant s \leqslant b, \end{cases}$$

— функция Грина уравнения $x'' = 0$ при нулевых краевых условиях. Легко видеть, что

$$\frac{\partial G(t, s)}{\partial t} = \begin{cases} \dfrac{s-a}{b-a}, & \text{если} \quad a \leqslant s < t, \\ \dfrac{s-b}{b-a}, & \text{если} \quad t < s \leqslant b. \end{cases}$$

Производная $\dfrac{\partial G(t, s)}{\partial t}$ в точке $t = s$ имеет разрыв первого рода и непрерывна на множестве $[a, t) \cup (t, b]$. Поэтому, разбивая промежуток интегрирования на два и дифференцируя по t, находим

$$\begin{aligned} \mathcal{R}'(\varphi_\mu, t) = &-\int_a^t \frac{\partial G(t, s)}{\partial t}\big(\mathcal{R}_P(\varphi_\mu, s)\mathcal{R}'(\varphi_\mu, s) + \mathcal{R}_Q(\varphi_\mu, s)\mathcal{R}(\varphi_\mu, s)\big)\, ds - \\ &- G(t, t-0)\big(\mathcal{R}_P(\varphi_\mu, t)\mathcal{R}'(\varphi_\mu, t) + \mathcal{R}_Q(\varphi_\mu, t)\mathcal{R}(\varphi_\mu, t)\big) - \\ &- \int_t^b \frac{\partial G(t, s)}{\partial t}\big(\mathcal{R}_P(\varphi_\mu, s)\mathcal{R}'(\varphi_\mu, s) + \mathcal{R}_Q(\varphi_\mu, s)\mathcal{R}(\varphi_\mu, s)\big)\, ds + \\ &+ G(t, t+0)\big(\mathcal{R}_P(\varphi_\mu, t)\mathcal{R}'(\varphi_\mu, t) + \mathcal{R}_Q(\varphi_\mu, t)\mathcal{R}(\varphi_\mu, t)\big). \end{aligned}$$

В силу непрерывности функции Грина при $t=s$ имеем представление

$$\mathcal{R}'(\varphi_\mu,t)=-\int_a^b\frac{\partial G(t,s)}{\partial t}\big(\mathcal{R}_P(\varphi_\mu,s)\mathcal{R}'(\varphi_\mu,s)+\mathcal{R}_Q(\varphi_\mu,s)\mathcal{R}(\varphi_\mu,s)\big)\,ds. \tag{3.5}$$

Пусть $\mathcal{N}=\sup\limits_{t\in[a,b]}|\mathcal{R}(\varphi_\mu,t)|+\sup\limits_{t\in[a,b]}|\mathcal{R}'(\varphi_\mu,t)|$. Принимая во внимание равенства (3.4), (3.5) и $\sup\limits_{t,s\in[a,b]}|G(t,s)|=\dfrac{b-a}{4}$, $\sup\limits_{t,s\in[a,b]}\left|\dfrac{\partial G(t,s)}{\partial t}\right|=1$, проведем следующие оценки:

$$\begin{aligned}
&\sup_{t\in[a,b]}|\mathcal{R}(\varphi_\mu,t)|+\sup_{t\in[a,b]}|\mathcal{R}'(\varphi_\mu,t)|=\sup_{t\in[a,b]}\left|\int_a^b G(t,s)\big(\mathcal{R}_P(\varphi_\mu,s)\mathcal{R}'(\varphi_\mu,s)+\mathcal{R}_Q(\varphi_\mu,s)\mathcal{R}(\varphi_\mu,s)\big)\,ds\right|+\\
&\qquad+\sup_{t\in[a,b]}\left|\int_a^b\frac{\partial G(t,s)}{\partial t}\big(\mathcal{R}_P(\varphi_\mu,s)R'(\varphi_\mu,s)+\mathcal{R}_Q(\varphi_\mu,s)\mathcal{R}(\varphi_\mu,s)\big)\,ds\right|\leqslant\\
&\leqslant\sup_{t\in[a,b]}\int_a^b|G(t,s)|\Big(|\mathcal{R}_P(\varphi_\mu,s)||\mathcal{R}'(\varphi_\mu,s)|+|\mathcal{R}_Q(\varphi_\mu,s)||\mathcal{R}(\varphi_\mu,s)|\Big)\,ds+\\
&\qquad+\sup_{t\in[a,b]}\int_a^b\left|\frac{\partial G(t,s)}{\partial t}\right|\Big(|\mathcal{R}_P(\varphi_\mu,s)||\mathcal{R}'(\varphi_\mu,s)|+|\mathcal{R}_Q(\varphi_\mu,s)||\mathcal{R}(\varphi_\mu,s)|\Big)\,ds\leqslant\\
&\leqslant\frac{b-a}{4}\left(\sup_{t\in[a,b]}|\mathcal{R}'(\varphi_\mu,t)|\int_a^b|\mathcal{R}_P(\varphi_\mu,s)|\,ds+\sup_{t\in[a,b]}|\mathcal{R}(\varphi_\mu,t)|\int_a^b|\mathcal{R}_Q(\varphi_\mu,s)|\,ds\right)+\\
&\qquad+\sup_{t\in[a,b]}|\mathcal{R}'(\varphi_\mu,t)|\int_a^b|\mathcal{R}_P(\varphi_\mu,s)|\,ds+\sup_{t\in[a,b]}|\mathcal{R}(\varphi_\mu,t)|\int_a^b|\mathcal{R}_Q(\varphi_\mu,s)|\,ds=\\
&=\left(\frac{b-a}{4}+1\right)\left(\sup_{t\in[a,b]}|\mathcal{R}'(\varphi_\mu,t)|\int_a^b|\mathcal{R}_P(\varphi_\mu,s)|\,ds+\sup_{t\in[a,b]}|\mathcal{R}(\varphi_\mu,t)|\int_a^b|\mathcal{R}_Q(\varphi_\mu,s)|\,ds\right)<\\
&<\left(\frac{b-a}{4}+1\right)\left(\sup_{t\in[a,b]}|\mathcal{R}'(\varphi_\mu,t)|\int_a^b|\mathcal{R}_P(\varphi_\mu,s)|\,ds+\sup_{t\in[a,b]}|\mathcal{R}(\varphi_\mu,t)|\int_a^b|\mathcal{R}_Q(\varphi_\mu,s)|\,ds+\right.\\
&\qquad\left.+\sup_{t\in[a,b]}|\mathcal{R}(\varphi_\mu,t)|\int_a^b|\mathcal{R}_P(\varphi_\mu,s)|\,ds+\sup_{t\in[a,b]}|\mathcal{R}'(\varphi_\mu,t)|\int_a^b|\mathcal{R}_Q(\varphi_\mu,s)|\,ds\right)=\\
&=\left(\frac{b-a+4}{4}\right)\left(\sup_{t\in[a,b]}|\mathcal{R}(\varphi_\mu,t)|+\sup_{t\in[a,b]}|\mathcal{R}'(\varphi_\mu,t)|\right)\int_a^b\Big(|\mathcal{R}_P(\varphi_\mu,s)|+|\mathcal{R}_Q(\varphi_\mu,s)|\Big)\,ds.
\end{aligned}$$

Таким образом, $\mathcal{N}<\left(\dfrac{b-a+4}{4}\right)\mathcal{N}\displaystyle\int_a^b\Big(|\mathcal{R}_P(\varphi_\mu,s)|+|\mathcal{R}_Q(\varphi_\mu,s)|\Big)\,ds$. Следовательно,

$$1<\left(\frac{b-a+4}{4}\right)\int_a^b\big(|\mathcal{R}_P(\varphi_\mu,s)|+|\mathcal{R}_Q(\varphi_\mu,s)|\big)\,ds,$$

а значит

$$\int_a^b|\mathcal{R}_P(\varphi_\mu,t)|\,dt+\int_a^b|\mathcal{R}_Q(\varphi_\mu,t)|\,dt>\frac{4}{b-a+4}\quad(0<\mu<\mu_0),$$

что противоречит неравенству в (3.1). □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дерр В.Я. Неосцилляция решений линейных дифференциальных уравнений // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2009. Вып. 1. С. 46–89.
2. Colombeau J.F. Elementary introduction to new generalized functions. Amsterdam: North Holland Math. Studies, 1985. 300 p.

