УДК 517.977

© *М. Н. Виноградова*

О ПОИМКЕ ДВУХ УБЕГАЮЩИХ В ОДНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧЕ ГРУППОВОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Рассматривается линейная задача преследования группой преследователей двух убегающих при равных динамических возможностях всех участников и с фазовыми ограничениями на состояния убегающих в предположении, что убегающие используют одно и то же управление. Движение каждого участника имеет вид $\dot{z} + a(t)z = w$. Геометрические ограничения на управления — строго выпуклый компакт с гладкой границей, терминальные множества — начало координат. Предполагается, что убегающие в процессе игры не покидают пределы выпуклого конуса. Целью преследователей является поимка двух убегающих, цель группы убегающих противоположна. Говорят, что в задаче преследования происходит поимка, если существуют два преследователя, из заданной группы преследователей, которые ловят убегающих, при этом моменты поимки могут не совпадать. В терминах начальных позиций получены достаточные условия поимки двух убегающих. Приведены примеры, иллюстрирующие полученные результаты.

Ключевые слова: дифференциальная игра, фазовые ограничения, кусочно-программные стратегии, контрстратегии.

Введение

В теории дифференциальных игр хорошо известны задача преследования группой преследователей и задача уклонения от группы преследователей одного убегающего [1–8]. Естественным обобщением указанных задач является ситуация конфликтного взаимодействия, когда в игре участвуют две группы — преследователей и убегающих. Целью группы преследователей является поимка заданного числа убегающих, цель группы убегающих противоположна [9–13].

К настоящему времени работы, посвященные условиям поимки двух и более убегающих, практически отсутствуют. В работе [14] рассмотрена задача простого преследования группы убегающих при условии, что убегающие используют программные стратегии, а каждый преследователь ловит не более одного убегающего. Общая линейная задача преследования группой преследователей двух убегающих без фазовых ограничений рассматривалась в [15].

В работе [16] получены достаточные условия поимки двух убегающих в задаче простого преследования с фазовыми ограничениями. Нестационарная задача простого преследования рассмотрена в [17]. Условия поимки двух скоординированных убегающих в рекуррентных дифференциальных играх приведены в [18]. В [19] найдены достаточные условия мягкой поимки двух убегающих.

В данной работе для нестационарной задачи группового преследования получены достаточные условия поимки группой преследователей двух убегающих при условии, что убегающие используют одно и то же управление и не покидают пределы выпуклого конуса.

Работа примыкает к исследованиям [16–22].

§ 1. Постановка задачи

В пространстве $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра Γ $n{+}2$ лиц: n преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и двух убегающих E_1, E_2. Законы движения каждого из преследователей P_i и каждого из убегающих E_j имеют вид $(i = 1, \ldots, n,\ j = 1, 2)$

$$\dot{x}_i(t) + a(t)x_i = u_i(t), \quad u_i \in V, \quad \dot{y}_j(t) + a(t)y_j = v(t), \quad v \in V, \quad x_i,\, y_j,\, u_i,\, v \in \mathbb{R}^k. \tag{1.1}$$

При $t = t_0$ заданы начальные условия

$$x_i(t_0) = x_i^0, \quad y_j(t_0) = y_j^0,$$

причем $x_i^0 \neq y_j^0$, V — строго выпуклый компакт в $\mathbb{R}^k$ с гладкой границей, $a : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^1$ — измеримая функция, ограниченная на любом компакте.

Предполагается, что убегающие в процессе игры не покидают пределы выпуклого конуса

$$D = \{y : y \in \mathbb{R}^k, \langle p_s, y\rangle \leqslant 0,\ s = 1, \ldots, r\},$$

где $p_1, \ldots, p_r$ — единичные векторы такие, что $\operatorname{int} D \neq \varnothing$.

Пусть $T > 0$ и σ — некоторое конечное разбиение $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_q < t_{q+1} = T$ отрезка $[t_0, T]$.

Определение 1. *Кусочно-программной стратегией* W убегающего E_j, соответствующей разбиению σ, называется семейство отображений c^l $(l = 0, 1, \ldots, q)$, ставящих в соответствие величинам

$$(t_l, x_i(t_l), y_j(t_l), \min_{t \in [0, t_l]} \min_i \|x_i(t) - y_j(t)\|) \tag{1.2}$$

измеримую функцию $v(t)$, определенную для $t \in [t_l, t_{l+1})$ и такую, что $v(t) \in V$, $y_j(t) \in D$, $t \in [t_l, t_{l+1})$.

Определение 2. *Кусочно-программной контрстратегией* U_i преследователя P_i, соответствующей разбиению σ, называется семейство отображений b_i^l $(l = 0, 1, \ldots, q)$, ставящих в соответствие величинам (1.2) и управлению $v(t)$, $t \in [t_l, t_{l+1})$ измеримую функцию $u_i(t)$, определенную для $t \in [t_l, t_{l+1})$ и такую, что $u_i(t) \in V$, $t \in [t_l, t_{l+1})$.

Обозначим данную игру Γ.

Определение 3. В игре Γ происходит *поимка*, если существует $T > 0$ и для любого разбиения σ отрезка $[0, T]$, для любой стратегии W убегающих E_1, E_2 существуют стратегии $U_1, \ldots, U_n$ преследователей $P_1, \ldots, P_n$, моменты времени τ_1, τ_2, номера $l, s \in \{1, \ldots, n\}$ такие, что $x_l(\tau_1) = y_1(\tau_1)$, $x_s(\tau_2) = y_2(\tau_2)$.

От системы (1.1) перейдем к системе

$$\dot z_{ij} + a(t) z_{ij} = u_i - v, \quad z_{ij}(t_0) = z_{ij}^0 = x_i^0 - y_j^0. \tag{1.3}$$

Введем следующие обозначения:

$$q(\tau) = \exp\left(\int_{t_0}^{\tau} a(s)\, ds\right), \quad g(t) = \int_{t_0}^{t} q(\tau)\, d\tau; \quad \lambda_0 = \inf_{t \geqslant t_0} \frac{1}{g(t)}, \quad \lambda(a, v) = \sup\{\lambda \geqslant 0 \mid -\lambda a \in V - v\},$$

$$I_0 = \{1, \ldots, n\}, \quad d = \max\{|v|, v \in V\}, \quad c = y_1^0 - y_2^0.$$

§ 2. Достаточные условия поимки

Определение 4 (см. [23]). Векторы $a_1, a_2, \ldots, a_s$ образуют положительный базис пространства $\mathbb{R}^k$, если для любого $x \in \mathbb{R}^k$ существуют положительные вещественные числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ такие, что $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_s a_s$.

Лемма 1. *Если набор $a_1, a_2, \ldots, a_m$ образует положительный базис, то для любых $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$, $\ldots$, $\gamma_m > 0$ набор $\gamma_1 a_1, \gamma_2 a_2, \ldots, \gamma_m a_m$ образует положительный базис.*

Доказательство леммы очевидно.

Теорема 1. *Пусть* $\lambda_0 = 0$ *и существуют множества* $J_1, J_2 \subset \{1, \ldots, n\}$ *и множества* $I_1, I_2 \subset I_0 \setminus (J_1 \cup J_2)$, $I_1 \cap I_2 = \varnothing$ *такие, что наборы*

$$\{z_{i1}^0,\, i \in J_1,\, p_1, \ldots, p_r,\, -c\},\ \{z_{i2}^0,\, i \in J_2,\, p_1, \ldots, p_r,\, c\},$$
$$\{z_{l1}^0,\, l \in J_1 \setminus (J_1 \cap J_2),\, z_{s2}^0,\, s \in J_2 \setminus (J_1 \cap J_2),\, z_{\alpha 1}^0,\, \alpha \in I_1,\, z_{\beta 2}^0,\, \beta \in I_2,\, p_1, \ldots, p_r\}$$

образуют положительный базис, причем $|J_1| \geqslant k$, $|J_2| \geqslant k$, $|J_1^0| + |J_2^0| \geqslant k+1$, *где* $J_1^0 = (I_1 \cup J_1) \setminus (J_1 \cap J_2)$, $J_2^0 = (I_2 \cup J_2) \setminus (J_1 \cap J_2)$.

Тогда в игре Γ *происходит поимка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим два случая.

1. $J_1 \cap J_2 = \varnothing$. Так как

$$\{z_{i1}^0,\, i \in J_1,\, p_1, \ldots, p_r,\, -c\}, \quad \{z_{i2}^0,\, i \in J_2,\, p_1, \ldots, p_r,\, c\}$$

образуют положительный базис, то существуют положительные числа γ_{i1}, $i \in J_1$, γ_{i2}, $i \in J_2$, α_s^1, α_s^2 такие, что

$$\sum_{i \in J_1} \gamma_{i1} z_{i1}^0 + \sum_{s=1}^{r} \alpha_s^1 p_s - c = 0, \quad \sum_{i \in J_2} \gamma_{i1} z_{i2}^0 + \sum_{s=1}^{r} \alpha_s^2 p_s + c = 0.$$