МАТЕМАТИКА 2015. Т. 25. Вып. 1

3. Дерр В.Я., Дизендорф К.И. О дифференциальных уравнениях в C-обобщенных функциях // Известия вузов. Математика. 1996. № 11 (414). С. 39–49.
4. Дерр В.Я., Ким И.Г. Пространство правильных функций и дифференциальное уравнение с обобщенными функциями в коэффициентах // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2014. Вып. 1. С. 3–18.
5. Дерр В.Я. Теория функций действительной переменной. Лекции и упражнения. М.: Высшая школа, 2008. 384 с.
6. Толстоногов А.А. О некоторых свойствах пространства правильных функций // Математические заметки. 1984. Т. 35. Вып. 6. С. 803–812.
7. Дьедонне Ж. Основы современного анализа. М.: Мир, 1964. 430 с.
8. Шварц Л. Анализ. М.: Мир, 1972. Т. 1. 824 с.
9. Ligeza J. Remarks on generalized solutions of some ordinary nonlinear differential equations of second order in the Colombeau algebra // Annales Mathematicae Silesianae. 1996. Vol. 10. P. 87–101.

Поступила в редакцию 18.01.2015

Ким Инна Геральдовна, аспирантка, кафедра математического анализа, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1 (корп. 4).
E-mail: kimingeral@gmail.com

I. G. Kim

Disconjugacy of solutions of a second order differential equation with Colombeau generalized functions in coefficients

Keywords: C-generalized function, C-generalized number, weak equation, disconjugacy.

MSC: 46F30

We consider a differential equation

$$Lx \doteq x'' + P(t)x' + Q(t)x = 0, \quad t \in [a,b] \subset \mathcal{I} \doteq (\alpha,\beta) \subset \mathbb{R}, \tag{1}$$

where P, Q are C-generalized functions defined on $\mathcal{I}$ and are known as equivalence classes of Colombeau algebra. Let $\mathcal{R}_P$ and $\mathcal{R}_Q$ be representatives of P and Q respectively, $\mathcal{A}_N$ are classes of functions with compact support used to define Colombeau algebra. We obtain new sufficient conditions for disconjugacy of the equation (1). We prove that if the condition

$$(\exists\, N \in \mathbb{N})(\forall\, \varphi \in \mathcal{A}_N)(\exists\, \mu_0 < 1)\ \int_a^b |\mathcal{R}_P(\varphi_\mu, t)|\, dt + \int_a^b |\mathcal{R}_Q(\varphi_\mu, t)|\, dt < \frac{4}{b-a+4} \quad (0 < \mu < \mu_0)$$

is satisfied, where $\varphi_\mu \doteq \frac{1}{\mu}\varphi\left(\frac{t}{\mu}\right)$, then the equation (1) is disconjugate on $[a,b]$. We prove the separation theorem and its corollary.

REFERENCES

1. Derr V.Ya. Disconjugacy of solutions of linear differential equations, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2009, no. 1, pp. 46–89 (in Russian).
2. Colombeau J.F. *Elementary introduction to new generalized functions*, Amsterdam: North Holland Math. Studies, 1985, 300 p.
3. Derr V.Ya., Dizendorf K.I. On differential equations in C-generalized functions, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 1996, no. 11 (414), pp. 39–49 (in Russian).
4. Derr V.Ya., Kim I.G. The spaces of regulated functions and differential equations with generalized functions in coefficients, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2014, no. 1, pp. 3–18 (in Russian).
5. Derr V.Ya. *Teoriya funktsii deistvitel'noi peremennoi. Lektsii i uprazhneniya* (Theory of functions of a real variable. Lectures and exercises), Moscow: Vyssh. Shkola, 2008, 384 p.

6. Tolstonogov A.A. Properties of the space of proper functions, *Mathematical Notes*, 1984, vol. 35, issue 6, pp. 422–427.
7. Dieudonne J. *Foundations of modern analysis*, New York: Academic Press, 2006, 408 p. Translated under the title *Osnovy sovremennogo analiza*, Moscow: Mir, 1964, 430 p.
8. Schwartz L. *Analyse mathematique*, Paris: Hermann, 1967, vol. 1, 554 p.
9. Ligeza J. Remarks on generalized solutions of some ordinary nonlinear differential equations of second order in the Colombeau algebra, *Annales Mathematicae Silesianae*, 1996, vol. 10, pp. 87–101.

Received 18.01.2015

Kim Inna Geral'dovna, post-graduate student, Department of Mathematical Analysis, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: kimingeral@gmail.com