Следовательно, $\sum_{i \in J_1} \gamma_{i1} z_{i1}^0 + \sum_{i \in J_2} \gamma_{i1} z_{i2}^0 + \sum_{s=1}^{r} (\alpha_s^1 + \alpha_s^2) p_s = 0$. Обозначим $p_0 = \sum_{s=1}^{r} (\alpha_s^1 + \alpha_s^2) p_s$, $D_0 = \{y \mid \langle p_0, y\rangle \leqslant 0\}$. Считаем, что $p_0 \neq 0$. Случай $p_0 = 0$ рассматривается аналогично. Тогда $D \subset D_0$ и набор

$$\{z_{i1}^0,\, i \in J_1,\ z_{i2}^0,\, i \in J_2,\ p_0\} \tag{2.1}$$

образует положительный базис пространства $\mathbb{R}^k$.

Пусть A — произвольная стратегия убегающих. Следовательно, $y_1(t)$, $y_2(t) \in D$ для всех $t \geqslant t_0$, а значит, $y_1(t)$, $y_2(t) \in D_0$, и поэтому $\langle p_0, y_1(t)\rangle \leqslant 0$, $\langle p_0, y_2(t)\rangle \leqslant 0$. Отсюда имеем

$$\int_{t_0}^{t} q(\tau) \langle p_0, v(\tau)\rangle \, d\tau = \langle p_0, y_1(t)\rangle - \langle p_0, y_1^0\rangle \leqslant -\langle p_1, y_1^0\rangle = \mu_1.$$

Аналогично,

$$\int_{t_0}^{t} q(\tau) \langle p_0, v(\tau)\rangle \, d\tau = \langle p_0, y_2(t)\rangle - \langle p_0, y_2^0\rangle \leqslant -\langle p_0, y_2^0\rangle = \mu_2.$$

Так как (2.1) образуют положительный базис и V — строго выпуклый компакт с гладкой границей, то число (см. [8, с. 15])

$$\delta = \min_{v \in V} \max \{\max_{l \in J_1} \lambda(z_l^0, v),\, \max_{l \in J_2} \lambda(z_l^0, v),\, \langle p_0, v\rangle\}$$

положительно.

Пусть $T_1(t)$, $T_2(t)$ — два подмножества в $[t_0, t]$ такие, что

$$T_1(t) = \{\tau | \tau \in [t_0, t], \langle p_0, v(\tau)\rangle < \delta\}, \quad T_2(t) = \{\tau | \tau \in [t_0, t], \langle p_0, v(\tau)\rangle \geqslant \delta\}.$$

Тогда

$$\mu_1 \geqslant \int_{t_0}^{t} q(\tau) \langle p_0, v(\tau)\rangle \, d\tau = \int_{T_1(t)} q(\tau) \langle p_0, v(\tau)\rangle \, d\tau + \int_{T_2(t)} q(\tau) \langle p_0, v(\tau)\rangle \, d\tau \geqslant$$
$$\geqslant \delta \int_{T_2(t)} q(\tau) \, d\tau - d \int_{T_1(t)} q(\tau) \, d\tau.$$

С другой стороны,

$$\int_{T_2(t)} q(\tau)\,d\tau + \int_{T_1(t)} q(\tau)\,d\tau = \int_{t_0}^{t} \exp\left(\int_{t_0}^{\tau} a(s)\,ds\right)\,d\tau = g(t).$$

Таким образом,

$$\delta \int_{T_2(t)} q(\tau)\,d\tau - d\int_{T_1(t)} q(\tau)\,d\tau \leqslant \mu_1 \text{ и } \int_{T_2(t)} q(\tau)\,d\tau + \int_{T_1(t)} q(\tau)\,d\tau = g(t).$$

Из этих соотношений следует, что

$$\int_{T_2(t)} q(\tau)\,d\tau \leqslant \frac{\mu_1 + dg(t)}{\delta + d},$$

тогда

$$\int_{T_1(t)} q(\tau)\,d\tau \geqslant \frac{\delta g(t) - \mu_1}{\delta + d}.$$

Аналогично,

$$\int_{T_2(t)} q(\tau)\,d\tau \leqslant \frac{\mu_2 + dg(t)}{\delta + d}, \quad \int_{T_1(t)} q(\tau)\,d\tau \geqslant \frac{\delta g(t) - \mu_2}{\delta + d}.$$

Поэтому

$$\int_{T_1(t)} q(\tau)\,d\tau \geqslant \frac{\delta g(t) - \mu^0}{\delta + d},$$

где $\mu^0 = \max\{\mu_1, \mu_2\}$.

Задаем управление преследователей следующим образом:

$$u_i(t) = v(t) - \lambda(z_{i1}^0, v(t))z_{i1}^0, \quad i \in J_1, \quad u_i(t) = v(t) - \lambda(z_{i2}^0, v(t))z_{i2}^0, \quad i \in J_2,$$

управление остальных преследователей задаем произвольно. Подставим их в систему (1.3).

Тогда получаем

$$\dot z_{i1} + a(t)z_{i1} = -\lambda(z_{i1}^0, v(t))z_{i1}^0, \quad i \in J_1, \quad \dot z_{i2} + a(t)z_{i2} = -\lambda(z_{i2}^0, v(t))z_{i2}^0, \quad i \in J_2.$$

Имеем

$$z_{i1}(t) = \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\right)\left(z_{i1}^0 - \int_{t_0}^{t} \exp\left(\int_{t_0}^{\tau} a(s)\,ds\right)\lambda(z_{i1}^0, v(\tau))\,d\tau \cdot z_{i1}^0\right) =$$

$$= \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\right) z_{i1}^0 \left(1 - \int_{t_0}^{t} \exp\left(\int_{t_0}^{\tau} a(s)\,ds\right)\lambda(z_{i1}^0, v(\tau))\,d\tau\right), \quad i \in J_1,$$

$$z_{i2}(t) = \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\right) z_{i2}^0 \left(1 - \int_{t_0}^{t} \exp\left(\int_{t_0}^{\tau} a(s)\,ds\right)\lambda(z_{i2}^0, v(\tau))\,d\tau\right), \quad i \in J_2.$$

Рассмотрим функции вида

$$h_{i1}(t) = 1 - \int_{t_0}^{t} q(\tau)\lambda(z_{i1}^0, v(\tau))\,d\tau, \quad i \in J_1, \quad h_{i2}(t) = 1 - \int_{t_0}^{t} q(\tau)\lambda(z_{i2}^0, v(\tau))\,d\tau, \quad i \in J_2,$$

$h_{ij}(t)$ — непрерывные функции, и $h_{i1}(t_0) = 1$, $h_{i2}(t_0) = 1$.

$$\sum_{i\in J_1} h_{i1}(t) + \sum_{i \in J_2} h_{i2}(t) = |J_1| + |J_2| - \int_{t_0}^{t} q(\tau) \sum_{i\in J_1} \lambda_i(z_{i1}^0, v(\tau))\,d\tau - \int_{t_0}^{t} q(\tau) \sum_{i \in J_2} \lambda_i(z_{i2}^0, v(\tau))\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant |J_1| + |J_2| - \int_{t_0}^{t} q(\tau) \max\{\max_{i\in J_1} \lambda_i(z_{i1}^0, v(\tau)), \max_{i\in J_2} \lambda_i(z_{i2}^0, v(\tau))\}\,d\tau.$$

Так как

$$\int_{t_0}^{t} q(\tau)\max\{\max_{i\in J_1}\lambda_i(z_{i1}^0, v(\tau)), \max_{i\in J_2}\lambda_i(z_{i2}^0, v(\tau))\}\,d\tau =$$
$$= \int_{T_1} q(\tau)\max\{\max_{i\in J_1}\lambda_i(z_{i1}^0, v(\tau)), \max_{i\in J_2}\lambda_i(z_{i2}^0, v(\tau))\}\,d\tau +$$
$$+ \int_{T_2} q(\tau)\max\{\max_{i\in J_1}\lambda_i(z_{i1}^0, v(\tau)), \max_{i\in J_2}\lambda_i(z_{i2}^0, v(\tau))\}\,d\tau \geqslant$$
$$\geqslant \int_{T_2} q(\tau)\max\{\max_{i\in J_1}\lambda_i(z_{i1}^0, v(\tau)), \max_{i\in J_2}\lambda_i(z_{i2}^0, v(\tau))\}\,d\tau \geqslant \delta\frac{\delta g(t)-\mu^0}{\delta+d} = \frac{\delta^2 g(t)-\mu^0\delta}{\delta+d},$$

то

$$\sum_{i\in J_1} h_{i1}(t) + \sum_{i\in J_2} h_{i2}(t) \leqslant |J_1| + |J_2| - \frac{\delta^2 g(t)-\mu^0\delta}{\delta+d}.$$

Из условия $\lambda_0 = 0$ следует, что $g(t)\to\infty$ при $t\to\infty$. Из последнего неравенства следует, что существует момент T такой, что $|J_1| + |J_2| - \dfrac{\delta^2 g(t)-\mu^0\delta}{\delta+d} \leqslant 0$ для всех $t\geqslant T$, и поэтому хотя бы одна из функций h_{ij} обратится в 0 в некоторый момент T_0. Если $h_{r1}(T_0) = h_{s2}(T_0) = 0$ при некоторых $r\in J_1$, $s\in J_2$, то

$$x_r(T_0) = y_1(T_0), \quad x_s(T_0) = y_2(T_0).$$

Следовательно, в игре Γ происходит поимка.

Пусть $h_{r1}(T_0) = 0$, $h_{s2}(T_0)\neq 0$ для всех $s\in J_2$. Тогда $x_r(T_0) = y_1(T_0)$.

Кроме того, имеем $z_{i2}^0 = \dfrac{q(T_0)}{h_{i2}(T_0)} z_{i2}(T_0)$, $i\in J_2$, $q(T_0) > 0$, $h_{i2}(T_0) > 0$, $i\in J_2$.

$$z_{r2}(T_0) = x_r(T_0) - y_2(T_0) = x_r(T_0) - y_1(T_0) + y_1(T_0) - y_2(T_0) = c\exp\left(-\int_{t_0}^{T_0} a(s)\,ds\right).$$

Поэтому по лемме 1 набор векторов

$$\{z_{i2}(T_0),\ i\in J_2,\ z_{r2}(T_0),\ p_1,\ldots,p_r\}$$

составляет положительный базис. В силу [22] преследователи $\{P_i,\ i\in J_2,\ P_r\}$ ловят убегающего E_2. Отсюда следует, что в игре Γ происходит поимка.

2. $J_1\cap J_2\neq\varnothing$. Пусть $J = J_1\cap J_2$, тогда $J_1^0 = I_1\cup(J_1\setminus J)$, $J_2^0 = I_2\cup(J_2\setminus J)$.

Задаем управление преследователей следующим образом:

$$u_i(t) = v(t) - \lambda(z_{i1}^0, v(t))z_{i1}^0, \quad i\in J_1^0,$$
$$u_i(t) = v(t) - \lambda(z_{i2}^0, v(t))z_{i2}^0, \quad i\in J_2^0,$$
$$u_i(t) = v(t), \quad i\in J, \quad t\in[t_0, T].$$

Момент T будет указан позже. Управление остальных преследователей задаем произвольно.

Из системы (1.3) имеем

$$z_{i1}(t) = \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\right) z_{i1}^0 h_{i1}(t), \quad i\in J_1^0, \quad z_{i2}(t) = \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\right) z_{i2}^0 h_{i2}(t), \quad i\in J_2^0,$$

$$z_{i1}(t) = \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\right) z_{i1}^0, \quad z_{i2}(t) = \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\right) z_{i2}^0, \quad i\in J,$$

где

$$h_{i1}(t) = 1 - \int_{t_0}^{t} q(\tau)\lambda(z_{i1}^0, v(\tau))\,d\tau, \quad i\in J_1^0, \quad h_{i2}(t) = 1 - \int_{t_0}^{t} q(\tau)\lambda(z_{i2}^0, v(\tau))\,d\tau, \quad i\in J_2^0.$$

По условию векторы
$$\{z_{l1}^0,\, l \in J_1^0,\, z_{l2}^0,\, l \in J_2^0,\, p_1, \ldots, p_r\}$$
образуют положительный базис. Поэтому существуют положительные числа γ_{l1}, $l \in J_1^0$, γ_{l2}, $l \in J_2^0$, α_s такие, что
$$\sum_{l \in J_1^0} \gamma_{l1}^0 z_{l1}^0 + \sum_{l \in J_2^0} \gamma_{l2}^0 z_{l2}^0 + \sum_{s=1}^{r} \alpha_s p_s = 0.$$
Обозначим
$$p_0 = \sum_{s=1}^{r} \alpha_s p_s, \quad D_0 = \{y \mid \langle p_0, y\rangle \leqslant 0\}.$$
Получаем, что набор $\{z_{l1}^0,\, l \in J_1^0,\, z_{l2}^0,\, l \in J_2^0,\, p_0\}$ образует положительный базис и $D \subset D_0$. Проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям пункта 1, получаем, что существует момент T_0 такой, что хотя бы одна из функций $h_{i1}\,(i \in J_1^0)$, $h_{i2}\,(i \in J_2^0)$ обратится в нуль. Пусть $h_{q1}(T_0) = 0$, $q \in J_1^0$, $h_{s2}(T_0) \neq 0$ для всех $s \in J_2^0$. Тогда $x_q(T_0) = y_1(T_0)$ и, кроме того, $z_{s2}^0 = \dfrac{q(T_0)}{h_{s2}(T_0)} z_{s2}(T_0)$, $s \in J_2^0$, $q(T_0) > 0$, $h_{s2}(T_0) > 0$, $s \in J_2^0$, $z_{l2}^0 = z_{l2}(T_0)q(T_0)$, $l \in J$.
$$z_{q2}(T_0) = x_q(T_0) - y_2(T_0) = x_q(T_0) - y_1(T_0) + y_1(T_0) - y_2(T_0) = c \exp\left(-\int_{t_0}^{T_0} a(s)\, ds\right).$$
Поэтому по лемме 1 набор
$$\{z_{s2}(T_0),\, s \in J_2^0,\, z_{q2}(T_0),\, q \in J_1^0,\, p_1, \ldots, p_r\}$$
образует положительный базис. В силу [22] в игре Γ происходит поимка. Теорема доказана. □

Теорема 2. *Пусть $\lambda_0 = 0$, $D = \mathbb{R}^k$ и существуют множества $J_1, J_2 \subset \{1, \ldots, n\}$ и множества $I_1, I_2 \subset I_0 \setminus (J_1 \cup J_2)$, $I_1 \cap I_2 = \varnothing$ такие, что наборы*
$$\{z_{i1}^0,\, i \in J_1,\, -c\},\ \{z_{i2}^0,\, i \in J_2,\, c\},$$
$$\{z_{l1}^0,\, l \in J_1 \setminus (J_1 \cap J_2),\, z_{s2}^0,\, s \in J_2 \setminus (J_1 \cap J_2),\, z_{\alpha 1}^0,\, \alpha \in I_1,\, z_{\beta 2}^0,\, \beta \in I_2\}$$
образуют положительный базис, причем $|J_1| \geqslant k$, $|J_2| \geqslant k$, $|J_1^0| + |J_2^0| \geqslant k+1$, где $J_1^0 = (I_1 \cup J_1) \setminus (J_1 \cap J_2)$, $J_2^0 = (I_2 \cup J_2) \setminus (J_1 \cap J_2)$.

Тогда в игре Γ происходит поимка.

Доказательство. Утверждение теоремы непосредственно следует из теоремы 1. □

Пример 1. Пусть $k = 3$, $n = 5$, $r = 1$ и начальные позиции игроков следующие:
$$x_1^0 = (3,0,0), \quad x_2^0 = (-2,-2,0), \quad x_3^0 = (1,3,10), \quad x_4^0 = (-3,4,10), \quad x_5^0 = (3,2,5),$$
$$p_1 = (0,-1,0), \quad y_1^0 = (0,0,1), \quad y_2^0 = (0,0,2).$$
Пусть $a(t) = 0$, тогда $\lambda_0 = 0$. В качестве J_1, J_2, I_1, I_2 возьмем множества
$$J_1 = \{1,2,3\}, \quad J_2 = \{3,4,5\}, \quad I_1 = I_2 = \varnothing.$$
Тогда наборы векторов
$$\{z_{11},\, z_{21},\, z_{31},\, p_1,\, -c\}, \quad \{z_{32},\, z_{42},\, z_{52},\, p_1,\, c\}, \quad \{z_{11},\, z_{21},\, z_{42},\, z_{52},\, p_1\}$$
образуют положительный базис. Таким образом, получаем, что условие теоремы выполнено. Следовательно, в данной игре происходит поимка.

Пример 2. Пусть $k = 2$, $n = 5$, $r = 1$ и начальные позиции игроков следующие:

$$x_1^0 = (-2, 3), \quad x_2^0 = (2, 3), \quad x_3^0 = (1, 4),$$

$$x_4^0 = (2, -3), \quad x_5^0 = (6, -1), \quad y_1^0 = (0, 2), \quad y_2^0 = (3, 0).$$

Функция $a(t) = 1$, тогда $\lambda_0 = 0$. В качестве J_1, J_2, I_1, I_2 возьмем множества

$$J_1 = \{1, 2\}, \quad J_2 = \{4, 5\}, \quad I_1 = \{3\}, \quad I_2 = \{\varnothing\}.$$

Тогда наборы векторов

$$\{z_{11}^0, z_{21}^0, -c\}, \quad \{z_{42}^0, z_{52}^0, c\}, \quad \{z_{11}^0, z_{21}^0, z_{42}^0, z_{52}^0, z_{31}^0\}$$

образуют положительный базис. Получаем, что условие теоремы выполнено. Следовательно, в данной игре происходит поимка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пшеничный Б.Н. Простое преследование несколькими объектами // Кибернетика. 1976. № 3. С. 145–146.
2. Черноусько Ф.Л. Одна задача уклонения от многих преследователей // Прикладная математика и механика. 1976. Т. 40. Вып. 1. С. 14–24.
3. Петров Н.Н. Простое преследование при наличии фазовых ограничений. Л., 1984. 16 с. Деп. в ВИНИТИ 27.03.1984, № 1684–84.
4. Рихсиев Б.Б. Дифференциальные игры с простыми движениями. Ташкент: Фан, 1989. 187 с.
5. Петросян Л.А. Дифференциальные игры преследования. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1977. 222 с.
6. Чикрий А.А. Конфликтно-управляемые процессы. Киев: Наукова думка, 1992. 380 с.
7. Григоренко Н.Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во МГУ, 1990. 197 с.
8. Благодатских А.И., Петров Н.Н. Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: Изд-во Удмуртского университета, 2009. 266 с.
9. Петров Н.Н., Петров Н. Никандр. О дифференциальной игре «казаки-разбойники» // Дифференциальные уравнения. 1983. Т. 19. № 8. С. 1366–1374.
10. Вагин Д.А., Петров Н.Н. Об одной задаче группового преследования с фазовыми ограничениями // Прикладная математика и механика. 2002. № 2. С. 238–245.
11. Прокопович П.В., Чикрий А.А. Линейная задача убегания при взаимодействии групп объектов // Прикладная математика и механика. 1994. Т. 58. Вып. 4. С. 12–21.
12. Чикрий А.А., Прокопович П.В. О задаче убегания при взаимодействии групп движущихся объектов // Кибернетика. 1989. № 5. С. 59–63.
13. Сатимов Н., Маматов М.Ш. О задаче преследования и уклонения от встречи в дифференциальных играх между группами преследователей и убегающих // ДАН Узб. ССР. 1983. № 4. С. 3–6.
14. Петров Н.Н., Прокопенко В.А. Об одной задаче преследования группы убегающих // Дифференциальные уравнения. 1987. Т. 23. № 4. С. 725–726.
15. Григоренко Н.Л. Преследование несколькими управляемыми объектами двух убегающих // ДАН СССР. 1985. Т. 282. № 5. С. 1051–1054.
16. Виноградова М.Н. О поимке двух убегающих в задаче простого преследования с фазовыми ограничениями // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 4. С. 3–8.
17. Виноградова М.Н. О поимке двух убегающих в нестационарной задаче простого преследования // Математическая теория игр и ее приложения. 2012. Т. 4. Вып. 1. С. 21–31.
18. Виноградова М.Н., Петров Н.Н., Соловьева Н.А. Поимка двух скоординированных убегающих в линейных рекуррентных дифференциальных играх // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19. № 1. С. 41–48.
19. Виноградова М.Н., Петров Н.Н. Мягкая поимка двух скоординированных инерционных объектов // Известия РАН. Теория и системы управления. 2013. № 6. С. 108–113.
20. Банников А.С. О задаче позиционной поимки одного убегающего группой преследователей // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 1. С. 3–7.

21. Петров Н.Н. К нестационарной задаче группового преследования с фазовыми ограничениями // Математическая теория игр и ее приложения. 2010. Т. 2. Вып. 4. С. 74–83.
22. Банников А.С., Петров Н.Н. К нестационарной задаче группового преследования // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16. № 1. С. 40–51.
23. Петров Н.Н. Об управляемости автономных систем // Дифференциальные уравнения. 1968. Т. 4. № 4. С. 606–617.

Поступила в редакцию 25.02.2015

Виноградова Марина Николаевна, аспирант, старший преподаватель, кафедра математики и информатики, Удмуртский государственный университет, филиал в г. Воткинске, 427438, Россия, г. Воткинск, ул. Расковой, 1а.
E-mail: mnvinogradova@mail.ru

M. N. Vinogradova

On the capture of two evaders in a non-stationary pursuit–evasion problem with phase restrictions

Keywords: differential game, phase restrictions, piece-program strategy, counterstrategy.

MSC: 49N70, 49N75

We consider a linear problem of pursuing two evaders by a group of persecutors in case of equal dynamic opportunities of all participants and under phase restrictions imposed on the states of evaders. We assume that the evaders use the same control. The movement of each participant has the form $\dot{z} + a(t)z = w$. Geometric constraints on the control are strictly convex compact set with smooth boundary, and terminal sets are the origin of coordinates. It is assumed that the evaders do not leave the convex cone. The aim of a group of pursuers is to capture two evaders; the aim of a group of evaders is opposite. We say that a capture holds in the problem of pursuing two evaders if among the specified number of pursuers there are two of them who catch the evaders, possibly at different times. We obtain sufficient conditions for capturing two evaders in terms of initial positions. The results obtained are illustrated by examples.

REFERENCES

1. Pshenichnyi B.N. Simple pursuit by several objects, *Kibernetika*, 1976, no. 3, pp. 145–146 (in Russian).
2. Chernous'ko F.L. A problem of evasion from many pursuers, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1976, vol. 40, no. 1, pp. 11–20.
3. Petrov N.N. The simple pursuit with phase constraints, Leningrad State University, Leningrad, 1984, 16 p. Deposited in VINITI 27.03.1984, no. 1684-84 (in Russian).
4. Rikhsiev B.B. *Differentsial'nye igry s prostymi dvizheniyami* (Differential games with simple motions), Tashkent: Fan, 1989, 187 p.
5. Petrosyan L.A. *Differentsial'nye igry presledovaniya* (Differential games of pursuit), Leningrad: Leningrad State University, 1977, 222 p.
6. Chikrii A.A. *Konfliktno-upravlyaemye protsessy* (Conflict-controlled processes), Kiev: Naukova Dumka, 1992, 380 p.
7. Grigorenko N.L. *Matematicheskie metody upravleniya neskol'kimi dinamicheskimi protsessami* (Mathematical methods of control over multiple dynamic processes), Moscow: Moscow State University, 1990, 197 p.
8. Blagodatskikh A.I., Petrov N.N. *Konfliktnoe vzaimodeistvie grupp upravlyaemykh ob"ektov* (Conflict interaction of groups of controlled objects), Izhevsk: Udmurt State University, 2009, 266 p.
9. Petrov N.N., Petrov N. Nikandr. On a differential game of "cossaks-robbers", *Differ. Uravn.*, 1983, vol. 19, no. 8, pp. 1366–1374 (in Russian).
10. Vagin D.A., Petrov N.N. A problem of group pursuit with phase constraints, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2002, vol. 66, issue 2, pp. 225–232.
11. Prokopovich P.V., Chikrii A.A. A linear evasion problem for interacting groups of objects, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1994, vol. 58, no. 4, pp. 583–591.

12. Chikrii A.A., Prokopovich P.V. About evasion problem in the interaction of groups of moving objects, *Kibernetika*, 1989, no. 5, pp. 59–63 (in Russian).
13. Satimov N., Mamatov M.Sh. On problems of pursuit and evasion away from meeting in differential games between groups of pursuers and evaders, *Dokl. Akad. Nauk UzSSR*, 1983, no. 4, pp. 3–6 (in Russian).
14. Petrov N.N., Prokopenko V.A. On a problem of pursuit of a group of evaders, *Differ. Uravn.*, 1987, vol. 23, no. 4, pp. 725–726 (in Russian).
15. Grigorenko N.L. Pursuit of two evaders by several controlled objects, *Sov. Math., Dokl.*, 1985, vol. 31, pp. 550–553.
16. Vinogradova M.N. On the capture of two evaders in a simple pursuit–evasion problem with phase restrictions, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2011, no. 4, pp. 3–8 (in Russian).
17. Vinogradova M.N. On the capture of two escapees in the non-stationary problem of simple pursuit, *Matematicheskaya Teoriya Igr i Ee Prilozheniya*, 2012, vol. 4, no. 1, pp. 21–31 (in Russian).
18. Vinogradova M.N., Petrov N.N., Solov'eva N.A. Capture of two cooperative evaders in linear recurrent differential games, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2013, vol. 19, no. 1, pp. 41–48 (in Russian).
19. Vinogradova M.N., Petrov N.N. Soft capture of two coordinated evaders, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2013, vol. 52, no. 6, pp. 949–954.
20. Bannikov A.S. About a problem of positional capture of one evader by group of pursuers, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2011, no. 1, pp. 3–7 (in Russian).
21. Petrov N.N. To the non-stationary problem of the group pursuit with phase restrictions, *Matematicheskaya Teoriya Igr i Ee Prilozheniya*, 2010, vol. 2, no. 4, pp. 74–83 (in Russian).
22. Bannikov A.S., Petrov N.N. On a nonstationary problem of group pursuit, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2010, vol. 271, issue 1 supplement, pp. 41–52.
23. Petrov N.N. Controllability of autonomous systems, *Differ. Uravn.*, 1968, vol. 4, no. 4, pp. 606–617 (in Russian).

Received 25.02.2015

Vinogradova Marina Nikolaevna, post-graduate student, Senior Lecturer, Department of Mathematics and Informatics, Udmurt State University, Branch in Votkinsk, ul. Raskovoi, 1a, Votkinsk, 427438, Russia.
E-mail: mnvinogradova@mail.ru